SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL WEBER

Classes uniformes de processus gaussiens stationnaires

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 196-256
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__196_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités
1975/76

CLASSES UNIFORMES DE PROCESSUS GAUSSIENS STATIONNAIRES.

par

Michel WEBER

INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'étude de quelques propriétés asymptotiques des trajectoires des processus gaussiens stationnaires.

Considérons un processus gaussien X , séparable défini sur l'intervalle $T = [0,1]$. Notons d l'écart sur T défini par X , et soit φ une fonction sur R_*^+ à valeurs dans R_*^+ non croissante, telle que :

$$(0.1) \qquad \overline{\lim_{t \downarrow 0}}\ \varphi(t) = +\infty .$$

Une partie très importante de l'étude du comportement asymptotique des trajectoires des processus gaussiens consiste à caractériser les fonctions φ telles que les événements suivants sont de probabilité égale à 0 ou 1 seulement.

$$(0.2) \qquad E_1 = \{\omega : \exists\ \delta(\omega) > 0 : 0 \leq s , t \leq 1 \ \text{ et } \ |s-t| < \delta(\omega) \Rightarrow |X(\omega,s) - X(\omega,t)| < d(s,t)\,\varphi(|s-t|)\} .$$

$$(0.3) \qquad \forall\ t \in T , E_2(t) = \{\omega : \exists\ \delta(\omega) > 0 : 0 \leq u \leq 1 \ \text{ et } \ |u-t| < \delta(\omega) \Rightarrow |X(\omega,u) - X(\omega,t)| < d(u,t).\varphi(|u-t|)\} .$$

DEFINITION 0.4.- Nous dirons que φ appartient à la classe uniforme supérieure (resp. inférieure) de X , que nous notons $\mathcal{U}_u(X)$ (resp. $\mathcal{L}_u(X)$) , lorsque :

$$P(E_1) = 1 \qquad (\text{resp. } 0) .$$

Dans le même ordre d'idées, nous dirons que φ appartient à la classe locale supérieure (resp. inférieure) de X, que nous notons $\mathcal{U}_\ell(X)$, (resp. $\mathcal{L}_\ell(X)$), lorsque :

$$\forall\ t \in T\ ,\ P(E_2(t)) = 1 \qquad (\text{resp. } 0)\ .$$

En dépendance avec ce concept, introduisons la notion de condition de Hölder locale ou uniforme vérifiée par le processus X.

DEFINITION 0.5.- Nous dirons que X est localement φ-hölderien, lorsqu'il existe deux nombres c_o et c_1, $0 < c_o \leq c_1 < +\infty$, tels que :

$$\forall\ t \in T\ ,\ P\{\omega : c_o \leq \overline{\lim_{\substack{|u-t| \to 0 \\ u \in [0,1]}}} \frac{X(\omega,u) - X(\omega,t)}{d(u,t)\varphi(|u-t|)} \leq c_1\} = 1\ .$$

De même nous dirons que X est uniformément φ-hölderien lorsqu'il existe deux nombres c'_o et c'_1, $0 < c'_o \leq c'_1 < +\infty$, tels que :

$$P\{\omega : c'_o \leq \overline{\lim_{\substack{|s-t| = h \to o \\ o \leq s,t \leq 1}}} \frac{X(\omega,s) - X(\omega,t)}{d(u,t)\varphi(|u-t|)} \leq c_1\} = 1\ .$$

Historiquement les premières études faites en ce domaine concernaient le mouvement brownien, et on doit à Paul Levy [18] d'avoir le premier montré que la fonction :

$$\varphi_c(t) = \sqrt{2c \log \frac{1}{t}}$$

appartient à $\mathcal{U}_u(W)$ pour tout réel $c > 1$, et à $\mathcal{L}_u(W)$ lorsque $0 < c < 1$. Il démontre, en outre, un résultat similaire concernant cette fois les classes locales du mouvement brownien, pour la fonction :

$$\psi_c(t) = \sqrt{2c \log\log \frac{1}{t}} \qquad (c > 1 \ \text{ ou } \ 0 < c < 1)\ .$$

Ce n'est que plus tard, que les classes inférieures et supérieures du mouvement brownien ont été complètement caractérisées grâce aux travaux de I. Petrowski [24] pour les classes locales, et de K.L. Chung, P. Erdös et I. Sirao [29] pour les classes uniformes.

Ces résultats sont concrétisés par les deux théorèmes suivants :

THEOREME LOCAL 0.6.- Soit $\varphi : R_*^+ \to R_*^+$ une fonction non croissante vérifiant (0.1) ; posons :

$$I_\ell(\varphi) = \int_{+0} \frac{\varphi(t).e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}}{t}\, dt .$$

Nous avons les équivalences suivantes :

a) $(I_\ell(\varphi) < +\infty) \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi \in \mathcal{U}_\ell(W))$

b) $(I_\ell(\varphi) = +\infty) \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi \in \mathcal{L}_\ell(W))$.

THEOREME UNIFORME 0.7.- Posons, avec les hypothèses précédentes :

$$I_u(\varphi) = \int_{+0} \frac{\varphi^3(t).e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}}{t^2}\, dt .$$

Nous avons les équivalences suivantes :

a) $(I_u(\varphi) < +\infty) \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi \in \mathcal{U}_u(W))$

b) $(I_u(\varphi) = +\infty) \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi \in \mathcal{L}_u(W))$.

Nous en déduisons donc dans ce cas que les événements E_1 et $E_2(t)$ définis plus haut satisfont à la loi du 0-1.

Plus récemment, en 1970, T. Sirao et H. Watanabé [28] se sont intéressés aux processus gaussiens stationnaires sur $[0,1]$, et spécialement à ceux pour lesquels l'écart associé $d^2(s,t) = d^2(|s-t|)$ est une fonction concave au voisinage de l'origine, vérifiant une inégalité du type suivant :

$$(0.8) \qquad c_1 . x^{\alpha}(\log\frac{1}{x})^{\beta} \leq d^2(x) \leq c_2\, x^{\alpha}(\log\frac{1}{x})^{\beta} ,$$

ce qui s'écrit d'une façon plus condensée : $d^2(x) \asymp x^{\alpha}(\log\frac{1}{x})^{\beta}$, au voisinage de l'origine.

Il ressort en particulier de leurs travaux que les classes inférieures et supérieures dépendent directement de α mais pas de β .

Dans ce travail nous nous proposons de présenter deux théorèmes dus à N. Kôno concernant les classes uniformes et d'en donner les démonstrations complètes. On retrouvera ce faisant les résultats connus de Chung, Erdös, Sirao et Petrowski. Ceci fait l'objet du chapitre I.

Au chapitre II nous verrons comment, à partir d'un lemme fonctionnel, obtenir des renseignements intéressant la classe uniforme $\mathcal{L}_u(X)$ lorsque X est un processus gaussien à covariance relativement irrégulière.

CHAPITRE I

AVANT-PROPOS :

Nous présentons ici quelques résultats importants obtenus par N. Kôno en 1970, concernant les classes uniformes $\mathcal{L}_u(X)$ et $\mathcal{U}_u(X)$, où $X = X(t)$, $t \in T$ est un processus gaussien centré à trajectoires continues. Nous les énonçons et les démontrons dans le cas où $T = [0,1]$; le lecteur se convaincra facilement qu'ils s'étendent énoncés et démonstrations, au cas où T est une partie compacte convexe d'un espace euclidien de dimension finie.

Ce chapitre est divisé en huit paragraphes. Les six premiers sont consacrés à l'exposé des résultats sur lesquels reposent les démonstrations de deux théorèmes que nous étudions. Ils sont donc disjoints entre eux. Nous démontrons dans les deux derniers paragraphes deux théorèmes, l'un concernant la classe $\mathcal{L}_u(X)$, l'autre la classe $\mathcal{U}_u(X)$. Ils permettent de caractériser ces classes, lorsque l'écart associé à X est une fonction à croissance faiblement régulière d'un type particulier. C'est précisément cette notion qui fait l'objet du 1er paragraphe.

I.1 - FONCTIONS REGULIERES, DEFINITIONS ET PROPRIETES :

DEFINITION 1.1.1.- Soient C un réel strictement positif et $\sigma :]0,C] \to \mathbb{R}_*^+$ une fonction borelienne localement bornée. Nous dirons que σ est une fonction "à croissance régulière au sens de J. Karamata", ou plus simplement, "à croissance régulière, si pour tout nombre $x > 0$, l'expression :

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\sigma(tx)}{\sigma(t)} ,$$

existe et est finie.

Notons $f(x)$ cette limite. On démontre qu'il existe un nombre α tel que :

$$f(x) \equiv x^{\alpha} .$$

Nous dirons alors que σ est une fonction "à croissance régulière d'exposant α".

DEFINITION 1.1.2.- Soient C un nombre strictement positif et $\sigma :]0,C] \to R_*^+$, une fonction borélienne localement bornée. Nous dirons que σ est une fonction "à croissance faiblement régulière" lorsqu'il existe une fonction à croissance régulière $\tau :]0,C] \to R_*^+$ telle que :

$$\sigma \asymp \tau \quad \text{sur} \quad]0,C]$$

c'est-à-dire :

$$\exists\, c_1, c_2 \in R , \quad 0 < c_1 \leq c_2 < +\infty \quad \text{tels que :}$$

$$\forall\, x \in]0,C] , \quad c_1\, \tau(x) \leq \sigma(x) \leq c_2\, \tau(x) .$$

Si τ est d'exposant α, nous dirons que σ est une fonction "à croissance faiblement régulière d'exposant α".

On doit à J. Karamata [14], le théorème suivant caractérisant les fonctions continues à croissance régulière. Nous l'énonçons sans le démontrer. Sa démonstration n'est pas élémentaire et sort du cadre de cet exposé. Il en sera de même pour les propositions suivantes que nous utiliserons fréquemment.

THEOREME 1.1.3.- Soient C un nombre strictement positif et $\sigma :]0,C] \to R_*^+$, une fonction continue à croissance régulière d'exposant α. Il existe une fonction $a :]0,C] \to R_*^+$ continue, et, pour tout nombre c_0, $c_0 \in]0,C]$ une fonction $b :]0,C] \to R_*^+$ continue dépendant de c_0 telles que l'on ait :

(i) $\lim\limits_{x \downarrow 0} a(x) = 0$

(ii) $\lim\limits_{x \downarrow 0} b(x) = b$, $b > 0$.

(iii) pour tout nombre x , $x \in]0,C]$, σ admet la représentation suivante :

$$\sigma(x) = b(x).x^{\alpha} e^{\int_x^{c_0} \frac{a(u)}{u} du} .$$

PROPOSITION 1.1.4.- Soit C un nombre strictement positif et $\sigma :]0,C] \to R_*^+$, une fonction continue, non décroissante, à croissance faiblement régulière d'exposant $\alpha > 0$.

Posons :

$$\forall x \in]0,\sigma(c)] , \bar{\sigma}^1(x) = \inf\{y > 0 : \sigma(y) \geq x\} .$$

Alors, $\bar{\sigma}^1$ est à croissance faiblement régulière d'exposant $\frac{1}{\alpha}$.

PROPOSITION 1.1.5.- Sous les hypothèses de la proposition précédente, on peut associer à tout nombre $\varepsilon > 0$, deux constantes c_1 et c_2 , $0 < c_1 < c_2 < +\infty$, telles que :

$$\forall u \in [0,1] , \forall t \in]0,C] , c_1.u^{\alpha+\varepsilon} \leq \frac{\sigma(tu)}{\sigma(t)} \leq c_2 u^{\alpha-\varepsilon} .$$

I.2 - UNE EXTENSION DU LEMME DE BOREL-CANTELLI :

L'étude des propriétés asymptotiques des processus stochastiques suppose la détermination des sous-ensembles de l'espace T , constituant une famille dénombrable dense pour la topologie initiale de T , et sur lesquels les accroissements du processus sont indépendants, ou le deviennent asymptotiquement. C'est le cas pour les processus à accroissements orthogonaux, par exemple le mouvement brownien, ou encore pour les processus gaussiens stationnaires sur R , dont la variance des accroissements est une fonction concave au voisinage de l'origine ; la covariance des accroissements de X sur des intervalles disjoints est alors négative ou nulle. La condition d'indépendance intervenant dans le lemme de Borel-Cantelli se vérifie sans difficulté, lorsqu'on étudie des problèmes simples de loi du logarithme itéré concernant les trajectoires de ces processus. Le lecteur pourra se reporter à [18] pour les démonstrations de ces résultats. L'application du lemme de Borel-Cantelli devient par contre totalement impossible dès lors qu'on aborde l'étude des classes inférieures. Ceci est compréhensible puisque, dans ce cas, c'est la corrélation des maximums aléatoires des accroissements de X sur des sous-ensembles non disjoints, qui intervient.

K.L. Chung [29] et N. Kôno [16] ont donc été conduits à rechercher des extensions du lemme de Borel-Cantelli, où la condition d'indépendance revêt une forme suffisamment faible pour pouvoir être vérifiée lorsque l'écart associé à X possède de bonnes propriétés de régularité.

La démonstration se pose sur la relation ensembliste suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}\right) . 1_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$$

à laquelle on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Le lemme suivant est dû à N. Kôno [16] .

LEMME 1.2.1.- <u>Soient</u> $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ <u>un espace probabilisé et</u> $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ <u>une famille d'éléments de</u> $\mathcal{G}$. <u>On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées.</u>

(1) . $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty$

(2) . il existe un entier $n_o > 0$, deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, et pour tout entier $n > n_o$ un index fini ou infini $I_n = \{m_k^{(n)}\}_k$ avec

$$n < m_1^{(n)} < m_2^{(n)} < \dots\dots < m_k^{(n)} < \dots\dots$$

tels que :

(2.a) $$\forall\, n>n_o\ ,\ \sum_{m\in I_n} P(A_n\cap A_m) < c_1 P(A_n)\ .$$

(2.b) $$\forall\, n>n_o\ ,\ \forall\, m>n\ ,\ \text{tel que : } m\notin I_n\ :$$

$$P(A_n\cap A_m) \le c_2 P(A_n).P(A_m)\ .$$

Dans ces conditions, nous avons :

$$P\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n\} \ge (c_2)^{-1}\ .$$

<u>Démonstration</u> : Soient deux entiers n_1 et n_2 tels que : $n_2>n_1>n_o$.

