

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Le dual de $H^1(\mathbb{R}^V)$: démonstrations probabilistes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 132-195

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__132_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE DUAL DE $\underline{H}^1(\mathbb{R}^V)$: DEMONSTRATIONS PROBABILISTES

par P.A. Meyer

Le séminaire de l'an dernier (volume X) contient quatre exposés consacrés à une démonstration probabiliste des inégalités de LITTLEWOOD PALEY dans $L^p(\mathbb{R}^V)$. Le travail qui suit en est le prolongement, puisqu'il s'agit d'étudier le cas limite où $p=1$. Notre but était de déduire le théorème de FEFERMAN-STEIN sur la dualité entre \underline{H}^1 et \underline{BMO} , ainsi que les résultats sur les transformées de RIESZ, de la forme probabiliste du théorème de FEFERMAN. Cela peut se faire, mais les démonstrations dépendent malheureusement beaucoup plus d'estimations faites à la main sur le noyau de POISSON que les démonstrations de la théorie de LITTLEWOOD-PALEY, et nous ne parvenons donc pas à dépasser le cas du mouvement brownien.

Les exposés avaient, dans leur première forme, une ambition beaucoup plus vaste : une étude probabiliste des principaux théorèmes sur les fonctions harmoniques dans le demi-espace. Je remercie vivement A. BERNARD d'avoir lu cette première rédaction, et de l'avoir critiquée, en me montrant à quel point certaines considérations parasites (concernant en particulier le retournement du temps) avaient obscurci le plan général de la démonstration. Les exposés ont été entièrement réécrits, et le retournement du temps (la "petite" et la "grande" version) a été entièrement rejeté en appendice. Quelques passages entre *...* dans le corps du texte sont inutiles pour la démonstration du théorème de dualité proprement dit, et peuvent être omis par les lecteurs pressés. Enfin, j'ai rejeté en fin d'exposé deux questions qui étaient mélangées au reste dans la première rédaction : la caractérisation de \underline{H}^1 au moyen des fonctions maximales, et la théorie probabiliste des transformations de RIESZ (où l'on se refuse l'outil des transformations de RIESZ dans l'étude de \underline{H}^1 , la règle du jeu consistant à déduire la théorie de RIESZ des théorèmes de martingales).

Il me paraît évident que ces exposés sont très loin d'épuiser la question, qui ne sera entièrement claire que lorsqu'on sera parvenu à une démonstration purement probabiliste. Les atomes eux mêmes sont encore trop liés à la structure de l'espace euclidien. Il me semble vaguement que l'avenir se trouve du côté des "fonctions spéciales" de NEVEU et de la théorie du potentiel récurrente, où interviennent aussi des estimations pour des fonctions d'intégrale nulle.

BIBLIOGRAPHIE

J'ai utilisé les articles ou livres suivants

- [S]. E.M. STEIN. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton 1970.
- [LP]. Exposés sur la théorie de Littlewood-Paley. Séminaire X.
- [RR]. H.M. REIMANN et T. RYCHENER. Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation. Lecture Notes in M. 487, 1975.
- [FS]. Ch. FEFFERMAN et E.M. STEIN . H^p spaces of several variables. Acta Math. 129, 1972, p. 137-193.
- [Str]. D.W. STROOCK. Applications of Fefferman-Stein type interpolation to probability theory and analysis. Comm. Pure Appl. M. 26, 1973.
- [SV]. D.W. STROOCK et S.R.S. VARADHAN. A probabilistic approach to $H^p(\mathbb{R}^d)$. Trans. Amer. Math. Soc. 192, 1974.
- [CW]. R.R. COIFMAN et G. WEISS. Extensions of Hardy spaces and their uses in analysis. A paraître.
- [G]. A.M. GARSIA. Martingale inequalities. Seminar notes on recent progress Benjamin, 1973.

Un point général de notation : on a fréquemment affaire dans les calculs à des « constantes dont la valeur importe peu, et qui peuvent changer de ligne en ligne » . Nous réserverons la lettre θ pour désigner de telles " constantes variables " . Le lecteur est donc prié de se rappeler que $0 < \theta < \infty$, mais que par ailleurs $\exp(\theta + 5\sqrt{\theta}) = \theta$, etc.

TABLE DES MATIERES

EXPOSE I. LES DEFINITIONS FONDAMENTALES

I. L'espace $\underline{\underline{BMO}}$ classique. Théorie élémentaire	135
II. Prolongements harmoniques	139
III. Interprétation probabiliste de $\underline{\underline{BMO}}$	143
IV. Transformations de RIESZ	148
V. L'espace $\underline{\underline{H}}_p^1$ probabiliste	152

EXPOSE II. LE THEOREME DE DUALITE

VI. Démonstration du théorème de dualité	158
VII. Définition de $\underline{\underline{H}}^1$ au moyen des fonctions maximales	167
VIII. Théorie probabiliste des transformées de RIESZ	169

EXPOSE III. APPENDICES DIVERS

App. 1. Retournement du temps pour le processus de CAUCHY ...	172
App. 2. Le demi-espace comme espace de MARTIN	176
App. 3. Quelques problèmes non résolus	191

LE DUAL DE $\underline{\underline{H}}^1(\mathbb{R}^v)$: DEMONSTRATIONS PROBABILISTES

EXPOSE I : LES DEFINITIONS FONDAMENTALES

I. L'ESPACE BMO CLASSIQUE . THEORIE ELEMENTAIRE

Notre référence principale est ici le remarquable volume de Lecture Notes de REIMANN-RYCHENER (référence [RR] de la bibliographie).