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire :

$$[\sum_{k=n_1}^{n_2} P(A_k)]^2 = \int_\Omega \sum_{k=n_1}^{n_2} I_{A_k}(\omega).I_{\bigcup\limits_{n_1\le k\le n_2} A_k}(\omega).dP(\omega)\ .$$

$$\le P(\bigcup_{k=n_1}^{n_2} A_k).\sum_{k,\ell=n_1}^{n_2} P(A_k\cap A_\ell)\ . \qquad (1)$$

Or $$\sum_{k,\ell=n_1}^{n_2} P(A_k\cap A_\ell) = \sum_{k=n_1}^{n_2} P(A_k) + 2\sum_{k=n_1}^{n_2}\sum_{\ell=k+1}^{n_2} P(A_k\cap A_\ell)\ . \qquad (2)$$

Soit $k\in[n_1,n_2[$; nous déduisons des hypothèses (2.a) et (2.b) :

$$\sum_{\ell=k+1}^{n_2} P(A_k\cap A_\ell) = \sum_{\substack{\ell=k+1\\ \ell\in I_k}}^{n_2} P(A_k\cap A_\ell) + \sum_{\substack{\ell=k+1\\ \ell\notin I_k}}^{n_2} P(A_k\cap A_\ell)$$

$$\le c_1 P(A_k) + c_2 \sum_{\ell=k+1}^{n_2} P(A_k).P(A_\ell)\ . \qquad (3)$$

Les inégalités (2) et (3) impliquent :

$$\sum_{k,\ell=n_1}^{n_2} P(A_k \cap A_\ell) \leq (1+c_1) \cdot \sum_{k=n_1}^{n_2} P(A_k) \cdot + c_2 \Big[\sum_{k=n_1}^{n_2} P(A_k)\Big]^2 \qquad (4)$$

et par conséquent :

$$P\Big(\bigcup_{k=n_1}^{n_2} A_k\Big) \geq \frac{1}{c_2 + \dfrac{1+c_1}{\sum_{k=n_1}^{n_2} P(A_k)}} \,.$$

D'où en faisant tendre n_2 vers l'infini, on déduit à l'aide de l'hypothèse (1) du lemme :

$$P\Big(\bigcup_{k=n_1}^{\infty} A_k\Big) \geq \frac{1}{c_2} \,.$$

Ceci est vérifié pour tout entier $n_1 > n_o$; la conclusion est immédiate.

Le corollaire suivant est dû à M.B. Marcus [20]. Il se déduit très facilement du lemme 1.2.1.

COROLLAIRE 1.2.2.- Soient $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ un espace probabilisé, $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une fonction croissant strictement et $\{B_{n,j}\,,\, n \geq 1\,,\, 1 \leq j \leq g(n)\}$ une famille d'éléments de $\mathcal{G}$. Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées :

(1) $\forall\, n \geq 1\,,\ \forall\, j,k\,,\ 1 \leq j,k \leq g(n)\,,\ j \neq k\,,\ P(B_{n,j} \cap B_{n,k}) \leq P(B_{n,j}) \cdot P(B_{n,k})$

(2) $\underline{\lim}_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{g(n)} P(B_{n,j}) \geq \rho > 0$.

Alors, dans ces conditions :

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} P\Big\{\bigcup_{j=1}^{g(n)} B_{n,j}\Big\} \geq \frac{1}{1+\rho^{-1}} \,.$$

<u>Remarque</u> : On peut aussi démontrer (1.2.2) directement en appliquant l'inégalité de Schwarz-Cauchy à la relation :

$$\sum_{1 \leq j \leq g(n)} I_{B_{j,n}} = \Big(\sum_{1 \leq j \leq g(n)} I_{B_{j,n}} \Big) . \; I_{\underset{1 \leq j \leq g(n)}{\bigcup} B_{j,n}} .$$

I.3 - <u>LEMMES DE COMPARAISON - LEMME DE SLEPIAN</u> :

Soient n un entier strictement positif et X,Y deux processus gaussiens sur $T = [1,n]$ c'est-à-dire deux vecteurs gaussiens à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Le lemme suivant dû à D. Slépian [30] permet de comparer à partir de covariances Γ_X et Γ_Y les lois de $\sup\limits_T X$ et $\sup\limits_T Y$.

LEMME 1.3.1.- <u>On suppose que</u> Γ_X <u>et</u> Γ_Y <u>sont liées par les conditions suivantes</u> :

(1) $\quad \forall\, t \in T , \qquad \Gamma_X(t,t) = \Gamma_Y(t,t)$

(2) $\quad \forall\, (s,t) \in T \times T , \qquad \Gamma_X(s,t) \leq \Gamma_Y(s,t)$.

Alors, pour tout nombre réel M , on a :

$$P\{\sup_T X \geq M\} \geq P\{\sup_T Y \geq M\} .$$

Ainsi que le constate X. Fernique dans [8], ce lemme a eu la plus grande importance pour la recherche de conditions nécessaires pour qu'un processus gaussien soit p.s. majoré. Nous l'utiliserons au cours du chapitre II, et renvoyons le lecteur à [8] ouvrage dans lequel X. Fernique établit des propriétés voisines mais plus adaptées à la recherche de conditions nécessaires de majoration des processus gaussiens.

Nous ne démontrons pas non plus les deux lemmes techniques suivants. Ils constituent l'outil indispensable pour vérifier les conditions (2.a) et

(2.b) du lemme 1.2.1, ainsi que nous pourrons le constater dans les paragraphes 7 et 8.

LEMME 1.3.2.- Soient U et V deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites de coefficient de corrélation ρ. Il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que :

$$\forall\, x>0\,,\; P(U>x\,,\,V>x) \le c_1 e^{-\frac{c_2(1-\rho)x^2}{2}} . P(V>x)\;.$$

LEMME 1.3.3.- Soient U et V deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, de coefficient de corrélation ρ. On peut associer à tout nombre réel $\varepsilon>0$, une constante $c(\varepsilon)>0$, telle que :

(1) $\forall\, x>0\,,\, \forall\, y>0\,,$ si $\rho xy<\varepsilon$ alors

$$P(U>x\,,\,V>y) \le c(\varepsilon) . P(U>x) .\, P(V>y)$$

(2) $$\lim_{\varepsilon\to 0} c(\varepsilon) = 1\,.$$

I.4 - EVALUATION DE LA LOI DE $\sup_T X$.

Dans l'introduction du paragraphe I.2, nous avons attiré l'attention du lecteur sur le rôle essentiel que jouent les corrélations des maximums aléatoires des variations locales de X sur des sous-ensembles de T non disjoints. Il faut de plus pouvoir estimer efficacement la loi de ces variables aléatoires. Nous démontrons dans ce paragraphe deux lemmes-clés pour l'étude des classes uniformes : un lemme de majoration se démontrant à l'aide du procédé dichotomique, et un lemme de minoration puissant et pourtant très simple puisqu'il repose sur la seule inégalité de Poincaré. Il ne fait pas appel au lemme de comparaison de Slépian.

Considérons un processus gaussien $X = X(t)\,,\, t\in T$ et soit d l'écart défini par X sur T. Il munit T d'une structure d'espace métrisable.

Soient U une partie de T et ε un nombre réel strictement positif. Nous notons $N(U,\varepsilon)$ le cardinal minimal (fini ou non) d'une famille de d-boules de rayon ε dans T, recouvrant U. Nous notons de même $M(U,\varepsilon)$ le cardinal maximal d'une famille de d-boules de rayon ε, deux à deux disjointes et centrées dans U. Ces nombres analysent l'éparpillement local de (T,d). Au cours de chacune des démonstrations, on recherchera en fonction du module φ supposé étudié (représenté par la variable x dans l'énoncé des deux lemmes), les sous-ensembles U de T et les nombres $\varepsilon(x)$ correspondants, tels que les maximums aléatoires des accroissements de X sur des ε-recouvrements de U soient les plus grands possibles.

LEMME 1.4.1.- (de majoration) - Soient S une partie bornée de $\mathbb{R}^N$, de diamètre $D(S)$, et $X = X(s)$, $s \in S$ un processus gaussien centré séparable de variance égale à 1. Supposons que X vérifie les conditions suivantes :

a) il existe une fonction non décroissante continue σ et une constante $d_1 > 0$, telles que :

$$\forall\, s,t \in S\,, \quad \sqrt{E(X(s)-X(t))^2} \le d_1\,\sigma(\|t-s\|)\,.$$

b) il existe deux constantes strictement positives d_2 et γ telles que :

$$\forall\, t \in]0,D(S)]\,,\ \forall\, u \in [0,1]\,, \quad \frac{\sigma(tu)}{\sigma(t)} \le d_2 u^\gamma\,.$$

Alors il existe une constante $d_3 > 0$, indépendante de S et d_1 telle que :

$$\forall\, x \ge 1\,,\ P\{\sup_{s \in S} X(s) \ge x\} \le d_3 . \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} . N(S,\varepsilon(x))$$

avec $\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\,\sigma^{-1}\left(\frac{1}{d_1 x}\right)$

($\|.\|$. désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$).

Démonstration : Soit x un nombre réel supérieur ou égal à 1, fixé, et envisageons un compact $K \subset S$ réalisant :

$$d_1 . \sigma(D(K)) x \leq 1 . \tag{1}$$

Posons en outre pour tout nombre $t \in [0, D(S)]$.

$$F_\sigma(t) = d_1 \int_0^\infty \sigma(t . e^{-u^2})\, du . \tag{2}$$

Remarquons que $F_\sigma(t)$ est définie pour tout $t \in [0, D(S)]$, puisque, en vertu de l'hypothèse b), nous avons :

$$\forall\ t \in [0, D(S)] ,\ \forall\ u \geq 0 ,\ \sigma(t . e^{-u^2}) \leq d_2 \sigma(t) . e^{-\gamma u^2}$$

et par conséquent :

$$0 \leq F_\sigma(t) \leq d_1 . d_2\, \sigma(t) . \int_0^\infty e^{-\gamma u^2}\, du < +\infty .$$

Posons, pour tout nombre réel positif x :

$$A = \{\omega : \sup_{x \in K} X(\omega, s) \geq x + 16\sqrt{N} . F_\sigma(D(K))\} . \tag{3}$$

Nous établirons dans un premier temps la majoration suivante :

$$P(A) \leq c_1 \int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \tag{4}$$

où $c_1 > 0$ est une constante indépendante de x .

Posons pour tout entier $n > 0$:

$$\varepsilon_n = D(K) \exp(-2^n + 1) \tag{5}$$

$$x_n = 16 d_1 \sqrt{N} (\sqrt{2} - 1)\, 2^{\frac{n-1}{2}} \sigma(\varepsilon_{n-1})$$

et soit $\{t_i^n , 1 \leq i \leq N(K, \varepsilon_n)\}$ une suite de points dans K , telle que la famille des boules $\{B_{\|.\|}(t_i^n, \varepsilon_n) ; 1 \leq i \leq N(K, \varepsilon_n)\}$ constitue un recouvrement minimal de K .

Posons successivement :

$$A^* = \{\omega : \underset{x \in K}{\operatorname{Sup}} X(\omega, s) > x + \sum_{k=1}^{\infty} x_k\} \tag{6}$$

$$A_{n,i}^m = \{\omega : X(t_{i,}^m \omega) > x + \sum_{k=1}^{n} x_k\}$$

$$A_{\infty,i}^m = \{\omega : X(t_{i,}^m \omega) > x + \sum_{k=1}^{\infty} x_k\} .$$

$$A_n = \bigcup_{\substack{1 \leq m \leq n \\ 1 \leq i \leq N(K, \varepsilon_m)}} A_{n,i}^m \qquad A_n(\infty) = \bigcup_{\substack{1 \leq m \leq n \\ 1 \leq i \leq N(K, \varepsilon_m)}} A_{\infty,i}^m .$$

Les inclusions suivantes sont évidentes :

$$\forall\, n > 0 \ , \ \forall\, m > 0 \ , \ \forall\, i > 0 \ , \ 1 \leq m \leq n \ , \ 1 \leq i \leq N(K, \varepsilon_m)$$

$$\cdot\ A_n(\infty) \subset A_{n+1}(\infty) \subset A_{n+1}$$

$$\cdot\ A_{\infty,i}^n \subset A_{n,i}^m .$$

Puisque X est un processus gaussien séparable à covariance continue ; toute suite dénombrable dense dans K , en particulier la suite $T = \{t_i^m, m \geq 1, 1 \leq i \leq N(K, \varepsilon_m)\}$ constitue donc une suite séparante pour la restriction de X à K ; ainsi :

$$P(A^*) = \lim_{n \to \infty} P(A_n(\infty)) \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} P(A_n) . \tag{7}$$

D'autre part :

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq 16\, d_1 \sqrt{N} \int_0^{\infty} \sigma(D(K)\, e^{-u^2})\, du \leq 16 \sqrt{N}\, F_\sigma(D(K)) .$$

Cela implique à l'aide de (7) :

$$P(A) \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} P(A_n) \,. \tag{8}$$

Majorons à présent la quantité $P(A_n)$ pour tout entier n. Or :

$$P(A_n) = P(A_n \cap A_{n-1}^c) + P(A_n \cap A_{n-1}) \leq P(A_{n-1}) + P(A_n \cap A_{n-1}^c) \,.$$

Les ensembles A_{n-1}^c et $A_{n,i}^m$ étant tous disjoints lorsque $m \in [1,n[$ et $i \in [1,N(K,\varepsilon_m)]$, on en déduit :

$$A_n \cap A_{n-1}^c = \bigcup_{1 \leq i \leq N(K,\varepsilon_n)} A_{n,i}^n \cap A_{n-1}^c \,.$$

D'où :

$$P(A_n) \leq P(A_{n-1}) + \sum_{i=1}^{N(\varepsilon_n,K)} P(A_{n,i}^n \cap A_{n-1}^c) \,. \tag{9}$$

La construction de la suite T permet d'associer à tout point t_i^n, $i \in [1,N(K,\varepsilon_n)]$ un autre point noté $t_{j(i)}^{n-1}$ de T réalisant :

$$\|t_i^n - t_{j(i)}^{n-1}\| < \varepsilon_{n-1} \,. \tag{10}$$

On a alors les inclusions suivantes :

$$A_{n-1,j(i)}^{n-1} \subset A_{n-1}$$

$$A_{n,i}^n \cap A_{n-1}^c \subset A_{n,i}^n \cap (A_{n-1,j(i)}^{n-1})^c \,. \tag{11}$$

Fixons les indices n et i, et soit r_{ij} le coefficient de corrélation des variables gaussiennes $X(t_i^n)$ et $X(_{j(i)}^{n-1})$.

Les relations (1), (5) et (10) assurent :

$$r_{i,j} = 1-\tfrac{1}{2}\, E\{X(t_i^n) - X(t_{j(i)}^{n-1})\}^2 \geq 1-\tfrac{1}{2}\, d_1^2\sigma^2\,(\|t_i^n - t_{j(i)}^{n-1}\|)$$

$$\geq 1-\tfrac{1}{2}\, d_1^2\sigma^2\,(\varepsilon_{n-1})$$

$$\geq 1-\tfrac{1}{2}\, d_1^2\sigma^2\,(D(K)) \geq \tfrac{1}{2}\ .$$

Il existe deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites et indépendantes , ξ et η , telles que :

$$X(t_i^n) = \xi \qquad\qquad X(t_{j(i)}^{n-1}) = r_{i,j}\,\xi + \sqrt{1-r_{i,j}^2}\;\eta\ .$$

Nous en déduisons :

$$P(A_{n,i}^n \cap (A_{n-1,j(i)}^{n-1})^c) = P\{X(t_i^n) > x + \sum_{k=1}^{n} x_k\ ,\ X(t_{j(i)}^{n-1}) \leq x + \sum_{k=1}^{n-1} x_k\}$$

$$\leq P\{\xi > x\}.P\left\{\eta \geq \frac{x_n . r_{i,j}}{\sqrt{1-r_{i,j}^2}} - \frac{(1-r_{i,j}).(x + \sum_{k=1}^{n-1} x_k)}{\sqrt{1-r_{i,j}^2}}\right\}. \qquad (12)$$

Or :

$$\frac{x_n\, r_{i,j}}{\sqrt{1-r_{i,j}^2}} \geq \frac{1}{2}\,\frac{x_n}{\sqrt{2}\,\sqrt{1-r_{i,j}}} \geq \frac{16\, d_1 \sqrt{N}(\sqrt{2}-1)2^{\frac{n-1}{2}}\ \sigma(\varepsilon_{n-1})}{2\, d_1 \sigma\,(\varepsilon_{n-1})} \qquad (13)$$

$$\geq 8\sqrt{N}(\sqrt{2}-1)2^{\frac{n-1}{2}}\ .$$

D'autre part, en vertu de (1) et (5) :

$$\frac{1-r_{i,j}}{\sqrt{1-r_{i,j}^2}}.x = \sqrt{\frac{1-r_{i,j}}{1+r_{i,j}}}.x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\, d_1\, \sigma(\varepsilon_{n-1}).x$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\, d_1\, \sigma(D(K))x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\ . \qquad (14)$$

Finalement les relations (13) et (14) assurent :

$$\sqrt{\frac{1-r_{i,j}}{1+r_{i,j}}} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} x_k \leq 8\sqrt{N}\,F_\sigma(D(K)) \leq (8\sqrt{N}.d_2 . \int_0^\infty e^{-\gamma . u^2} du)\, d_1\, \sigma\,(D(K))$$

$$\leq (8\sqrt{N}.d_2 \int_0^\infty e^{-\gamma u^2} du)\, \bar{x}^1 \leq 8\sqrt{N}\,d_2 . \int_0^\infty e^{-\gamma u^2} du = C \qquad (15)$$

et :

$$P\{\eta \geq \frac{r_{i,j}}{\sqrt{1-r_{i,j}^2}} . x_n - \frac{1-r_{i,j}}{\sqrt{1-r_{i,j}^2}} . (x + \sum_{k=1}^{n-1} x_k)\}$$

$$\leq P\{\eta \geq 8\sqrt{N}\,(\sqrt{2}-1)\, 2^{\frac{n-1}{2}} - C\} = p_n \, . \qquad (16)$$

Ceci étant vérifié pour tout entier $i \in [1, N(K,\varepsilon_n)]$, on en déduit :

$$P(A_n) \leq P(A_{n-1}) + P(\xi > x).N(\varepsilon_n, K).p_n \, . \qquad (17)$$

<u>Remarque</u> : Soient $\mathbb{R}^N$ muni de la topologie usuelle, et K un compact de $\mathbb{R}^N$ de diamètre $D(K)$, soit aussi M un nombre strictement positif. Il est évident que le nombre de boules de rayon $\frac{D(K)}{M}$ nécessaire pour recouvrir K ne saurait dépasser la qualité M^N , par conséquent :

$$N(K, \frac{D(K)}{M}) \leq M^N \, . \qquad (18)$$

Nous déduisons à l'aide de (18) :

$$p_n N(K,\varepsilon_n) \leq O(1).\bar{2}^{(\frac{n-1}{2})} \exp(-N.2^n) \, . \qquad (19)$$

La série de terme général $p_n . N(K,\varepsilon_n)$ est alors convergente. Soit c_1 sa somme. On a montré :

$$\forall\, n \geq 1 \quad P(A_n) \leq c_1 . \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} . \frac{du}{\sqrt{2\pi}}$$

ce qui prouve (4) en tenant compte de (8).

Nous allons maintenant étendre ce résultat à S. Posons pour tout réel $x > 0$:

$$\varepsilon(x) = \tfrac{1}{2}\,\bar{\sigma}^{1}\left(\frac{1}{d_1 x}\right).$$

Soit $\{t_i, 1 \le i \le N(S,\varepsilon(x))\}$ une suite de points dans S telle que la famille des boules $\{B(t_i,\varepsilon(x)),\ 1 \le i \le N(S,\varepsilon(x))\}$ constitue un recouvrement de S.

Posons pour tout entier $i \in [1, N(S,\varepsilon(x))]$

$$K_i = \{s \in S : \|s - t_i\| \le \varepsilon(x)\}. \tag{20}$$

Puisque de toute évidence :

$$D(K_i) \le 2\,\varepsilon(x),$$

nous obtenons :

$$d_1\,\sigma(D(K_i)).x \le d_1\,\sigma(2\,\varepsilon(x)).\,x \le d_1\,\sigma(\bar{\sigma}^{1}\left(\frac{1}{d_1 x}\right)).x \le 1. \tag{21}$$

En outre :

$$P\{\sup_{s \in S} X(s) > x + 16\sqrt{N}\,d_1 \int_0^{\infty} \sigma(2\,\varepsilon(x).\bar{e}^{u^2})\,du\}.$$

$$\le \sum_{i=1}^{N(S,\varepsilon(x))} P\{\sup_{S \in K_i} X(s) > x + 16\sqrt{N}\,d_1 \int_0^{\infty} \sigma(2\,\varepsilon(x).\bar{e}^{u^2})\,du\}. \tag{22}$$

Il suffit alors d'appliquer (4) à chaque terme de la sommation de droite pour obtenir :

$$P\{\sup_{s \in S} X(s) > x + 16\sqrt{N}\,d_1 \int_0^{\infty} \sigma(2\,\varepsilon(x).\bar{e}^{u^2})\,du\}$$

$$\le c_1 N(S,\varepsilon(x)). \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \tag{23}$$

Posons maintenant :

$$y(x) = x + 16\sqrt{N}\, d_1 . \int_0^\infty \sigma(2.\varepsilon(x).\bar{e}^{u^2})du$$

$$c_2 = 16\sqrt{N}.d_2 \int_0^\infty \bar{e}^{\gamma u^2}.du \; .$$

On constate aisément que :

$$1 \leq x \leq y(x) \leq x + c_2.d_1\, \sigma(2\,\varepsilon(x)) \leq x + \frac{c_2 d_1}{d_1 x} \leq x + c_2 \; .$$

Ainsi :

$$y(x) \sim x \qquad (x \to \infty) \; ,$$

d'où par continuité et monotonie de σ au voisinage de l'origine :

$$\varepsilon(y(x)) \sim \varepsilon(x) \qquad (x \to \infty) \; ,$$

et à fortiori :

$$N(S,\varepsilon(y(x))) \sim N(S,\varepsilon(x)) \qquad (x \to \infty) \; .$$

On peut donc déterminer une constante $c_3 > 0$ indépendante de S et x telle que :

$$P\{\sup_{s \in S} X(s) > y\} \leq c_3\, N(S,\varepsilon(y)).\int_y^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \; .$$

LEMME 1.4.2.- (de minoration) - <u>Soient</u> S <u>une partie bornée de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>et</u> $X = X(s)$, $s \in S$ <u>un processus gaussien centré séparable de variance égale à</u> 1 . <u>Supposons que</u> X <u>vérifie les conditions suivantes</u> :

1. il existe une fonction non décroissante continue σ est une constante $\theta > 0$, telles que :

$$\forall\, s,t \in S \;, \; E\{X(s) - X(t)\}^2 \geq \theta^2 \sigma^2(\|s - t\|)$$

2. il existe deux constantes strictement positives c_1 et γ telles que :

$$\forall\ t \geq 1\ ,\ \forall\ x>0\ ,\ \frac{\sigma(tx)}{\sigma(x)} \geq c_1 . t^{\gamma}\ .$$

Alors pour tout nombre réel $\nu \in]0,1]$; il existe une constante $c_2 > 0$, dépendant de ν , telle que :

$$P\{\operatorname*{Sup}_{j=1}^{m(\varepsilon)} X(t_j) \geq x\} \geq (1-\nu).m(\varepsilon) \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}}$$

où $\varepsilon = \sigma^{-1}\left(\frac{c_2}{\theta x}\right)$ et $\{t_j\ ,\ 1 \leq j \leq m(\varepsilon)\}$ est un ensemble fini quelconque de points de S réalisant : $\forall\ i \neq j\ ,\ \|t_i - t_j\| \geq \varepsilon$.

<u>Démonstration</u> : Notons A_j l'événement $\{X(t_j) > x\}$, $j = 1,2,\ldots,m(\varepsilon)$.

Nous obtenons en appliquant l'inégalité de Poincaré :

$$P\{\bigcup_{j=1}^{m(\varepsilon)} A_j\} \geq \sum_{j=1}^{m(\varepsilon)} P(A_j) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m(\varepsilon)} P(A_i \cap A_j)\ . \tag{1}$$

Soit pour tout entier $j \in [1,m(\varepsilon)]$ et pour tout $k \geq 1$:

$$B_j(k) = \{i \in [1,m(\varepsilon)]\ :\ k\varepsilon \leq \|t_i - t_j\| \leq (k+1)\varepsilon\}\ .$$

Puisque S est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$, les index $B_j(k)$ sont tous vides dès que k est suffisamment grand, ceci indépendamment de j . On vérifie aisément l'égalité suivante :

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m(\varepsilon)} P(A_i \cap A_j) = \sum_{j=1}^{m(\varepsilon)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i \in B_j(k)} P(A_i \cap A_j)\ . \tag{2}$$

Fixons les entiers j , et k et soit $i \in B_j(k)$; posons alors :

$$\rho_{i,j} = E\{X(t_i).X(t_j)\} = 1 - \tfrac{1}{2}\, E\{X(t_i).X(t_j)\}^2\ .$$

Le lemme (1.3.2) fournit l'inégalité :

$$P(A_i \cap A_j) \le d_1 . \exp(-d_1(1-p_{i,j})x^2) . P(A_j) \ , \ d_1 > 0 \ , \ d_2 > 0 \ . \qquad (3)$$

Si $\varepsilon = \varepsilon(x) = \bar{\sigma}^1 (\frac{c_2}{\theta x})$ où $c_2 > 0$ est une constante qui sera déterminée par la suite, nous déduisons des hypothèses (1) et (2) du lemme (1.4.2) :

$$\begin{aligned} 1 - p_{i,j} &= 1 - (1 - \tfrac{1}{2} E\{X(t_i) - X(t_j)\}^2) \\ &\ge \frac{\theta^2}{2} \sigma^2 (\|t_i - t_j\|) \ge \frac{\theta^2}{2} \sigma^2 (k\varepsilon) \\ &\ge \frac{1}{2} (\frac{c_1 . c_2 . k^\gamma}{x})^2 \ . \end{aligned} \qquad (4)$$

Les inégalités (3) et (4) impliquent donc :

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \ne j}}^{m(\varepsilon)} P(A_i \cap A_j) \le d_1 (\sum_{j=1}^{m(\varepsilon)} P(A_j)) \sum_{k=1}^{\infty} (\sup_{j=1}^{m(\varepsilon)} \# B_j(k)) . \bar{e}^{d_2 \bar{2}^1 (c_1 c_2 k^\gamma)^2} \ . \qquad (5)$$

Considérons à présent un recouvrement de la boule $B(t_j, (k+1)\varepsilon)$ par des boules de rayon $\frac{\varepsilon(x)}{2}$.