- 1 NOTATIONS. \mathbb{R}^v est muni de la mesure de Lebesgue, notée tantôt dx , tantôt $\lambda(dx)$ [et non ξ comme dans les exposés [LP] de l'an dernier]. La mesure d'un ensemble A est souvent notée $|A|$.

La notation Q est réservée en principe aux cubes de \mathbb{R}^v dont les arêtes sont parallèles aux axes. Si f est localement intégrable, nous écrivons

$$(1.1) \quad f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f \lambda = \int f \varepsilon_Q$$

La notation ε_Q pour désigner la mesure "moyenne sur Q " est bien compatible avec la notation ε_x pour désigner la masse unité en x !

- 2 DEFINITION. Une fonction f appartient à BMO si elle est localement intégrable et s'il existe une constante c telle que l'on ait, pour tout cube Q

$$(2.1) \quad \int_Q |f-f_Q| \lambda \leq c |Q| \quad (\text{ou } \int |f-f_Q| \varepsilon_Q \leq c).$$

La plus petite constante c possédant cette propriété est notée $\|f\|_*$.

On ne modifie pas $\|f\|_*$ si l'on ajoute une constante à f , et la condition $\|f\|_* = 0$ signifie que f est constante p.p. . Il est donc naturel de considérer BMO comme un espace de classes de fonctions localement intégrables modulo les constantes. On vérifie qu'alors BMO est normé par $\| \cdot \|_*$, et que c'est en fait un espace de Banach. Mais on est aussi peu rigoriste quant à ce passage au quotient qu'en ce qui concerne les L^p , où l'on ne sait jamais si l'on parle de fonctions ou de classes.

EXEMPLE. Dans \mathbb{R}^v , la fonction $\log|x|$ appartient à BMO. Ce n'est nullement évident ([RR] p.5).

- 3 LEMME. Soit f localement intégrable. Supposons que pour tout cube Q il existe un nombre a_Q tel que $\int |f - a_Q| \varepsilon_Q \leq c$. Alors on a $\|f\|_* \leq 2c$.

DEMONSTRATION. $|\int f \varepsilon_Q - \int a_Q \varepsilon_Q| \leq \int |f - a_Q| \varepsilon_Q$, donc $|\int f \varepsilon_Q - \int a_Q \varepsilon_Q| \leq c$ et $\int |f - a_Q| \varepsilon_Q \leq 2c$.

- 4 COROLLAIRE. a) Toute f bornée appartient à $\underline{\underline{BMO}}$ (prendre $a_Q = 0$).
 b) Les fonctions lipschitziennes opèrent sur $\underline{\underline{BMO}}$. En particulier, $\underline{\underline{BMO}}$ est stable pour les opérations \wedge et \vee .

DEMONSTRATION. Soit $L(x, y)$ une fonction lipschitzienne de deux variables, par exemple, et soient f et g deux éléments de $\underline{\underline{BMO}}$. On a en désignant par l la constante de Lipschitz de L

$$|L(f, g) - L(f_Q, g_Q)| \leq l(|f - f_Q| + |g - g_Q|)$$

après quoi on intègre par rapport à ε_Q , et on applique le lemme 3.

ESPACE $\underline{\underline{BMO}}$ ET MARTINGALES DYADIQUES

- 5 Nous n'avons pas précisé si les "cubes" figurant dans la définition de $\underline{\underline{BMO}}$ sont fermés, ouverts... Pour faire le lien avec la théorie des martingales, il est bon de convenir qu'il s'agit toujours de cubes semi-ouverts, produits d'intervalles de la forme $a^i < x^i \leq a^i + h$ (où x^i désigne la i -ième coordonnée).

Nous pouvons considérer tout cube Q comme un espace probabilisé $(Q, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{P}})$, $\underline{\underline{F}}$ étant la tribu borélienne de Q , $\underline{\underline{P}}$ la loi de probabilité ε_Q (considérée ici comme mesure sur Q plutôt que sur \mathbb{R}^n). Désignons par ρ_n la n -ième partition dyadique de Q (pour former ρ_1 , nous découpons chaque intervalle facteur $a^i < x^i \leq a^i + h$ en deux intervalles semi-ouverts égaux, et formons les produits de tous les intervalles ainsi obtenus; ρ_1 comporte donc 2^v cubes). On itère l'opération pour construire ρ_2, \dots, ρ_n . Nous désignerons par $\underline{\underline{F}}_n$ la tribu engendrée par ρ_n ($\underline{\underline{F}}_0$ est réduite à Q entier et à l'ensemble vide).

Soit f une fonction localement intégrable sur \mathbb{R}^v . La restriction de f à Q (que nous noterons encore f) est $\underline{\underline{P}}$ -intégrable, et nous pouvons calculer l'espérance conditionnelle $f_n = E[f | \underline{\underline{F}}_n]$; on a

$$(5.1) \quad f_n = \sum_{U \in \rho_n} f_U \cdot I_U$$

et par conséquent

$$(5.2) \quad E[|f - f_n| | \underline{\underline{F}}_n] = \sum_{U \in \rho_n} (\int |f - f_U| \varepsilon_U) \cdot I_U$$

Par conséquent, si f appartient à $\underline{\underline{BMO}}$, nous avons $E[|f - f_n| | \underline{\underline{F}}_n] \leq \|f\|_*$. Inversement, si nous avons pour tout cube Q $E[|f - f_n| | \underline{\underline{F}}_n] \leq c$, en prenant $n=0$ nous avons en particulier que $\int |f - a_Q| \varepsilon_Q \leq c$, et f appartient à $\underline{\underline{BMO}}$.