Il est facile de remarquer que le cardinal de ce recouvrement ne saurait être supérieur à la quantité $[4(k+1)]^n$.

On remarque facilement à l'aide de l'inégalité triangulaire que chacune des boules formant le recouvrement considéré ne contiendra au plus qu'un point t_i tel que i appartienne à l'index $B_j(k)$. On en déduit donc :

$$\forall \ j \in [1, m(\varepsilon)] \ , \ \forall \ k \ge 1 \ , \ \# \ B_j(k) \le [4(k+1)]^n \ . \qquad (6)$$

Combinant les relations (5) et (6) nous obtenons l'estimation :

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m(\varepsilon)} P(A_i \cap A_j) \leq (d_1 4^n \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^n . e^{-\frac{d_2}{2} . (c_1 . c_2 k^\gamma)^2}) . \sum_{j=1}^{m(\varepsilon)} P(A_j) . \quad (7)$$

Soit $\nu \in]0,1]$, et choisissons c_2 en fonction de ν afin que :

$$d_1 . 4^n . \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^n e^{\frac{d_2}{2} (c_1 . c_2 . k^\gamma)^2} < \nu . \qquad (8)$$

Nous concluons à l'aide des relations (1), (2), (7) et (8) :

$$P\{ \bigcup_{j=1}^{m(\varepsilon)} A_j \} \geq (1-\nu) m(\varepsilon) . \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} . \qquad (9)$$

I.5 - EVALUATIONS DE L'ECART ASSOCIE AU PROCESSUS NORMALISE :

Soit $X = X(t)$, $t \in T$ un processus gaussien centré, défini sur T , de covariance Γ_X . Nous notons $\Delta(T)$ la diagonale de $T \times T$. L'écart d déterminé par X sur T est défini par :

$$\forall (s,t) \in T \times T , d^2(s,t) = E\{X(s) - X(t)\}^2 = \Gamma_X(s,s) + \Gamma_X(t,t) - 2\Gamma_X(s,t) . \qquad (1)$$

On constate facilement à l'aide de l'inégalité de Minkowski que d vérifie l'inégalité triangulaire. Cependant d ne définit pas une distance sur T , car si l'implication :

$$\forall (s,t) \in T \times T \quad , \quad (s = t) \quad \Rightarrow \quad (d(s,t) = 0)$$

est trivialement vérifiée, la réciproque est fausse en général.

Introduisons donc le sous-ensemble de $T \times T$, D défini par :

$$D = \{(u,v) \in T \times T : d(u,v) = 0\} .$$

Nous définissons alors le processus normalisé $\tilde{X}$ associé à X en posant :

$$\forall\ (s,t) \in T \times T\ ,\ \tilde{X}(s,t) = \frac{X(s) - X(t)}{d(s,t)} \cdot I_{T \times T \setminus D}(s,t)\ .$$

L'étude des classes uniformes fait intervenir directement le processus $\tilde{X}$ et plus exactement l'écart $\tilde{d}$ qu'il détermine sur $T \times T$. Nous savons le majorer en toute généralité. Nous verrons par contre qu'il sera nécessaire d'ajouter quelques hypothèses supplémentaires sur la régularité de d pour obtenir une minoration correcte de $\tilde{d}$.

Soient (s,t), (s',t') un couple déléments de $T \times T \setminus D$; un calcul simple montre :

$$\tilde{d}^2\,(s,t)\,,\,(s',t')) = \frac{2(d(s,t) - d(s',t') - 2\,E\,\{(X(s) - X(t))\,(X(s') - X(t'))\}}{d(s,t).d(s',t')} \tag{2}$$

ou encore à l'aide de (1) :

$$\tilde{d}^2\,(s,t)\,,\,(s',t')) = \frac{d^2(s,s') + d^2(t,t')}{d(s,t).d(s',t')} \tag{3}$$

$$+ \frac{d^2(s,t) + d^2(s',t') - d^2(s,t') - d^2(s',t) - (d(s,t) - d(s',t'))^2}{d(s,t).d(s',t')}$$

De l'égalité (2) nous déduisons facilement la majoration suivante :

$$\tilde{d}((s,t)\,,\,(s',t') \le \sqrt{2\,.\,\frac{d^2(s,s') + d^2(t,t')}{d(s,t)\,.\,d(s',t')}}\ . \tag{4}$$

Il suffit pour cela de remarquer que :

$$-2\,E\{(X(s)-X(t)).(X(s')-X(t'))\} = E\{X(s)-X(s')+X(t)-X(t')\}^2 - d^2(s,t) - d^2(s',t')$$

$$\le 2(d^2(s,s')+d^2(t,t')) - d^2(s,t) - d^2(s',t')\ .$$

Le lemme suivant montre que dans certains cas particuliers cette majoration ne déforme pas trop la réalité :

LEMME 1.5.1.- Soient $X = X(t)$, $t \in [0,1]$, un processus gaussien stationnaire centré ; $d^2(s,t) = d^2(|s-t|)$ la variance de ses accroissements. On suppose que d vérifie les conditions suivantes :

1. il existe un nombre $x_o > 0$, tel que d^2 soit une fonction concave non décroissante sur l'intervalle $[0,x_o]$.

2. d est une fonction à croissance faiblement régulière d'exposant $\gamma > 0$, sur l'intervalle $]0,x_o]$.

Dans ces conditions, il existe un nombre réel $c > 0$, dépendant de x_o et α, tel que pour tout couple (s,t), (s',t') d'éléments de $[0,1]\times[0,1]$ vérifiant :

3.

$$s \geq t\,,\ s' \geq t'\,, \qquad |s-t| \vee |s'-t'| \leq x_o\,, \qquad |s-s'| \vee |t-t'| \leq c(|s-t| \wedge |s'-t'|)$$

on ait :

$$\tilde{d}(s,t),(s',t') \geq 2^{-\frac{1}{4}}\ \frac{d(\sqrt{|s-s'|^2+|t-t'|^2})}{\sqrt{d(|s-t|).d(s'-t')}}\,.$$

Démonstration :

Posons :

$$A = (d(s-t) - d(s'-t'))^2$$

$$B = d^2(s-t) + d^2(s'-t') - d^2(|s-t'|) - d^2(|t-s'|)\,.$$

En vertu de l'égalité 3. nous avons :

$$\tilde{d}^2(s,t),(s',t')) = \frac{d^2(|s-s'|)+d^2(|t-t'|)-A+B}{d(s-t).d(s'-t').}\,.$$

Majorons tout d'abord l'expression A. Elle est symétrique en $(s-t)$ et $(s'-t')$. Nous pouvons donc supposer, sans restriction :

$$s-t > s'-t' .$$

Alors, par concavité de la fonction d^2 :

$$d^2(s-t) \leq d^2(s'-t') + d^2((s-t)-(s'-t')) .$$

D'où :

$$A \leq d^2(s'-t').\left(\sqrt{1 + \frac{d^2(s-t)-(s'-t'))}{d^2(s'-t')}} - 1\right)^2 . \qquad (1)$$

Puisque d est à croissance faiblement régulière d'exposant $\gamma > 0$, nous pouvons associer à tout nombre γ_1, $0 < \gamma_1 < \gamma$, une constante $c_1 > 0$, de façon à obtenir en vertu de la proposition (1.1.5) :

$$\forall\, u \in [0,1] , \forall\, t \in]0,x_o] , \frac{d(tu)}{d(t)} \leq c_1 u^{\gamma_1} . \qquad (2)$$

Fixons γ_1 arbitrairement choisi dans l'intervalle $]0,\gamma[$, et choisissons $c > 0$ vérifiant :

$$c_1(2c)^{\gamma_1} \leq (2\sqrt{2}.c_1 2^{\frac{\gamma_1}{2}})^{-1} = \alpha . \qquad (3)$$

Les couples (s,t) et (s',t') vérifiant l'hypothèse 3. du lemme, on déduit donc :

$$\frac{d^2((s-t)-(s'-t'))}{d^2(s'-t')} \leq c_1 \left(\frac{(s-t)-(s'-t')}{s'-t'}\right)^{\gamma_1}$$

$$\leq c_1(2c)^{\gamma_1} \leq \alpha .$$

Mais puisque : $(\sqrt{1+y}-1)^2 \leq \alpha y$ lorsque $y \in [0,\alpha]$;

on obtient finalement la majoration :

$$A \leq \alpha\, d^2((s-t)-(s'-t')) \leq \alpha\, d^2(\sqrt{2[(s-s')^2 + (t-t')^2]})$$

$$\leq \alpha c_1 . 2^{\frac{\gamma_1}{2}} d^2(\sqrt{(s-s')^2+(t-t')^2})$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} . d^2(\sqrt{|s-s'|^2+|t-t'|^2}) . \tag{4}$$

Estimons à présent la quantité B et posons à cet effet

$$a = s-t \qquad b = s'-t' \qquad c = s-t' \qquad f = s'-t .$$

Nous pouvons, ici aussi, supposer sans faire de restriction que : $s-t \geq s'-t'$, ce qui se traduit par :

$$a \geq b \qquad a-c = f-b . \tag{5}$$

Si $f = a \vee b \vee c$, c'est-à-dire si : $c \leq b \leq a \leq f$, nous déduisons de la fonction d^2

$$d^2(b) - d^2(c) \geq d^2(f) - d^2(a) ,$$

d'où :

$$B \geq 0 .$$

De même si $c = a \vee b \vee f$ ou encore $f \leq b \leq a \leq c$; nous avons alors :

$$d^2(b) - d^2(f) \geq d^2(c) - d^2(a)$$

et :

$$B \geq 0 .$$

Enfin, si $b = a \vee c \vee f$, nous déduisons de (5)

$$a = b = c = f \text{ et par conséquent } B = 0 .$$

Il nous reste à envisager le cas restant où $a = b \vee c \vee f$; or :

$$\begin{aligned} B &= d^2(a) + d^2(b) - d^2(c \vee f) - d^2(c \wedge f) \\ &= [d^2(a) - d^2(c \vee f)] - d^2(c \wedge f) + d^2(b) \\ &\geq - d^2(c \wedge f) + d^2(b) \end{aligned}$$

mais puisque : $b \leq c \wedge f \leq c \vee f \leq a$, nous déduisons de la concavité de d^2 :

$$d^2(c \wedge f) \leq d^2(b)+d^2(c \wedge f-b)$$

d'où :

$$B \geq - d^2(c \wedge f - b) \text{ .}$$

Nous remarquons par ailleurs à l'aide de (5) suivant que $c \wedge f$ est égal à c ou à f :

$$0 \leq c \wedge f - b \leq |a-c| \wedge |b-c|$$

finalement nous avons obtenu la minoration suivante pour B :

$$B \geq - d^2(|a-c| \wedge |b-c|) \text{ .} \tag{6}$$

Posons alors : $h_1 = |s-s'|$ $h_2 = |t-t'|$.

Les résultats précédents permettent d'écrire :

$$d(s-t).d(s'-t').\tilde{d}^2((s,t),(s',t') \geq d^2(h_1)+d^2(h_2)-d^2(h_1 \wedge h_2) - \frac{1}{2\sqrt{2}} d^2(\sqrt{h_1^2+h_2^2})$$

$$\geq d^2(\sqrt{h_1^2+h_2^2})\left\{\frac{d^2(h_1 \vee h_2)}{d^2(\sqrt{h_1^2+h_2^2})} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$$

or :

$$d^2(h_1 \vee h_2) = d^2\left(\frac{h_1 \vee h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

$$\geq \frac{h_1 \vee h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} d^2(\sqrt{h_1^2+h_2^2}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} d^2(\sqrt{h_1^2+h_2^2}) \text{ .}$$

En conclusion :

$$\tilde{d}^2((s,t),(s',t') \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d^2(\sqrt{|s-s'|^2+|t-t'|^2})}{d(s-t).d(s'-t').} \text{ .}$$

I.6 - ENONCE DES RESULTATS, UN LEMME DE REDUCTION :

Nous désignons par $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions $\varphi : R^+ \to R^+$ non décroissantes au voisinage de l'origine et telles que :

$$\overline{\lim_{t \downarrow 0}}\ \varphi(t) = +\infty .$$

Nous énonçons deux des théorèmes dus à N. Kôno, concernant les classes uniformes.

THEOREME 1.6.1.- Soient $X = X(t)$, $t \in [0,1]$, un processus gaussien centré à trajectoires continues, notons $\sigma_1^2(s,t) = E\{X(s)-X(t)\}^2$, $0 \le s,t \le 1$, l'écart associé à X. On suppose qu'il existe une fonction $\sigma :]0,1] \to R^+$ continue non décroissante à croissance régulière d'exposant $\alpha > 0$ et deux constantes c et C, $0 < c < C < +\infty$, telles que :

$$\forall\ (s,t) \in [0,1] \times [0,1]\ ,\ c\,\sigma(|s-t|) \le \sigma_1(s,t) \le C\,\sigma(|s-t|) \qquad (1)$$

Posons pour tout élément φ de $\mathcal{D}$:

$$I_u(\sigma,\varphi) = \int_{+0} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}}{\left[\bar{\sigma}^1\left(\frac{\sigma(t)}{\varphi(t)}\right)\right]^2 \varphi(t)}\, dt .$$

Dans ces conditions :

$$(I_u(\sigma,\varphi) < +\infty) \quad \Rightarrow \quad (\varphi \in \mathcal{U}_u(X)) .$$

THEOREME 1.6.2.- Soient $X = X(t)$, $t \in [0,1]$, un processus gaussien stationnaire centré à trajectoires continues ; notons $\sigma(s,t) = \sigma(|s-t|)$ la variance de ses accroissements. Nous supposons que : $\sigma : [0,1] \to R^+$ est une fonction continue à croissance faiblement régulière d'exposant $\alpha > 0$ sur $]0,1]$, et que σ^2 est concave sur un intervalle $[0,\delta]$, $\delta > 0$.

Soit φ un élément de $\mathcal{D}$; dans ces conditions :

$$(I_u(\sigma,\varphi) = +\infty) \quad \Rightarrow \quad (\varphi \in \mathcal{L}_u(X)) \ .$$

<u>Remarques</u> : La comparaison des énoncés (1.6.1) et (1.6.2) montre que lorsque X est un processus gaussien stationnaire centré à trajectoires continues et si de plus la variance de ses accroissements est assujettie aux conditions du théorème (1.6.2) , on obtient alors un bon critère intégral caractérisant ses classes uniformes. Dans ce cas les événements (0.2.2) satisfont à la loi 0-1 .

Nous retrouvons en outre, comme corollaire, les résultats de I. Pétrowski sur les classes uniformes du mouvement brownien dans $[0,1]$.

En effet, pour qu'un module $\varphi \in \mathcal{B}$, appartienne à $\mathcal{L}_u(W)$, il faut et il suffit que l'intégrale :

$$I_u(\sigma,\varphi) = \int_{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)} \cdot \varphi^3(t)}{t^2}\, dt$$

soit divergente.

De même lorsque : $\sigma(x) = x^{\alpha}$ $\quad 0<\alpha<\frac{1}{2}$, nous concluons de la même façon suivant que l'intégrale

$$I_u(\sigma,\varphi) = \int_{+0} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}}{t^2}\, (\varphi(t))^{\frac{2}{\alpha}-1}\, dt$$

est divergente ou convergente.

Enfin si : $\sigma(x) = x^{\alpha}.(\log \frac{1}{x})^{\beta}$, $0<\alpha<\frac{1}{2}$, $\beta \in \mathbb{R}$,

nous remarquons facilement :

$$(\beta \geq 0) \ ; \ 0<x<t<1 \ , \ t^{\alpha} \leq \frac{\sigma(tx)}{\sigma(x)} \leq t^{\alpha}\, 2^{\beta}$$

$$(\beta<0) \ ; \ 0<x<t<1 \ , \ t^{\alpha}\, 2^{-\beta} \leq \frac{\sigma(tx)}{\sigma(x)} \leq t^{\alpha} \ ,$$

ce qui nous permet de déduire, en donnant à t les valeurs :

$$(\varphi(x))^{-\frac{1}{\alpha}} \;,\; (2^{-\beta}\varphi(x))^{-\frac{1}{\alpha}} \quad \text{ou} \quad (2^{\beta}\varphi(x))^{-\frac{1}{\alpha}}$$

et tenant compte de : (*)

$$\forall\ \varepsilon > 0 \;, \qquad \varphi(x) = O(x^{-\varepsilon}) \qquad (x \to 0^+)$$

que :

$$\sigma^{-1}\left(\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}\right) \asymp x.(\varphi(x))^{-\frac{1}{\alpha}} \qquad (x \to 0^+) \;.$$

Cela montre donc, que les classes uniformes $\mathfrak{L}_u(x)$ et $\mathcal{U}_u(x)$ ne dépendent que du paramètre α, ainsi que l'avaient montré T. Sirao et H. Watanabé.

Plus précisément :

$$(\varphi \in \mathfrak{L}_u(X)) \Leftrightarrow \left(\int_{+0} \frac{(\varphi(t))^{\frac{2}{\alpha}-1} . e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}}{t^2}\, dt = +\infty\right).$$

Le lemme suivant permet de réduire la démonstration de chacun des deux théorèmes à un cas particulier que nous précisons.

LEMME 1.6.3.- Nous pouvons supposer pour démontrer les théorèmes (1.6.1) et (1.6.2) qu'il existe un nombre $t_0 > 0$ tel que :

$$\forall\ t \in]0, t_0 \wedge 1[\;,\; \sqrt{\log\frac{1}{t}} \le \varphi(t) \le \sqrt{3\log\frac{1}{t}} \;.$$

Démonstration : Posons pour tout $t \in]0,1[$:

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) \vee \sqrt{\log\frac{1}{t}}$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \wedge \sqrt{3\log\frac{1}{t}}$$

alors :

$$\sqrt{\log\frac{1}{t}} \le \varphi_2(t) \le \sqrt{3\log\frac{1}{t}} \;;\; \varphi_2(t) \le \varphi_1(t) \;. \tag{1}$$

(* c.f. Lemme 1.6.3).

Nous procédons en deux étapes :

1ère Etape : $(I_u(\sigma,\varphi) < +\infty)$.

Supposons que φ ne vérifie pas l'inégalité de gauche, nous pouvons donc construire par récurrence une suite numérique $(t_m)_{m\geq 1}$ décroissante telle que :

a) $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = 0$

b) $\forall\ m \geq 1\ ,\ \varphi(t_m) \leq \sqrt{\log \frac{1}{t_m}}$

c) $\varphi(t_1) > 1$,

par conséquent, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\int_{t_n}^{t_1} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}}{\left[\bar{\sigma}^1\left(\frac{\sigma(t)}{\varphi(t)}\right)\right]^2 \varphi(t)}\, dt \geq \int_{t_n}^{t_1} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}}{t^2\,\varphi(t)} \, .\, dt \geq \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t_n)}}{\varphi(t_n)} \, .\int_{t_n}^{t_1} \frac{dt}{t^2}$$

$$\geq \sqrt{\frac{t_n}{\log \frac{1}{t_n}}}\left(\frac{1}{t_n} - \frac{1}{t_1}\right)$$

d'où :

$$I_u(\sigma,\varphi) = +\infty\,,\ \text{ce qui est contradictoire.}$$

Etablissons à présent :

$$I_u(\sigma,\varphi_2) < +\infty$$

soit $\alpha_1 \in]\alpha,2\alpha[$, nous déduisons des propositions (1.1.4) et (1.1.5) qu'il existe une constante $c_1 > 0$ dépendant de α_1 et telle que :

$$\forall\ u\in[0,1]\ ,\ \forall\ t\in]0,\sigma(1)]\ ,\qquad \frac{\bar{\sigma}^1(tu)}{\bar{\sigma}^1(t)} \leq c_1 . u^{\alpha_1} .$$

Cette propriété nous permet d'obtenir la majoration :

$$I_u(\sigma, \sqrt{3 \log \tfrac{1}{t}}) \le c_1^{-2} \int_{+o} (3 \log \tfrac{1}{t})^{\alpha_1 - 1} \, t^{-\frac{1}{2}} \, dt < \infty \, .$$

Mais :

$$I_u(\sigma, \varphi_2) \le I_u(\sigma, \varphi) + (I_u(\sigma, \sqrt{3 \log \tfrac{1}{t}})$$

et par suite : $$I_u(\sigma, \varphi_2) < +\infty \, .$$

D'autre part, nous déduisons du calcul précédent :

$$\exists\, t_o > 0 \; : \; \forall\, t \in]0, t_o \wedge 1[\qquad \varphi_2(t) \le \varphi(t) \, . \tag{2}$$

Il suffit donc de démontrer le théorème (1.6.1) en substituant φ_2 à φ, car par définition de $\mathcal{U}_u(x)$, la relation (2) montre que :

$$(\varphi_2 \in \mathcal{U}_u(X)) \quad \Rightarrow \quad (\varphi \in \mathcal{U}_u(X)) \, .$$

<u>2e Etape</u> : $(I_u(\sigma, \varphi) = +\infty)$.

Supposons que φ ne vérifie pas l'inégalité de gauche ; le calcul fait auparavant établit alors :

$$I_u(\sigma, \varphi_1) = +\infty \, .$$

Posons successivement :

$$I^+ = \{t \in]0,1[\; : \; \varphi_1(t) \le \sqrt{3 \log \tfrac{1}{t}}\}$$

$$I^- = \{t \in]0,1[\; : \; \varphi_1(t) > \sqrt{3 \log \tfrac{1}{t}}\}$$

$$I_1 = \int_{I^+} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi_1^2(t)}}{\left[\bar{\sigma}^1\left(\frac{\sigma(t)}{\varphi_1(t)}\right)\right]^2 \varphi_1(t)} \, dt$$

$$I_2 = \int_{I^-} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi_1^2(t)}}{\left[\bar{\sigma}^1\left(\frac{\sigma(t)}{\varphi_1(t)}\right)\right]^2 \varphi_1(t)} \, dt$$

$$I_3 = \int_{I^-} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi_2^2(t)}}{\left[\bar{\sigma}^1\left(\frac{\sigma(t)}{\varphi_2(t)}\right)\right]^2 \varphi_2(t)} \, dt \, .$$

Les égalités suivantes se déduisent immédiatement :

$$I_u(\sigma,\varphi_1) = I_1 + I_2$$

$$I_u(\sigma,\varphi_2) = I_1 + I_3 \, . \tag{4}$$

Montrons la convergence de l'intégrale I_2 :

$$I_2 = \int_{I^-} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi_1^2(t)}}{\varphi_1(t)\left[\bar{\sigma}^1\left(\frac{\sigma(t)}{\varphi_1(t)}\right)\right]^2} \, dt \le \int_{I^-} \frac{1}{c_1^2} \frac{(\varphi_1(t))^{\alpha_1-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\varphi_1^2(t)}}{t^2} \, dt$$

$$\le \int_{I^-} \frac{1}{c_1^2} \left(3 \log \frac{1}{t}\right)^{\alpha_1-1} t^{-\frac{1}{2}} \, dt < +\infty \, . \tag{5}$$

(3), (4), (5), permettent donc d'obtenir :

$$I_u(\sigma,\varphi_2) = +\infty \, .$$

Il suffit donc de démontrer le théorème (1.6.2) en substituant φ_2 à φ, car alors, tenant compte du fait que :

$$1 > t > 0 \, , \quad \psi(t) = \sqrt{3 \log \frac{1}{t}}$$

appartient à $\mathcal{U}_u(X)$, on aura :

$$\varphi_1 \in \mathcal{L}_u(X)$$

et en conclusion : $\varphi \in \mathcal{L}_u(X)$, puisque $\varphi_1 \geq \varphi$.

I.7 - DEMONSTRATION DU THEOREME 1.6.1.

Nous posons pour tout entier $n > 0$:

$$S_n = \{(s,t) \in [0,1] \times [0,1] \; : \; \bar{2}^{(n+1)} \leq |s-t| \leq \bar{2}^n\} \qquad (1)$$

$$A_n = \{ \sup_{(s,t) \in S_n} \tilde{X}|s,t| > \varphi(\bar{2}^n)\}$$

$$d_n = \left(\frac{2C}{c}\right)^2 \frac{1}{\sigma^2(\bar{2}^{n-1})} .$$

Nous établissons tout d'abord une majoration de l'écart $\tilde{\sigma}_1$, associé au processus normalisé $\tilde{X}$, à partir de (I.5,(4)) ; soient $(s,t) \neq (s',t')$ deux éléments de S_n :

$$\tilde{\sigma}_1^2((s,t),(s',t')) \leq 2 \frac{\sigma_1^2(s,s') + \sigma_1^2(t,t')}{\sigma_1(s,t) \cdot \sigma_1(s',t')}$$

$$\leq d_n^2 \; \sigma^2(\sqrt{|s-s'|^2 + |t-t'|^2}) .$$

Posons alors avec les notations du lemme (1.4.1)

$$x = x_n = \varphi(\bar{2}^n) \qquad \varepsilon(x_n) = \tfrac{1}{2} \; \bar{\sigma}^1\left(\frac{\sigma(\bar{2}^{n-1})}{2C\,\varphi(\bar{2}^n)} \cdot c\right) \qquad (2)$$

Ce dernier nous permet d'établir :

$$P(A_n) \leq c_1 \cdot \left(\int_{\varphi(2^{-n})}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du\right) N\left(S_n, \varepsilon(x_n)\right) \tag{3}$$

où $c_1 > 0$ est une constante indépendante de n.

Nous constatons, par ailleurs, que le nombre de boules de rayon $\varepsilon(x_n)$ nécessaire pour recouvrir S_n, ne saurait être supérieur à la quantité :

$$\frac{2\sqrt{2} \cdot 2^{-n}}{\varepsilon^2(x_n)} .$$

Finalement :

$$P(A_n) \leq O(1) \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(2^{-n})} \cdot 2^{-n}}{\varphi(2^{-n})\left[\sigma^{-1}\left(\frac{\sigma(2^{-n-1})c}{2C\,\varphi(2^{-n})}\right)\right]^2} . \tag{4}$$

Or :

$$I_n = \int_{2^{-n}}^{2^{-n+1}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}}{\left[\sigma^{-1}\left(\frac{\sigma(t)}{\varphi(t)}\right)\right]^2 \varphi(t)}\, dt \geq \frac{2^{-n}\, e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(2^{-n})}}{\varphi(2^{-n})\left[\sigma^{-1}\left(\frac{\sigma(2^{-n+1})}{\varphi(2^{-n+1})}\right)\right]^2} . \tag{5}$$

Puisque par hypothèse, $I_u(\sigma,\varphi)$ est convergente, nous déduisons de (5) que la série de terme général I_n converge.

Par ailleurs, σ est à croissance régulière d'exposant $\alpha > 0$; soit $c_o > 0$ et notons $\sigma_{c_o}(x) = \sigma(c_o x)$; alors :

$$\sigma \asymp \sigma_{c_o} \quad \text{et} \quad \sigma_{c_o}^{-1} \asymp \sigma^{-1} .$$

Cette propriété nous permet d'établir :

$$\sigma^{-1}\left(\frac{\sigma(2^{-n-1})c}{2C\,\varphi(2^{-n})}\right) \asymp \sigma^{-1}\left(\frac{\sigma(2^{-n+1})}{\varphi(2^{-n+1})}\right) \quad (n \to \infty) \tag{6}$$

et par suite : $$\sum_n P(A_n) < +\infty$$

d'où en appliquant le lemme de Borel-Cantelli :

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0 .$$

Ce qui permet de conclure que φ appartient à $\mathcal{U}_u(X)$.