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \underline{F}, P)$ muni d'une famille croissante de tribus (\underline{F}_n) , on dit qu'une martingale $(X_n) = (E[X | \underline{F}_n])^1$ appartient à \underline{BMO} s'il existe une constante γ telle que l'on ait pour tout n

$$(5.3) \quad E[|X - X_{n-1}| | \underline{F}_n] \leq \gamma \quad (\gamma \text{ compris, par convention pour } n=0, \\ E[|X| | \underline{F}_0] \leq \gamma)$$

et la plus petite constante γ possédant cette propriété est la norme de la v.a. X , ou de la martingale (X_n) , dans \underline{BMO} . Plus précisément, il faudrait noter cet espace \underline{BMO}_1 et $\| \cdot \|_{\underline{BMO}_1}$ la norme correspondante, et définir \underline{BMO}_p par l'existence d'une constante γ telle que

$$(5.4) \quad E[|X - X_{n-1}|^p | \underline{F}_n] \leq \gamma^p \quad (\gamma \text{ compris, par convention,} \\ E[|X|^p | \underline{F}_0] \leq \gamma^p ; \text{ on suppose } 1 \leq p < \infty)$$

la plus petite constante possible étant $\|X\|_{\underline{BMO}_p}$. Mais l'un des premiers résultats de la théorie probabiliste de \underline{BMO} est l'identité des divers espaces \underline{BMO}_p , et l'équivalence des normes $\| \cdot \|_{\underline{BMO}_p}$ - de sorte que, au moins en ce qui concerne l'espace, la mention de l'exposant p est inutile.

Cependant, si l'on compare (5.3) au résultat obtenu plus haut

$$(5.5) \quad E[|f - f_n| | \underline{F}_n] \leq c \quad (\text{sur tout cube } Q)$$

on constate deux différences :

a) On a f_n dans (5.5), alors qu'il faudrait f_{n-1} pour (5.3). Nous avons pour lever cette difficulté une propriété géométrique des partitions dyadiques : soit $U \in \mathcal{P}_n$, et soit V le cube de \mathcal{P}_{n-1} qui contient U . On a sur U

$$E[|f - f_{n-1}| | \underline{F}_n] = \int |f - f_V| \varepsilon_U = \frac{|V|}{|U|} \int |f - f_V| 1_U \varepsilon_V \leq \frac{|V|}{|U|} \int |f - f_V| \varepsilon_V \leq \\ \leq \frac{|V|}{|U|} c = 2^v c$$

b) On n'a certainement pas pour tout cube Q la propriété (5.3) pour $n=0$, en posant $X=f$, $X_n=f_n$. Car cela entraînerait $|f_Q| \leq c$, donc $|f| \leq c$ p.p.. En revanche, tout marche bien si l'on pose $X=f-f_Q$, $X_n=f_n-f_Q$. On en déduit aussitôt :

Si f appartient à $\underline{BMO}(\mathbb{R}^v)$, pour tout cube Q la v.a. $f-f_Q$ sur Q appartient à l'espace \underline{BMO} probabiliste relatif à $(Q, (\underline{F}_n), \varepsilon_Q)$, avec une norme $\|f-f_Q\|_{\underline{BMO}_1} \leq 2^v \|f\|_*$.

6 En voici quelques conséquences. Tout d'abord, nous aurions pu définir aussi bien $\underline{BMO}(\mathbb{R}^v)$ comme l'ensemble des fonctions $f \in L^p_{loc}$ satisfaisant à une inégalité du type

$$\int |f - f_Q|^p \varepsilon_Q \leq c^p \quad \text{pour tout cube } Q$$

1. On dit aussi que la variable aléatoire X appartient à \underline{BMO} .

et la plus petite constante c possible aurait défini une "norme" équivalente à la "norme" $\| \cdot \|_*$. Voir par exemple [G], p.64-65.

Un autre résultat qui passe immédiatement de la théorie probabiliste - où il admet une démonstration très générale et très simple - à la théorie analytique est l'inégalité de JOHN-NIRENBERG (dont nous ne nous servons pas) : pour tout cube Q

$$(6.1) \quad \lambda \{ x \in Q : |f(x) - f_Q| \geq t \} \leq a |Q| e^{-bt} / \|f\|_*$$

où a et b sont des constantes universelles. Même réf. que ci-dessus.

LES ATOMES DE COIFMAN

7 La notion d'atome a été introduite en théorie des martingales par HERZ, utilisée en analyse de manière spectaculaire par COIFMAN (Studia Math. 51, 1974) et COIFMAN-WEISS ([CW] de la bibliographie), et vient d'être introduite à nouveau en théorie des martingales par BERNARD et MAISONNEUVE sous une forme adaptée au temps continu.

L'idée est extrêmement simple. Elle consiste à interpréter les quantités apparaissant dans la définition de BMO

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q|^\lambda$$

de manière linéaire. Pour cela, nous écrivons

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q|^\lambda = \sup_h \frac{1}{|Q|} \int (f - f_Q) h^\lambda = \sup_h \frac{1}{|Q|} \int f (h - h_Q) I_Q \lambda$$

h parcourant l'ensemble des fonctions nulles hors de Q , telles que $|h| \leq 1$. Posant $k = (h - h_Q) I_Q / |Q|$, nous voyons que k est nulle hors de Q , bornée par $2/|Q|$, et d'intégrale nulle.

DEFINITION. Nous dirons qu'une fonction a est un $(1, \infty)$ -atome si a est intégrable d'intégrale nulle, et s'il existe un cube Q telle que $|a|$ soit nulle hors de Q , et bornée par $1/|Q|$.

La fonction $k/2$ ci-dessus est un $(1, \infty)$ -atome, et nous avons donc, en désignant par \underline{A} l'ensemble des $(1, \infty)$ -atomes

$$(7.1) \quad \|f\|_* \leq 2 \sup_{a \in \underline{A}} \int f a \lambda$$

Mais d'autre part on a pour tout $(1, \infty)$ -atome a $\int f a \lambda = \int (f - f_Q) a \lambda \leq \frac{1}{|Q|} \int |f - f_Q| \lambda \leq \|f\|_*$. Les $(1, \infty)$ -atomes permettent donc de "tester" $\|f\|_*$.

Si l'on avait remplacé les cubes par des boules dans la définition des atomes, on aurait simplement modifié la constante 2 dans la formule (7.1). Nous ferons ce genre de passage des boules aux cubes sans même le mentionner.

La notion de $(1, \infty)$ -atome se rapporte à la définition de $\underline{\underline{BMO}}$ par la norme $\| \cdot \|_{\underline{\underline{BMO}}}$. Si l'on avait utilisé la norme $\underline{\underline{BMO}}_p$, on serait parvenu à la notion suivante :

DEFINITION. Soient $p \in]1, \infty[$ et q l'exposant conjugué de p . Une fonction a est un $(1, p)$ -atome si elle est intégrable d'intégrale nulle, et s'il existe un cube Q tel que $|a|$ soit nulle hors de Q , et que $\int_Q |a|^q \lambda \leq (1/|Q|)^{q/p}$.

On n'utilise guère que les cas où $p = \infty$, $p = 2$. La mention de 1 dans la notation " $(1, p)$ -atomes" tient à l'existence d'espaces $\underline{\underline{H}}^r$ dont nous ne parlerons pas ici, et auxquels correspondraient des (r, p) -atomes.

II. PROLONGEMENTS HARMONIQUES

1 Dans toute la suite, nous désignerons par $Q_t(x, dy)$ le noyau sur \mathbb{R}^v

$$(1.1) \quad Q_t(x, dy) = q_t(x-y)\lambda(dy) = \frac{c_v t \lambda(dy)}{(t^2 + |x-y|^2)^{(v+1)/2}}$$

ici $| \cdot |$ désigne la distance euclidienne, et c_v est une constante de normalisation. Les noyaux Q_t forment le semi-groupe de Cauchy, et $q_t(x-y)$ est le noyau de Poisson dans $\mathbb{R}^v \times \mathbb{R}_+$. La transformée de Fourier

$$(1.2) \quad \int e^{iuy} Q_t(0, dy) = e^{-t|u|}$$

est classique.

Soit f une fonction borélienne définie sur \mathbb{R}^v . Nous dirons que f est prolongeable s'il existe un point (x, u) du demi-espace $\mathbb{R}^v \times \mathbb{R}_+$ tel que $u > 0$, $Q_u(x, |f|) < \infty$. Cette propriété a alors lieu pour tout point (y, v) [cela résulte, soit de considérations générales sur les fonctions harmoniques, soit de la remarque évidente que le rapport $q_v(z-y)/q_u(z-x)$ est borné] et nous pouvons définir le prolongement harmonique de f au demi-espace, que nous noterons

$$(1.3) \quad f(x, u) = Q_u(x, f)$$

en utilisant toujours la même lettre (ici f) pour la fonction sur le bord et son prolongement harmonique. La fonction $f(\cdot, u)$ sur \mathbb{R}^v (c'est à dire $Q_u f$) sera parfois notée f_u .

Soit maintenant g une fonction harmonique dans le demi-espace ouvert. Le problème se pose assez fréquemment de savoir si g est un prolongement

harmonique d'une fonction (prolongeable) sur le bord. Il y a à cela une condition nécessaire : que pour tout $a > 0$ la fonction g_a soit prolongeable, et que l'on ait $g_{a+u} = Q_u g_a$ pour tout $u > 0$. Nous dirons dans ce cas que la fonction harmonique g est poissonnienne. La fonction $g(x,u) = u$ est un exemple de fonction harmonique non poissonnienne.

2 Nous désignerons de manière très systématique les points du demi-espace par des lettres grecques, et presque toujours par les notations $\xi = (x,u)$, $\eta = (y,v)$ ($x, y \in \mathbb{R}^v$, $u, v \in \mathbb{R}^+$).

Soit Ω l'ensemble des applications continues de \mathbb{R}^+ dans $\mathbb{R}^v \times \mathbb{R}$, avec ses coordonnées notées $B_t = (X_t, U_t) \in \mathbb{R}^v \times \mathbb{R}$ [nous aurions pu les appeler ξ_t , mais nous avons mis B pour "brownien"]. Soit (P_t) le semi-groupe du mouvement brownien¹ sur \mathbb{R}^v , et soit (P_t^-) de même le semi-groupe du mouvement brownien¹ "horizontal"² sur \mathbb{R} . Nous construisons le semi-groupe du mouvement brownien à $v+1$ dimensions

$$(2.1) \quad \Pi_t(\xi, d\eta) = P_t(x, dy) \otimes P_t^-(u, dv) \quad \left(\begin{array}{l} \xi = (x, u) \in \mathbb{R}^v \times \mathbb{R} \\ \eta = (y, v) \in \mathbb{R}^v \times \mathbb{R} \end{array} \right)$$

et nous munissons Ω des mesures P^ξ du mouvement brownien issu du point ξ gouverné par (Π_t) . On désigne par $\underline{F}, \underline{F}_t$ les tribus de tous les événements, des événements antérieurs à t sur Ω , complétées de manière convenable.