I.8 - DEMONSTRATION DU THEOREME 1.6.2.

Soient n un entier positif, δ un nombre réel strictement supérieur à 1, et $c \in]0, \frac{1}{2}[$, un nombre assujetti aux conditions fixées par le lemme (1.5.1) ; posons pour tout entier $k = 1,2,\ldots,k_n = \frac{1}{2}[\delta^n] - 2$

$$I^1_{n,k} = \{x : (2k-c)\bar{\delta}^n \leq x \leq 2k.\bar{\delta}^n\} \qquad (1)$$

$$I^2_{n,k} = \{x : (2k+1)\bar{\delta}^n \leq x \leq (2k+1+c)\bar{\delta}^n\}$$

$$B_{n,k} = I^2_{n,k} \times I^1_{n,k} .$$

Nous déduisons immédiatement du lemme (1.5.1) :

$$\forall\ (s,t), (s',t') \in B_{n,k}, \quad E\{\tilde{X}(s,t) - \tilde{X}(s',t')\}^2 \geq \bar{2}^{5/2} \frac{\sigma^2(\sqrt{|s-s'|^2+|t-t'|^2})}{\sigma^2(\bar{\delta}^n)} . \qquad (2)$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $\{(s_j,t_j),\ 1 \leq j \leq m(\varepsilon)\}$ une famille finie de points de $B_{n,k}$ réalisant :

$$\forall\ i,j = 1,2,\ldots,m(\varepsilon),\ i \neq j,\quad \sqrt{|s_i - s_j|^2 + |t_i - t_j|^2} \geq \varepsilon$$

et posons :

$$A_{n,k}(\varepsilon) = \{\operatorname*{Sup}_{j=1}^{m(\varepsilon)} \tilde{X}(s_j,t_j) > \varphi(\bar{\delta}^n)\}$$

Soit $\nu \in]0,1[$; les hypothèses faites sur σ ainsi que (2) nous permettent d'appliquer le lemme (1.4.2) ; il existe donc une constante $c_2 = c_2(\nu) > 0$, telle que si nous posons :

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_n^\nu = \bar{\sigma}^1 \left(\frac{c_2 . 2^{5/4}\, \sigma(\bar{\delta}^n)}{\varphi(\bar{\delta}^n)}\right)$$

$$A_{n,k}(\varepsilon) = A^\nu_{n,k}$$

nous ayons : $$P(A^\nu_{n,k}) \geq (1-\nu) m(\varepsilon^\nu_n) \,.\, \Phi \circ \varphi(\bar{\delta}^n) \tag{3}$$

et, tenant compte de :

$$m(\varepsilon_n^\nu) \sim \left[\frac{\bar{\delta}^n}{\bar{\sigma}^1\left(\dfrac{c_2 . 2^{5/4} . \sigma(\bar{\delta}^n)}{\varphi(\bar{\delta}^n)}\right)}\right]^2 \qquad n \to \infty$$

nous établissons

$$\forall\, n \geq 1 \;,\; \forall\, k = 1,2,\ldots,k_n \;,\quad P(A^\nu_{n,k}) \geq (1-\nu) c_3(n) \left[\frac{\bar{\delta}^n}{\bar{\sigma}^1\left(\dfrac{c_2 . 2^{5/4} . \sigma(\bar{\delta}^n)}{\varphi(\bar{\delta}^n)}\right)}\right]^2 . \Phi \circ \varphi(\bar{\delta}^n)$$

avec $\lim\limits_{n\to\infty} c_3(n) = 1$.

Mais par hypothèse, l'intégrale $I_u(\sigma,\varphi)$ est divergente ; nous concluons donc de la même façon qu'au paragraphe 7 (alinéa 6) :

$$\forall\, \nu \in]0,1[\;,\quad \sum_{n,k} P(A^\nu_{n,k}) = +\infty . \tag{4}$$

Notons à présent : $N_1 = \{h = (n,k)\ ,\ n \geq 1\ ,\ 1 \leq k \leq k_n\}$.

Nous mettons sur N_1 la relation d'ordre lexicographique :

$$\forall\ h = (n,k) \in N_1\ ,\ \forall\ h' = (n',k') \in N_1\ ,$$

$$(h' > h) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \text{ou bien} \quad n = n' \quad \text{et} \quad k' > k \\ \text{ou bien} \quad n' > n \end{pmatrix}$$

Posons successivement pour tout $h \in N_1$, $a > 1$, $h = (n,k)$:

$$L_h = I^1_{n,k} \cup I^2_{n,k}$$

$$B_h = I^2_{n,k} \times I^1_{n,k}$$

$$I^a_h = \{h' \in N_1\ ,\ h' = (n',k') : n+1 \leq n' \leq n + a \log n$$

$$\text{et} \quad L_h \cap L_{h'} \neq \emptyset\} .$$

R^ν_h est une partie finie de B_h , de cardinal $m(\varepsilon^\nu_n)$ vérifiant

$$\forall\ u,v \in R_h\ ,\ u \neq v\ ,\ \|u - v\| \geq \varepsilon^\nu_n$$

et posons pour tout élément u de A^ν_h

$$c^h_u = \{\tilde{X}(u) > \varphi(\bar{\delta}^n)\}$$

$$A^\nu_h = A^\nu_{n,k} = \{ \sup_{u \in R^\nu_h} \tilde{X}(u) > \varphi(\bar{\delta}^n)\}$$

Soient $h \in N_1$, $h' \in N_1$ tels que :

$$h' > h \quad \text{et} \quad h' \notin I^a_h\ ,\ h = (n,k)\ ,\ h' = (n',k') .$$

Si $n = n'$ et $k' > k$, alors $L_h \cap L_{h'} = \emptyset$ par construction de B_h .

D'où par concavité de σ^2 :

$$\forall\, u \in R_h^\nu \,,\ \forall\, u' \in R_{h'}^\nu \,,\ P(c_u^h \cap c_{u'}^{h'}) \le P(c_u^h) \cdot P(c_{u'}^{h'})$$

et :

$$P(A_h \cap A_{h'}) \le \sum_{u \in R_h^\nu, u' \in R_{h'}^\nu} P(c_u^h \cap c_{u'}^{h'})$$

$$\le P(A_h) \cdot P(A_{h'}) \,. \tag{5}$$

Sinon, $n' > n$, mais puisque $h' \notin I_h^a$, nous avons deux cas à envisager :

a) $L_h \cap L_{h'} = \emptyset$.

Nous sommes ramenés au cas précédent et nous concluons de la même façon qu'en (5).

b) $n' > n + a \log n$.

Considérons deux éléments $(s,t) \in B_h$ et $(s',t') \in B_{h'}$:

$$\gamma_{s',t'}^{s,t} = E\{\tilde{X}(s,t).\tilde{X}(s',t')\} = \frac{\sigma^2(|s'-t|) + \sigma^2(|s-t'|) - \sigma^2(|s-s'|) - \sigma^2(|t-t'|)}{2\sigma(|s-t|).\sigma(|s'-t'|)}$$

$$\le \frac{\sigma^2(|s-t| \wedge |s'-t'|)}{\sigma(|s-t|).\sigma(|s'-t'|)} \,. \tag{5'}$$

Mais par construction de B_h et B_h' :

$$\bar{\delta}^n \le |s-t| \le \bar{\delta}^n(1+2c) \ ; \ \bar{\delta}^{n'} \le |s'-t'| \le \bar{\delta}^{n'}(1+2c) \,. \tag{6}$$

Nous supposons :

$$a > 1 \ , \ \delta > 2 \ , \ n \ge 3 \,.$$

Nous déduisons de (6) :

$$|s'-t'| < |s-t|$$

d'où :
$$\gamma_{s',t'}^{s,t} \le \frac{\sigma(|s'-t'|)}{\sigma(|s-t|)} \le \frac{\sigma(2\,\bar{\delta}^{n'})}{\sigma(\bar{\delta}^{n})} .$$

Mais σ est à croissance faiblement régulière d'exposant $\alpha > 0$, donc en vertu de la proposition (1.1.5), il existe une constante $c_\alpha > 0$ telle que :

$$\frac{\sigma(2\,\bar{\delta}^{n'})}{\sigma(\bar{\delta}^{n})} \le c_\alpha\, \delta^{-\frac{\alpha}{2}(n'-n)}$$

et par suite en utilisant le lemme (1.6.3)

$$\gamma_{s',t'}^{s,t} . \varphi(\bar{\delta}^{n}) . \varphi(\bar{\delta}^{n'}) \le 3 \log \delta . c_\alpha\, \delta^{-\frac{\alpha}{2}(n'-n)} \sqrt{n\,n'} . \tag{7}$$

Posons :

$$f(n,n') = \delta^{-\frac{\alpha}{2}(n'-n)} . \sqrt{n\,n'}$$

$$c_4 = 3 \log \delta . c_\alpha$$

$$U_{n,n'} = \frac{n'}{n + a \log n} > 1 .$$

$$\frac{f(n,n')}{f(n,n+a\log n)} = \left(e^{-\frac{\alpha}{2}(\log\delta)\,U_{n,n'}} . e^{-\frac{\alpha}{2}\log\delta}\right)^{n + a \log n} \sqrt{U_{n,n'}}$$

$$\le \left(e^{-\frac{\alpha}{2}(\log\delta)\,U_{n,n'} - \frac{\alpha}{2}\log\delta} . \sqrt{U_{n,n'}}\right)^{n + a \log n}$$

$$\le \bar{\delta}^{\alpha\,(a \log n + n)} = c_5(n)$$

ainsi :
$$f(n,n') \le c_5(n) . f(n,n+a\log n) = c_6(n) \tag{8}$$

avec $\lim_{n\to\infty} c_6(n) = 0$.

Appliquons le lemme (1.3.3) :

$$\forall\, u \in R_h^\nu \,,\ \forall\, u' \in R_{h'}^\nu \,,\quad P(c_u^h \cap c_{u'}^{h'}) \le c_7(n)\, P(c_u^h) \,.\, P(c_{u'}^{h'})$$

avec $\lim_{n\to\infty} c_7(n) = 1$

$$P(A_h^\nu \cap A_{h'}^\nu) \le \sum_{u\in R_h^\nu,\, u'\in R_{h'}^\nu} P(c_u^h \cap c_{u'}^{h'})$$

$$\le c_7(n) \sum_{u\in R_h^\nu,\, u'\in R_{h'}^\nu} P(c_u^h) \,.\, P(c_{u'}^{h'})$$

$$\le \frac{c_7(n)}{(1-\nu)^2}\, P(A_h^\nu) \,.\, P(A_h^{\nu'}) \,.$$

Nous avons établi finalement :

$$P(A_h^\nu \cap A_{h'}^\nu) \le c_8(n,\nu) \,.\, P(A_h^\nu) \,.\, P(A_{h'}^\nu) \qquad (9)$$

avec $\lim_{n\to\infty} c_8(n,\nu) = (1-\nu)^{-2}$.

Supposons maintenant que : $h' \in I_h^a$, et soient $(s,t) \in B_h$, $(s',t') \in B_{h'}$

$$|s'-t'| \le (1+2c) \,.\, \bar{\delta}^{n'} \le 2\,\bar{\delta}^{n-1} < |s-t|$$

d'où , si δ est choisi suffisamment grand afin que :

$$c_\alpha \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{2}} < \frac{1}{2}$$

nous déduisons de (5') :

$$\gamma_{s',t'}^{s,t} = E\{\tilde{X}(s,t) \,.\, \tilde{X}(s',t')\} \le \frac{\sigma(|s'-t'|)}{\sigma(|s-t|)} \le c_\alpha \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{2}} < \tfrac{1}{2} \,. \qquad (10)$$

Examinons l'expression :

$$A = \sum_{h' \in I_h^a} P(A_h^\nu \cap A_{h'}^\nu) \le \sum_{h' \in I_h^a, s \in R_h^\nu, s' \in R_{h'}^\nu} P(c_s^h \cap c_{s'}^{h'}) \; . \qquad (11)$$

En vertu du lemme (1.3.2), il existe deux constantes $c_g > 0$ et $c_{10} > 0$ telles que :

$$P(c_s^h \cap c_{s'}^{h'}) \le c_g . e^{-c_{10}(1 - E\{\tilde{X}(s).\tilde{X}(s')\}).\varphi^2(\bar{\delta}^{n'})} . P(c_s^h)$$

$$\le c_g \; e^{-\frac{1}{2} c_{10} \varphi^2(\bar{\delta}^{n'})} . P(c_s^h) \; . \qquad (12)$$

Or : $$\varphi^2(\bar{\delta}^{n'}) \ge \varphi^2(\bar{\delta}^{n}) \ge n \log \delta \qquad (13)$$

$$m(\varepsilon_{n'}^\nu) \asymp \left\{ \frac{\bar{\delta}^{n'}}{\bar{\sigma}^1\left(\frac{\sigma(\bar{\delta}^{n'})}{\varphi(\bar{\delta}^{n'})}\right)} \right\}^2 .$$

La régularité de σ permet alors d'établir :

$$\exists\, c_{11} > 0 \; , \qquad m(\varepsilon_{n'}^\nu) = \# R_{h'}^\nu \le n^{c_{11}} \; . \qquad (14)$$

Nous remarquons que si $L_h \cap L_{h'} \ne \emptyset$ alors nécessairement :

$$L_{h'} \subset \left[\frac{2(k-1)-c}{\delta^n} \; , \; \frac{2(k+1)+1+c}{\delta^n} \right]$$

d'où si : $\mu_{n'} = \# \{h' = (n',k') : h' \in N_1 \text{ et } L_h \cap L_{h'} \ne \emptyset\}$

$$\mu_{n'} \le c_{12}\, \delta^{n'-n} \le c_{12}\, \delta^{a \log n} \qquad (c_{12} > 0) \; . \qquad (15)$$

Combinant les estimations (11) à (15), nous établissons :

$$A \le c_{13} \log n \, . \, \delta^{a \log n}\, n^{c_{11}}\, e^{-\frac{1}{2} c_{10} (\log \delta) n} . P(A_h) \; . \qquad (16)$$

Il nous reste à choisir δ suffisamment grand pour obtenir :

$$A = \sum_{h' \in I_h^a} P(A_h^\nu \cap A_{h'}^\nu) \leq P(A_h^\nu) \ . \tag{17}$$

Le lemme (1.2.1) permet de déduire des résultats (4), (9) et (17)

$$P(\overline{\lim_{\substack{h=(n,h)\to(\infty,\infty)\\ h\in N_1}}} A_h^\nu) \geq (1-\nu)^2 \tag{18}$$

finalement :

$$P\{\overline{\lim_{m\to\infty}} \ \overline{\lim_{\substack{h=(n,h)\to(\infty,\infty)\\ h\in N_1}}} A_h^{(\frac{1}{m})}\} = 1 \ . \tag{19}$$

Ce qui permet de conclure que φ appartient à $\mathfrak{L}_u(X)$.