Ce mouvement brownien sort du demi-espace positif, mais si l'on introduit le premier instant où l'on rencontre le bord

$$(2.2) \quad T_0(\omega) = \inf\{t : U_t(\omega) \leq 0\}$$

et si l'on pose pour $\xi \in \mathbb{R}^v \times \mathbb{R}_+$

$$(2.3) \quad G_t(\xi, f) = E^\xi[f(B_t), t < T_0]$$

où f est borélienne bornée sur le demi-espace, on obtient un semi-groupe sur le demi-espace, le semi-groupe de GREEN. Nous en reparlerons en appendice. Notons seulement le noyau potentiel de ce semi-groupe : $V(\xi, d\eta)$, admettant une densité $V(\xi, \eta)$ par rapport à la mesure $d\eta = dy dv$, qui est la fonction de GREEN

$$(2.4) \quad V(\xi, \eta) = \Theta_v(|\xi - \eta|^{1-v} - |\xi - \eta'|^{1-v}) \quad (v \geq 2, \eta' = (y, -v))$$

3 Soit f une fonction harmonique poissonnienne. Munissons Ω d'une mesure P^ξ , et désignons par T_a le temps d'arrêt $\inf\{t : U_t \leq a\}$. Il résulte de la

1. Il s'agit du mouvement brownien des analystes, de générateur Δ , non de celui des probabilistes, de générateur $\Delta/2$.

2. Dans les exposés [LP] de l'an dernier, (P_t) était noté (P_t^1) , et appelé "transversal" \dagger . On le dira encore à l'occasion.

formule d'ITO que lorsque $a > 0$, le processus $M_t^a = f(B_{t \wedge T_a})$ est une martingale pour la mesure P^5 , dont le processus croissant associé est

$$(3.1) \quad \langle M^a, M^a \rangle_t = 2 \int_0^{t \wedge T_a} \text{grad}^2 f(B_s) ds$$

- il n'y a aucune difficulté à appliquer la formule d'ITO, du fait que f est de classe C^2 au delà de l'hyperplan $\{u=a\}$: cf. le séminaire X, p.130 .

Supposons ensuite que f soit le prolongement harmonique d'une fonction (prolongeable) sur le bord. On vérifie à la main (même réf.) que $M_t = f(B_{t \wedge T_0})$ est une martingale. Le calcul de $\langle M, M \rangle_t$ peut se faire par arrêt à l'instant T_a , car on sait que $\langle M, M \rangle_t$ est continu et ne croît plus après T_0 . Il vient donc

$$(3.2) \quad M_t = f(B_{t \wedge T_0}) \text{ est une martingale, } \langle M, M \rangle_t = 2 \int_0^{t \wedge T_0} \text{grad}^2 f(B_s) ds$$

En arrêtant à l'instant T_a et en appliquant la formule d'ITO, puis en faisant tendre a vers 0, on voit que si f est prolongeable

$$(3.3) \quad M_t = f(B_{t \wedge T_0}) = f(B_0) + \int_0^{t \wedge T_0} Df(B_s) dU_s + \sum_{i=1}^v \int_0^{t \wedge T_0} D_i f(B_s) dX_s^i$$

où Df (parfois notée D^-f , D_0f) est la composante horizontale du gradient de f , et $D_i f$ ($i \geq 1$) est la i -ième composante transversale.

* Nous pouvons donc associer à f plusieurs autres martingales, parmi lesquelles la plus importante est

$$(3.4) \quad \vec{M}_t = \int_0^{t \wedge T_0} Df(B_s) dU_s, \quad \langle \vec{M}, \vec{M} \rangle_t = \int_0^{t \wedge T_0} (Df(B_s))^2 ds$$

(\vec{M}_t) est la projection de (M_t) sur le sous-espace stable engendré par le mouvement brownien (U_t). *

Il s'agit ici de martingales continues, et il n'y a donc pas lieu de faire la distinction habituelle entre les deux crochets \langle, \rangle et $[,]$. Soient f et g deux fonctions sur le bord, satisfaisant à des conditions d'intégrabilité que nous ne précisons pas pour l'instant, et soient M_t et N_t les deux martingales correspondantes $f(B_{t \wedge T_0})$, $g(B_{t \wedge T_0})$. La formule

$$(3.5) \quad E^\mu[M_\infty N_\infty] = E^\mu[M_0 N_0] + E^\mu[\int_0^\infty d\langle M, N \rangle_s]$$

s'écrit, en désignant par μ_Q la mesure harmonique sur le bord

$$(3.6) \quad \mu_Q(h) = E^\mu[h \circ B_{T_0}] = \int \mu(dx, du) Q_u(x, dy) h(y)$$

$$(3.7) \quad \langle \mu_Q, fg \rangle = \langle \mu, fg \rangle + E^\mu[\int_0^{T_0} 2 \text{grad} f(B_s) \cdot \text{grad} g(B_s) ds] \\ = \langle \mu, fg \rangle + 2 \langle \mu_V, \text{grad} f \cdot \text{grad} g \rangle$$

où V est le noyau de Green.

Ces formules sont justifiées rigoureusement dès que la martingale locale $M_t N_t - \langle M, N \rangle_t$ est uniformément intégrable pour la loi P^μ , mais nous ne nous occupons pas ici de cette justification, que nous ferons en détail dans chaque cas particulier. Continuons à présenter des calculs formels.