CHAPITRE II

II.1 - INTRODUCTION :

Soit $X = X(t)$, $0 \leq t \leq 1$, un processus gaussien centré, séparable, stationnaire ; notons $d^2(s,t) = d^2(|s-t|)$, $0 \leq s,t \leq 1$, la variance de ses accroissements. Nous supposons que d est assujettie aux conditions suivantes :

(2.1.1) d est une fonction à croissance faiblement régulière d'exposant α sur un intervalle $]0,\delta]$, $\delta > 0$.

(2.1.2) d^2 est une fonction concave non décroissante sur l'intervalle $]0,\delta]$.

La comparaison des énoncés des théorèmes (1.6.1) et (1.6.2) permet de constater que lorsque l'exposant α est strictement positif ; on obtient un bon critère intégral d'appartenance aux classes $\mathcal{L}_u(X)$ et $\mathcal{U}_u(X)$; par contre si cette condition n'est pas vérifiée, on ne sait pas conclure. Les paragraphes 6 et 7 du chapitre précédent ont montré par ailleurs combien les hypothèses de régularité sur d sont indispensables ; par exemple pour appliquer les lemmes (1.4.1) et (1.4.2). Elles interviennent constamment au cours des démonstrations.

Or, concernant la classe uniforme $\mathcal{L}_u(X)$, c'est précisément le lemme (1.4.2) qui permet d'obtenir une condition d'appartenance sous forme intégrale. Il est donc vain d'espérer obtenir de cette façon toute extension de résultats à des processus gaussiens stationnaires un peu plus généraux.

Cependant, et ceci fait l'objet de ce chapitre, nous pouvons malgré tout obtenir des conditions d'appartenance à la classe $\mathcal{L}_u(X)$, pourvu que le processus X satisfasse à l'hypothèse (2.1.2) seulement.

Bien évidemment ces conditions sont plus faibles que celles que nous venons d'étudier. La démonstration de ces résultats repose sur deux lemmes : un lemme fonctionnel énonçant une condition simple permettant de comparer les distances associées à deux processus gaussiens normalisés donnés, et un lemme de comparaison des lois de ces processus : le lemme de Slépian.

II.2 - UN LEMME FONCTIONNEL :

Soient $\delta > 0$ et g une fonction sur $]0,\delta]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$; nous posons pour tous réels x,y ; $0 < x, y \leq \delta$:

$$I(g,x,y) = \frac{g^2(x+y) - g^2(x) + g^2(y)}{2\,g(x+y)\,.\,g(y)} \,.$$

Nous avons l'énoncé suivant :

LEMME 2.2.1.- <u>Soit</u> $f,h :]0,\delta] \to \mathbb{R}_*^+$, $\delta > 0$, <u>deux fonctions vérifiant les conditions suivantes</u> :

a) $\frac{f}{h}$ <u>est une fonction non croissante sur l'intervalle</u> $]0,\delta]$

b) f <u>est une fonction non décroissante sur l'intervalle</u> $]0,\delta]$.

<u>Alors, quels que soient les réels</u> x,y ; $0 < x \leq y$, $x+y \leq \delta$, <u>nous avons</u> :

c) $$I(h,x,y) \geq I(f,x,y) \,.$$

<u>Remarques</u> : On ne peut espérer obtenir un meilleur énoncé sans restreindre la généralité. Le lecteur se convaincra, au vu de la démonstration, qu'il est très facile de construire de nombreux exemples de fonctions f et h assujetties aux conditions a) et b) et pour lesquelles l'égalité c) est en défaut lorsque : $x > y > 0$.

Supposons que f^2 soit concave non décroissante sur l'intervalle

$[0,\delta]$, et posons $h(x) = \sqrt{x}$. Les fonctions f et h vérifient bien les conditions a) et b) ; nous en déduisons :

$$\forall\, x,y \in R \;,\; 0 < x \leq y \;,\; x+y \leq \delta \;; \qquad I(f,x,y) \leq \sqrt{\frac{y}{x+y}} \;.$$

<u>Démonstration</u> : Soient x et y deux nombres réels fixés vérifiant :

$$0 < x \leq y \quad , \quad x+y \leq \delta \;.$$

Posons :

$$f^2(x+y) = p\,h^2(x+y) \qquad f^2(y) = q\,h^2(y) \qquad f^2(x) = r\,h^2(x) \;.$$

L'hypothèse a) établit l'inégalité :

$$0 < p \leq q \leq r$$

et par substitution $I(f,x,y)$ s'écrit :

$$I(f,x,y) = \frac{p\,h^2(x+y) + q\,h^2(y) - r\,h^2(x)}{2\sqrt{p.q}\;h(x+y)\,.\,h(y)} \;.$$

Considérons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} J &= (I(f,x,y) - I(h,x,y))\,2\,h(x+y)\,.\,h(y) \\ &= p\,h^2(x+y) + q\,h^2(y) - r\,h^2(x) - \sqrt{pq}\,(h^2(x+y) - h^2(x) + h^2(y)) \;. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer : $J \leq 0$.

Or, en vertu de l'hypothèse b) :

$$q\,h^2(y) \leq p\,h^2(x+y) \;.$$

On en déduit :

$$J = -\sqrt{p}\,(\sqrt{q} - \sqrt{p})\,h^2\,(x+y) + \sqrt{q}\,(\sqrt{q} - \sqrt{p})\,h^2(y) + (\sqrt{pq} - r)\,h^2(x)$$

$$\leq -\sqrt{p}\,(\sqrt{q}-\sqrt{p})\,\frac{q}{p}\,h^2(y)+\sqrt{q}\,(\sqrt{q}-\sqrt{p})\,h^2(y)+(\sqrt{pq}-r)\,h^2(x)$$

$$\leq -\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\,(\sqrt{q}-\sqrt{p})^2\,h^2(y)-\sqrt{q}\,(\sqrt{q}-\sqrt{p})\,h^2(x)$$

puisque $r \geq q$; finalement :

$$J \leq 0$$

d'où le résultat.

II.3 - ENONCE DES RESULTATS, DEMONSTRATIONS :

THEOREME 2.3.1.- Soient $X = X(t)$, $0 \leq t \leq 1$ un processus gaussien stationnaire centré séparable, $d^2(s,t) = d^2(|s-t|)$ la variance de ses accroissements. On suppose que d^2 est une fonction non décroissante concave sur un intervalle $]0,\alpha]$, $\alpha > 0$, vérifiant les conditions suivantes :

1. il existe une fonction $h :]0,\alpha] \to \mathbb{R}_*^+$, concave non décroissante

telle que :

2. $\frac{d}{h}$ est une fonction non croissante sur l'intervalle $]0,\alpha]$

3. il existe deux constantes strictement positives c_1 et γ telles

que :

$$\forall\, t \geq 1 \ , \ \forall\, x > 0 \ , \qquad \frac{h(tx)}{h(x)} \geq c_1\, t^{\gamma} .$$

Posons pour tout élément φ de $\mathcal{D}$, (c.f. I.6) :

4. $\ell_1(h,\varphi) = \overline{\lim_{t \downarrow 0}}\ \exp(-\frac{1}{2}\varphi^2(t)) \cdot \left[\varphi(t) \cdot h^{-1}\left(\frac{h(t)}{\varphi(t)}\right)\right]^{-1} .$

Nous avons l'implication suivante :

$$(\ell_2(h,\varphi) = +\infty) \quad \Rightarrow \quad (\varphi \in \mathcal{L}_u(X)) .$$

COROLLAIRE 2.3.2.- Soient $X = X(t)$, $t \in [0,1]$ un processus gaussien stationnaire centré séparable ; $d^2(s,t) = d^2(|s-t|)$ la variance de ses accroissements.

Nous supposons que d^2 est une fonction concave non décroissante sur un intervalle $]0,\alpha]$, $\alpha > 0$.

Posons pour tout élément φ de $\mathcal{B}$:

$$5. \quad \ell_2(\varphi) = \overline{\lim_{t \downarrow 0}} \exp\left(-\frac{1}{2}\varphi^2(t)\right) . \varphi(t) . t^{-1} .$$

Nous avons l'implication suivante :

$$(\ell_2(\varphi) = +\infty) \quad \Rightarrow \quad (\varphi \in \mathcal{L}_u(X)) .$$

COROLLAIRE 2.3.3.- Si les limites $\ell_1(h,\varphi)$ et $\ell_2(\varphi)$ figurant dans les alinéas 4. et 5. existent et sont strictement positives, finies ou non, alors nous obtenons dans chaque cas énoncé :

$$6. \quad P\{ \overline{\lim_{\substack{|s-t| = h \to 0 \\ 0 \le s,t \le 1}}} \frac{X(s) - X(t)}{d(s,t)\varphi(|s-t|)} \ge 1\} = 1 .$$

COROLLAIRE 2.3.4.- Sous les hypothèses du corollaire (2.3.2) ; si de plus d est une fonction d'un des types suivants :

1. $d(x) = (\log \frac{1}{x})^{\gamma}$, $\gamma < 0$.

2. $d(x) = e^{-(\log \frac{1}{x})^{\beta}}$, $0 < \beta < 1$.

3. $d(x) = (\log \frac{1}{x})^{\gamma} (\log\log \frac{1}{x})^{\delta}$ $\gamma < 0$, $-\infty < \delta < +\infty$

posons alors :

$$\forall c \in R , \qquad \varphi_c(t) = \sqrt{2 \log \frac{1}{t} + c \log\log \frac{1}{t}} .$$

Dans ces conditions :

$$\forall\, c \in R\,, \qquad \varphi_c \in \mathcal{L}_u(X)\,.$$

Remarques : Lorsque $X = X(t)$, $t \in [0,1]$ est un processus gaussien stationnaire satisfaisant aux conditions (2.1.1) et (2.1.2) avec un exposant $\alpha > 0$ nous savons que les modules φ_c définis plus haut appartiennent à la classe $\mathcal{L}_u(X)$ si et seulement si c est strictement inférieur à $\frac{1}{\alpha}$. Le dernier corollaire met donc en relief la différenciation de composition de la classe uniforme $\mathcal{L}_u(X)$ suivant que $\alpha > 0$ ou $\alpha = 0$.

Le corollaire (2.3.2) laisse augurer le fait que dans la famille des processus gaussiens stationnaires déterminés au début de ce chapitre, le mouvement brownien apparaît comme celui qui a les variations d'accroissements les plus faibles.

Démonstration du théorème 2.3.1. : Le théorème de Polya permet d'associer à h un processus gaussien stationnaire, centré, $H = H(t)$, $0 \leq t \leq 1$, admettant localement h^2 comme variance de ses accroissements.

Dans ces conditions soient r un entier supérieur à 1 , $c \in]0, \frac{1}{2}]$, $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite numérique vérifiant :

$$\forall\, n \geq 1\,, \qquad 0 < p_n < c.r^n\,.$$

Posons pour tout triplet d'entiers (n,k,i) , $n \geq 1$, $0 \leq k \leq r^n - 1$ et $0 \leq i \leq [\frac{c}{p_n r^n}]$, et tout F , F désignant X ou H :

$$s_{n,k} = (k+1)r^{-n} \qquad t_{n,k,i} = kr^{-n} + i\,p_n$$

$$S_{n,k} = \left\{(s_{n,k}, t_{n,k,i})\,,\ 0 \leq i \leq \left[\frac{c}{p_n r^n}\right]\right\}$$

$$A_{n,k}(F) = \{\exists\,(s,t) \in S_{n,k} : \tilde{F}(s,t) > \varphi((1-c)r^{-n})\}$$

$$S_n = \bigcup_{k=o}^{r^n-1} S_{n,k} \qquad A_n(F) = \bigcup_{k=o}^{r^n-1} A_{n,k}(F)$$

Soient (s,t) et s,t') deux éléments distincts de $S_{n,k}$, nous remarquons facilement :

$$E\{\tilde{X}(s,t).\tilde{X}(s,t')\} = I(d\ ,\ |t-t'|\ ,\ s-t\wedge t')$$

$$E\{\tilde{H}(s,t).\tilde{H}(s,t')\} = I(h\ ,\ |t-t'|\ ,\ s-t\wedge t')$$

en outre ,
$$|t-t'| \leq s-t\wedge t' .$$

Donc, en vertu des hypothèses du théorème, nous déduisons par application du lemme (2.2.1) :

$$\exists\, n_o > 0\ ,\ n_o = n_o(\alpha) : \forall\, n > n_o\ ,\ \forall\, k = 0,1,\ldots,r^n-1\ ,$$

$$\forall\,(s,t)\ ,\ (s,t') \in S_{n,k}\ ,\ (s,t) \neq (s,t')\ ,$$

$$E\{\tilde{X}(s,t).\tilde{X}(s,t')\} \leq E\{\tilde{H}(s,t).\tilde{H}(s,t')\} \tag{1}$$

$\forall\,(s,t) \in S_{n,k}$,
$$E\{\tilde{X}^2(s,t)\} = E\{\tilde{H}^2(s,t)\} = 1 . \tag{1'}$$

et à l'aide du lemme (1.3.1)

$$P(A_{n,k}(X)) \geq P(A_{n,k}(H)) \tag{2}$$

ceci, indépendamment des indices n et k .