Nous désignerons par λ_a ($a > 0$) la mesure $\lambda \otimes \varepsilon_a$, c'est à dire la mesure de Lebesgue sur l'hyperplan $\{u=a\}$. La mesure λ_a^V se calcule très simplement, on a $\lambda_a^Q = \lambda$, et il vient

$$(3.8) \quad \int fg \lambda = \int_a g_a \lambda + 2 \int_0^\infty \frac{d}{dx} \int_a u \lambda_a \operatorname{grad} f(x, u) \cdot \operatorname{grad} g(x, u) \, du$$

qui est l'une des formules classiques de la théorie de LITTLEWOOD-PALEY. * Cette formule a, nous l'avons vu, une démonstration probabiliste. Il n'en est pas de même de la formule suivante, qui résulte de la symétrie du noyau de Poisson ([LP] p.133, étape 1 ou formule (17) p.169) : on a en fait

$$\int \operatorname{grad} f(x, u) \cdot \operatorname{grad} g(x, u) \, dx = 2 \int D^- f(x, u) D^- g(x, u) \, dx \quad \text{pour tout } u$$

de sorte que l'on a aussi

$$(3.9) \quad \int fg \lambda = \int_a g_a \lambda + 4 \int_0^\infty \frac{d}{dx} \int_a u \lambda_a D f(x, u) D g(x, u) \, du$$

ce qui signifie encore que

$$(3.10) \quad E^{\lambda_a} [M_\infty N_\infty] = E^{\lambda_a} [M_0 N_0] + 2 E^{\lambda_a} \left[\int_0^\infty d \langle M^-, N^- \rangle_s \right]$$

intuitivement, dans le cas symétrique, nous pouvons estimer $\int fg \lambda$ en connaissant seulement les martingales horizontales M^-, N^- : c'est là le contenu probabiliste de la théorie des transformations de RIESZ, comme nous le verrons.*

APPLICATION DE LA THEORIE DES MARTINGALES AUX FONCTIONS HARMONIQUES

- 4 Sous ce titre prétentieux, nous voulons mettre juste une petite remarque, que nous ne démontrerons pas complètement. Soit f une fonction harmonique poissonnienne dans le demi-espace ouvert. Associons lui les martingales $(M_t^a) = (f(B_{t \wedge T_a}))$ pour $a > 0$. Supposons que pour un point ξ au moins, les variables aléatoires $M_\infty^a = f_a(X_{T_a})$ soient uniformément intégrables pour la loi P^ξ . Posons

$$\underline{F}(\omega) = \liminf_{t \rightarrow T_{0-}} f(B_t) \quad ; \quad \overline{F}(\omega) = \limsup_{t \rightarrow T_{0-}} f(B_t)$$

D'après le théorème de convergence des martingales, nous avons $\underline{F} = \overline{F}$ P^ξ -p.s., et en désignant par F leur valeur commune, nous avons

$$E^\xi[|F|] < \infty \quad , \quad f(B_{t \wedge T_a}) = E^\xi[F | \underline{F}_{t \wedge T_a}] \quad \text{pour tout } t \text{ et tout } a$$

ADMETTONS MAINTENANT QU'IL EXISTE UNE FONCTION BORELIENNE φ sur le bord telle que $F = \varphi \circ B_{T_0}$ P^ξ -p.s. ; Alors la condition $E^\xi[|F|] < \infty$ entraîne que φ est prolongeable, et la condition $f(B_{T_a}) = E^\xi[\varphi \circ B_{T_0} | \underline{F}_{T_a}]$ s'écrit (en notant encore par la même lettre φ et son prolongement harmonique) $f(B_{T_a}) = \varphi(B_{T_a})$ P^ξ -p.s. , donc $f_a = \varphi_a$ p.p. au sens de Lebesgue sur l'hyperplan $\{u=a\}$, et par continuité $f_a = \varphi_a$. D'où finalement $f = \varphi$ dans le demi-espace ouvert, et la fonction f est le prolongement harmonique d'une fonction définie sur le bord.

La phrase en majuscules est une conséquence très simple¹ de la théorie du retournement du temps, à laquelle nous consacrerons un appendice.

III. INTERPRETATION PROBABILISTE DE BMO

BMO ET NOYAU DE POISSON

- 1 Le contenu de ce numéro est purement analytique : il s'agit de prouver le théorème suivant, dû à FEFFERMAN-STEIN

THEOREME. Si f appartient à BMO, on a $Q_t(x, |f|) < \infty$ pour tout x et tout $t > 0$, et il existe une constante c ($\leq \theta \|f\|_*$) telle que

$$(1.1) \quad \text{pour tout } x \quad \int Q_t(x, dy) |f(y) - Q_t(x, f)| \leq c .$$

Inversement, (1.1) caractérise BMO .

REMARQUE. On a des résultats analogues pour les exposants $p > 1$: $Q_t(x, |f|^p)$ est fini pour tout x et tout $t > 0$, et l'existence de c telle que $\int Q_t(x, dy) |f(y) - Q_t(x, f)|^p \leq c^p$ caractérise BMO. Nous indiquerons cela en variante à la fin de la première partie.

DEMONSTRATION. Soit J le cube unité de centre 0 , et soit J_k le cube homothétique de rapport 2^k . Nous définissons une fonction $a(x)$ positive, comme valant

$$\sum_0^\infty b_i \text{ sur } J_0, \quad \sum_1^\infty b_i \text{ sur } J_1 \setminus J_0 \quad \dots \quad \sum_n^\infty b_i \text{ sur } J_n \setminus J_{n-1}$$

où les b_i sont des constantes positives. Soit $f \in \underline{\text{BMO}}$, $\|f\|_* = c$. Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} a(x) |f(x) - f_J| \lambda(dx) &= \int_{J_0} b_0 |f - f_J| + \int_{J_1} b_1 |f - f_J| + \dots + \int_{J_k} b_k |f - f_J| + \dots \\ &= b_0 \int |f - f_J| \varepsilon_{J_0} + 2^{\nu} b_1 \int |f - f_J| \varepsilon_{J_1} + \dots + 2^{k\nu} b_k \int |f - f_J| \varepsilon_{J_k} + \dots \end{aligned}$$

Nous majorons $\int |f - f_J| \varepsilon_{J_k}$ par $\int |f - f_{J_k}| \varepsilon_{J_k} + |f_J - f_{J_k}|$, et nous utilisons un calcul du § I, n°5

1. En fait, on peut la démontrer sans aucune théorie générale du retournement du temps, comme nous le verrons. (App.1, n°2)

$\int |f-f_{J_k}| \varepsilon_{J_{k-1}} \leq \frac{|J_k|}{|J_{k-1}|} \int |f-f_{J_k}| \varepsilon_{J_k} \leq 2^\nu c$
 et a fortiori $\int |f_{J_{k-1}} - f_{J_k}| \leq 2^\nu c$, d'où par sommation $\int |f_{J_{k-1}} - f_{J_k}| \leq k 2^\nu c$.

Finalement,

$$\int a(x) |f(x) - f_J| \lambda(dx) \leq \sum_0^\infty 2^{k\nu} b_k (1+k 2^\nu) c$$

Cette série converge si l'on prend par exemple $b_k = 2^{-k(\nu+1)}$. Alors la fonction $a(x)$ vaut $\theta 2^{-k(\nu+1)}$ sur $J_k \setminus J_{k-1}$, où la distance à l'origine est de l'ordre de 2^k . Donc au voisinage de l'infini $a(x)$ est de l'ordre de $(1+|x|^2)^{-(\nu+1)/2}$, et la relation

$$(1.2) \quad \int a(x) |f(x) - f_J| \lambda(dx) \leq \theta c$$

entraîne $\int Q_1(0, dx) |f(x) - f_J| \leq \theta c$ (autre θ)

Nous interrompons la discussion pour un instant.

VARIANTE. Dans le cas où $p > 1$, suivre le même raisonnement, mais J_k est homothétique de J dans le rapport 2^{pk} , à la ligne 7 on majore $\int a(x) |f(x) - f_J|^p \lambda(dx)$ par $\sum_0^\infty b_k 2^{pk\nu} \int |f - f_{J_k}|^p \varepsilon_{J_k}$, puis cette dernière intégrale de la manière suivante

$$(\int |f - f_{J_k}|^p \varepsilon_{J_k})^{1/p} \leq (\int |f - f_{J_k}|^p \varepsilon_{J_k})^{1/p} + (\int |f_{J_k} - f_{J_k}|^p \varepsilon_{J_k})^{1/p}$$

le premier terme est majoré par θc (inégalité de JOHN-NIRENBERG, cf. § I, n° 6), le second vaut $\int |f_{J_k} - f_{J_k}| \leq k 2^{p\nu} c$ (calcul fait plus haut), d'où une majoration finale

$$\int a(x) |f(x) - f_J|^p \lambda(dx) \leq \sum_0^\infty 2^{pk\nu} b_k (\theta + k 2^{p\nu})^p c$$

On peut prendre $b_k = 2^{-pk(\nu+1)}$, et conclure comme plus haut que

$$\int Q_1(0, dy) |f(y) - f_J|^p \leq \theta c^p$$

Reprenons le cas $p=1$, vu plus haut. On a $\int Q_1(0, f - f_J) \leq \int Q_1(0, |f - f_J|) \leq \theta c$. Nous en déduisons alors que

$$\int Q_1(0, dy) |f(y) - Q_1(0, f)|^p \leq \theta c^p$$

et maintenant, nous translatons f , ce qui ne change pas la constante c , pour obtenir

$$\int Q_1(x, dy) |f(y) - Q_1(x, f)|^p \leq \theta c^p$$

Et comment passe t'on de Q_1 à Q_t ? On remplace f par la fonction f_t : $x \mapsto f(x/t)$, qui est telle que $\|f_t\|_* = \|f\|_* = c$, et l'on remarque que $Q_1(x, f) = Q_t(tx, f_t)$, ou encore que $Q_t(x, f) = Q_1(x/t, f_1/t)$. Les inégalités ci-dessus s'étendent alors de $t=1$ à t quelconque.

Nous passons maintenant à la réciproque, due semble t'il à STROOCK et VARADHAN dans leur travail de 1974 (Trans.Amer.M.Soc., 192). Tout est très simple à comprendre, sans aucun calcul, dès que l'on fait intervenir le groupe des dilatations, qui vient déjà de jouer son rôle dans les lignes précédentes. Nous traitons le cas où $p=1$.

Soit G le groupe des transformations de \mathbb{R}^v de la forme $g \cdot x = a + tx$ ($a \in \mathbb{R}^v$, $t > 0$). Nous pouvons faire opérer G sur les fonctions de bien des manières

$$\text{"type } L^\infty \text{" : } g \cdot f(x) = f(g^{-1}x)$$

$$\text{"type } L^p \text{" : } g \cdot f(x) = t^{-pv} f(g^{-1}x)$$

l'opération de type L^p préservant la norme dans L^p . On voit ici de quelle manière $\underline{\underline{BMO}}$ est apparenté à L^∞ : les opérations " de type L^∞ " préservent aussi la norme de $\underline{\underline{BMO}}$; de même, \underline{H}^1 plus loin sera apparenté à L^1 pour la même raison.

Maintenant, nous pouvons construire de bien des manières des normes invariantes pour l'opération de type L^∞ . Soit μ une loi de probabilité sur \mathbb{R}^v . Si f est μ -intégrable, notons f_μ son intégrale. Posons

$$H_\mu(f) = \int |f(x) - f_\mu| \mu(dx) \quad \text{si } f \text{ est } \mu\text{-intégrable} \\ = +\infty \quad \text{sinon}$$

et posons $\|f\|_{*,\mu} = \sup_{g \in G} H_\mu(g \cdot f)$.

La norme $\|f\|_*$ usuelle correspond au cas où μ est la loi uniforme sur le cube unité, et la propriété (1.1) correspond à une évaluation de $\|f\|_{*,\mu}$, pour $\mu(dy) = Q_1(0, dy)$.