Soient $n > n_o$, $k,k' \in [0,r^n-1]$, $k \neq k'$ et $(s,t) \in S_{n,k}$, $(s',t') \in S_{n,k'}$. Les intervalles $[t,s]$, $[t',s']$ sont donc disjoints ou conjoints, par suite :

$$E\{\tilde{X}(s,t).\tilde{X}(s',t')\} \leq 0$$

d'où, en vertu du lemme (1.3.1) :

$$P\{\widetilde{X}(s,t)>\varphi((1-c)\,\bar{r}^{n})\ ,\ \widetilde{X}(s',t')>\varphi((1-c)\,\bar{r}^{n})\}$$

$$\leq P\{\widetilde{X}(s,t)>\varphi((1-c)\,\bar{r}^{n})\}\,.\,P\{\widetilde{X}(s,t)>\varphi((1-c)\,\bar{r}^{n})\}\ . \tag{3}$$

Cela nous permet de déduire de la majoration suivante :

$$P(A_{n,k}(X)\cap A_{n,k'}(X))\leq \sum_{\begin{cases}(s,t)\in S_{n,k}\\ (s',t')\in S_{n,k'}\end{cases}} P\{\widetilde{X}(s,t)>\varphi((1-c).\bar{r}^{n}),\widetilde{X}(s',t')>\varphi((1-c)\bar{r}^{n})\}$$

$\forall\ n>n_o\ ,\ \forall\ k,k'=0,1,\ldots,r^{n}-1\ ,\ k\neq k'$;

$$P(A_{n,k}(X)\cap A_{n,k'}(X))\leq P(A_{n,k}(X))\,.\,P(A_{n,k'}(X))\ . \tag{4}$$

Fixons à présent deux éléments (s,t) et (s,t') de $S_{n,k}$ distincts ; nous avons :

$$E\{\widetilde{H}(s,t)-\widetilde{H}(s,t')\}^{2}=\frac{h^{2}(0)+h^{2}(|t'-t|)-[h(|s-t|)-h(|s-t'|)]^{2}}{h(|s-t|)\,.\,h(|s-t'|)}\ .$$

Nous pouvons supposer sans restriction :

$$t'\geq t$$

et par conséquent, utilisant la concavité de h^2 :

$$h^{2}(|s-t|)\leq h^{2}(s-t')+h^{2}(t'-t)\ .$$

d'où :

$$[h(s-t)-h(s-t')]^{2}\leq h^{2}(s-t')\Big[\sqrt{1+\frac{h^{2}(t'-t)}{h^{2}(s-t')}}-1\Big]^{2}.$$

Mais, $\qquad \forall\ y\in[0,1]\ ,\ \ (\sqrt{1+y}-1)^{2}\leq(1-\frac{1}{\sqrt{2}})y$

et, $$\frac{h^2(t'-t)}{h^2(s-t')} \leq 1 .$$

Nous avons donc établi :

$$[h^2(s-t)-h^2(s-t')]^2 \leq (1-\frac{1}{\sqrt{2}})\, h^2(t'-t)$$

et, par suite :

$$E\{\widetilde{H}(s,t)-\widetilde{H}(s,t')\}^2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \; \frac{h^2(|t-t'|)}{h(s-t) \,.\, h(s-t')}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2} \,.\, h^2(\bar{r}^n)} \,.\, h^2(|t-t'|) \,. \qquad (5)$$

avec $|t-t'| \geq p_n$.

Posons en conservant les notations du lemme (1.4.2) ; n étant fixé :

$$\theta^2 = \frac{1}{\sqrt{2}\; h^2(\bar{r}^n)} \qquad \sigma(x) = h(x) \qquad \nu = \tfrac{1}{2} \qquad c_2(\nu) = c_2$$

$$\varepsilon = p_n = \bar{h}^1 \left[\frac{c_2 . 2^{\frac{1}{4}} . h(\bar{r}^n)}{\varphi((1-c)\bar{r}^n)} \right] .$$

Nous établissons en appliquant ce lemme :

$$\forall\, n \geq n_o , \qquad \forall\, k = 0,1,\dots,r^n - 1$$

$$P(A_{n,k}(X)) \geq P(A_{n,k}(H)) \geq \tfrac{1}{2} \,.\, \left[\frac{c}{r^n\; \bar{h}^1 (\frac{c_2 . 2^{\frac{1}{4}} . h(\bar{r}^n)}{\varphi((1-c)\bar{r}^n)})} \right]^{\Phi \circ \varphi((1-c)\bar{r}^n)}$$

(6) .

or $h(\bar{r}^{n}) \leq \dfrac{h((1-c)\bar{r}^{n})}{1-c}$

et :

$$\bar{h}^{1}\left(\frac{c_2 . 2^{\frac{1}{4}} . h(\bar{r}^{n})}{\varphi((1-c)\bar{r}^{n})}\right) \leq \bar{h}^{1}\left(c_3 \frac{h((1-c)\bar{r}^{n})}{\varphi((1-c)\bar{r}^{n})}\right)$$

$$c_3 = c_2 . 2^{\frac{1}{4}} . (1-c)^{-1} .$$

Si $c_3 > 1$, soit alors y un nombre positif tel que :

$$y \geq \bar{h}^{1}\left(\frac{h((1-c)\bar{r}^{n})}{\varphi((1-c)\bar{r}^{n})}\right) = \bar{h}^{1}(u_n) ,$$

ainsi :

$$h(y) \geq u_n .$$

Choisissons t_o d'après la condition suivante :

$$t_o \geq \max\left(1 , \left(\frac{c_3}{c_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right) .$$

De ce fait :

$$h(t_o y) \geq c_1 t_o^{\gamma} h(y) \geq c_1 t_o^{\gamma} u_n \geq c_3 u_n ,$$

ou encore :

$$\bar{h}^{1}(c_3 u_n) \leq t_o y \quad , \; y \geq \bar{h}^{1}(u_n) .$$

Finalement :

$$\bar{h}^{1}(c_3 . u_n) \leq t_o . \bar{h}^{1}(u_n) . \tag{7}$$

Si $c_3 \leq 1$, la relation est trivialement vérifiée par suite de la croissance de h .

Nous concluons donc qu'il existe une constante $c_4 > 0$, indépendante des indices n et h telle que :

$$\forall\, n \geq n_o \;;\; \forall\, k = 0,1,\ldots,r^n - 1$$

$$P(A_{n,k}(X)) \geq c_4 . \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2((1-c)\bar{r}^n)}}{\varphi((1-c).\bar{r}^n).r^n.\bar{h}^1\left[\dfrac{h((1-c).\bar{r}^n)}{\varphi((1-c).\bar{r}^n)}\right]} \tag{8}$$

ce qui compte tenu de l'hypothèse faite sur φ , suffit à montrer

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=o}^{r^n-1} P(A_{n,k}(X)) = +\infty . \tag{9}$$

Les relations (4) et (9) ainsi que le corollaire (1.2.2) impliquent :

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n(X)) = 1$$

et à fortiori :

$$P\{\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n(X)\} = 1 . \tag{10}$$

Enfin pour tous entiers n,k,i , $n \geq 1$, $0 \leq k \leq r^n - 1$, $0 \leq i \leq [\frac{c}{p_n r^n}]$:

$$(1-c)\bar{r}^n \leq s_{n,k} - t_{n,k,i} \leq \bar{r}^n . \tag{11}$$

Les relations (10) et (11) permettent de conclure.

Le corollaire 2.3.2 se déduit immédiatement du théorème 2.3.1. Il suffit de remarquer que si σ^2 est concave, la fonction $\frac{\sigma(x)}{\sqrt{x}}$ est non croissante au voisinage de l'origine ; nous obtenons donc le résultat escompté en appliquant le théorème précédent, ayant posé à cet effet :

$$h(x) = \sqrt{x} .$$

En outre, concernant le corollaire 2.3.3, nous savons que l'événement figurant dans l'expression (6) satisfait la loi du $0-1$; et par conséquent il nous suffit de montrer :

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n(X)) > 0 .$$

C'est le cas lorsque $\ell_1(h,\varphi) > 0$ ou $\ell_2(\varphi) > 0$, en vertu du lemme (1.2.2).

Enfin, le corollaire (2.3.4) se déduit du théorème (2.3.1) en posant dans chaque cas :

$$h_\alpha(x) = x^\alpha \qquad 0 < \alpha < \tfrac{1}{2}$$

puisque la fonction $\frac{\sigma(x)}{h_\alpha(x)}$ est non décroissante pour tout α .

BIBLIOGRAPHIE

[1] Yu. K. BELYAEV [1961], "Continuity and Hölder conditions for sample functions of stationary Gaussian processes", Proc. 4 th. Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. 2, pp. 23-33.

[2] S.M. BERMAN [1962], "A law of large numbers for the maximum in a stationary Gaussian sequence", Ann. Math. Statist. 33, pp. 93.97.

[3] S.M. BERMAN [1970], "Gaussian processes with stationary increments : local times and sample functions properties", Ann. Math. Statist. 41 pp. 1260-1272.

[4] Z. CIESIELSKI [1961], "Hölder conditions for realizations of Gaussian processes", Trans. Amer. Math. Soc. 99 pp. 403-413.

[5] R.M. DUDLEY [1967], "The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes", J. Functional Analysis 1, pp. 290-330.

[6] X. FERNIQUE [1964], "Continuité des processus gaussiens", C.R Acad. Scienc. Paris 258, pp. 6058-6060.

[7] X. FERNIQUE [1970], "Intégrabilité des vecteurs gaussiens", C.R. Acad. Scienc. Paris 270 Sér. A pp. 1698-1699.

[8] X. FERNIQUE [1975], "Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes, Lectures Notes Springer.

[9] A. GARSIA, E. RODEMICH and H. RUMSEY Jr. [1970], "A real variable lemma and the continuity of paths of some Gaussian processes", Indiana Univ. Math. J. 20 pp. 565-578.

[10] G.A. HUNT [1951], "Random Fourier transforms", Trans. Amer. Math. Soc. 71, pp. 38-69.

[11] K. ITÔ and M. NISIO [1968], "On the oscillation functions of Gaussian processes", Math. Scand. 22, pp. 209-223.

[12] N.C. JAIN and G. KALLIANPUR [1970], "Norm convergent expansions for Gaussian processes in Banach spaces", Proc. Amer. Math. Soc. 25 pp. 890-895.

[13] J.P. KAHANE [1960], "Propriétés locales des fonctions à séries de Fourier aléatoires", Studia Math. 19, pp. 1-25.

[14] J. KARAMATA [1933], "Sur un mode de croissance régu-lière - théorèmes fondamentaux". Bulletin de la Soc. Math. de France 61, pp. 55-62.

[15] T. KAWADA [1969], "On the upper and lower class for Gaussian processes with several parameter", Nagoya Math. J. Vol. 35, pp. 109-132.

[16] N. KÔNO [1970], "On the modulus of continuity of sample functions of Gaussian processes", J. Math. Kyoto Univ. 10, pp. 493-536.

[17] N. KÔNO [1975], "Asymptotic Behaviour of Sample Functions of Gaussian Random Fields", (à paraître dans J. Math. Kyota Univ.).

[18] P. LEVY [1937], "Théorie de l'addition des variables aléatoires", (Paris, Gauthier-Villars).

[19] P. LEVY — [1965], "Processus stochastiques et mouvement brownien". (Paris, Gauthier-Villars).

[20] M.B. MARCUS — [1968], "Hölder conditions for Gaussian processes with stationary increments", Trans. Amer. Math. Soc. 134, pp. 29-52.

[21] M.B. MARCUS — [1970], "Hölder conditions for continuous Gaussian processes" Osuka J. Math. 7, pp. 483-494.

[22] M.B. MARCUS — [1971], Gaussian lacunary series and the modulus of continuity for Gaussian processes.

[23] M.B. MARCUS and L.A. SCHEPP — [1970], "Continuity of Gaussian processes", Trans. Amer. Math. Soc. 151, pp. 377-392.

[24] I. PETROWSKI — [1935], "Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungleichung", Compositio Math. 1, pp. 383-419.

[25] J. PICKANDS — [1967], "Maxima of stationary Gaussian processes", Z. Wahrscheinlichkeitsth. 7, pp. 190-223.

[26] C. PRESTON — [1972], "Continuity properties of some Gaussian processes", Amer. Math. Statist. 43 pp. 285-292.

[27] T. SIRAO — [1960], "On the continuity of Brownian motion with a multidimensional parameter", Nagoya Math. J. 16, pp. 135-136.

[28] T. Sirao and H. Watanabé — [1970], "On the upper and lower class of stationary Gaussian processes", Trans. Amer. Math. Soc. 147, pp. 301-331.

[29] T. SIRAO, K.L. CHUNG and P. ERDÖS [1959], "On the Lipschitz's condition for Brownian Motion", J. Math. Soc. Japan Vol. 11, n° 4, pp. 263-274.

[30] D. SLEPIAN [1962], "The one-sided barrier problem for Gaussian noise", Bell. syst. tech. Jour. 41, pp. 463-501.

[31] M. WEBER [1975], Minorations asymptotiques des trajectoires de fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires définies sur l'intervalle [0,1]. C.R. Acad. Scienc. Paris Sér. A., pp. 49-52.