Maintenant, soit \underline{m} une mesure de probabilité dominée par un multiple $C\mu$ de la loi μ . Nous avons si f est μ -intégrable

$$\int |f(x) - f_\mu| \underline{m}(dx) \leq C H_\mu(f)$$

et comme \underline{m} est une mesure de probabilité, $|f_{\underline{m}} - f_\mu| \leq C H_\mu(f)$, finalement $H_{\underline{m}}(f) \leq 2C H_\mu(f)$, et $\|f\|_{*,\underline{m}} \leq 2C \|f\|_{*,\mu}$.

Ainsi, dès que μ a un petit bout de densité continue quelque part, l'espace " $\underline{\underline{BMO}}$ " est contenu dans $\underline{\underline{BMO}}$ usuel. On voit combien peu cela est lié au semi-groupe de POISSON ! Cela s'appliquerait non seulement au semi-groupe du mouvement brownien, mais à des approximations de l'identité par des fonctions continues ≥ 0 quelconques (à décroissance plus rapide que le noyau de POISSON, si l'on veut avoir l'identité des

deux espaces). Il me semble qu'on a là le résultat dual (beaucoup plus facile !) d'un théorème célèbre de FEFERMAN-STEIN, affirmant que l'espace \underline{H}^1 peut se caractériser au moyen de n'importe quelle approximation de l'identité assez régulière ([FS], p.183).

- 2 REMARQUES. On aurait manifestement pu remplacer le semi-groupe de Poisson (Q_t) par le semi-groupe du mouvement brownien (P_t).

Il résulte du théorème 1 que le semi-groupe de Poisson opère dans \underline{BMO} : soit en effet $f \in \underline{BMO}$, avec $Q_t(f^2) - (Q_t f)^2 \leq c^2$, et soit $h = Q_u f$. On a $Q_{t+u}(f^2) = Q_t(Q_u(f^2)) \geq Q_t((Q_u f)^2) = Q_t(h^2)$, donc $Q_t(h^2) - (Q_t h)^2 \leq Q_{t+u}(f^2) - (Q_{t+u} f)^2 \leq c^2$.

Enfin, à la caractérisation de \underline{BMO} donnée par le théorème 1 correspond une notion de (1,p)-atomes. Par exemple, pour tester que $Q_1(0, |f - Q_1 f|) \leq c$, on écrit que pour toute fonction j comprise entre -1 et 1, on a

$$|Q_1(0, j(f - Q_1 f))| \leq c \text{ ou } \int |(f(y) - Q_1 f(y)) j(y) q_1(y) \lambda(dy)| \leq c$$

Posons $k(y) = j(y) q_1(y)$; cette intégrale s'écrit $\langle f - Q_1 f, k \rangle_\lambda$, et la symétrie du noyau de Poisson nous permet d'écrire cela $\langle f, k - Q_1 k \rangle_\lambda$. La fonction $k - Q_1 k$ est intégrable, d'intégrale nulle, bornée par $q_1 + q_2$. Nous pourrions alors appeler (1, ∞)-atomes les fonctions a

intégrables, d'intégrale nulle, satisfaisant à une inégalité de (2.1) la forme $|a(x)| \leq (1 + |x|^2)^{(v+1)/2}$

et toutes celles qui s'en déduisent par translation et dilatation (i.e. qui sont de la forme $x \mapsto t^{-v} a((x - x_0)/t)$). De même, les (1,2) atomes seraient les fonctions intégrables d'intégrale nulle satisfaisant à

$$(2.2) \quad \int |a^2(x)| (1 + |x|^2)^{(v+1)/2} \leq 1$$

et toutes celles qui s'en déduisent par translation et dilatation. Pour éviter des confusions, nous réserverons le nom d'atomes aux atomes du § I.

- 3 Le théorème 1 entraîne une agréable caractérisation de \underline{BMO} au moyen des prolongements harmoniques, qui est étroitement liée (nous le verrons en appendice) à la théorie des "mesures de CARLESON"

THEOREME. Soit f une fonction sur le bord. Pour que f appartienne à \underline{BMO} il faut et il suffit que f soit prolongeable, et qu'il existe une constante positive c telle que l'on ait

$$(3.1) \quad V(\text{grad}^2 f) \leq c^2 \quad (V \text{ est le potentiel de Green }) .$$

La plus petite constante c possible définit une norme équivalente à la norme $\|f\|_*$.

DEMONSTRATION. Si f appartient à $\underline{\underline{BMO}}$, avec $\|f\|_* = c$, nous savons (th.1) que $Q_u(x, f^2) < \infty$ pour tout $u > 0$ et tout x (f est donc prolongeable) et que $Q_u(x, f^2) - (Q_u(x, f))^2 \leq \theta c^2$.

Soit $\xi = (x, u)$, et soit M_t la martingale $f(B_{t \wedge T_0})$ pour la loi P^ξ . La martingale (M_t) est de carré intégrable, puisque $E^\xi[M_\infty^2] = Q_u(x, f^2) < \infty$. La martingale $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$ est donc uniformément intégrable, et les calculs formels du § II n°3 sont justifiés. D'après (3.7)

$$(3.1) \quad Q_u(x, f^2) - (Q_u(x, f))^2 = 2V(\xi, \text{grad}^2 f)$$

et la fonction $V(\text{grad}^2 f)$ est donc bornée par θc^2 .

Inversement, si f est prolongeable, et si $V(\text{grad}^2 f)$ est finie au point ξ , la v.a. $M_\infty^2 - \langle M, M \rangle_\infty$ est intégrable, donc (M_t) est de carré intégrable, pour la loi P^ξ . La relation (3.1) a alors lieu, et l'inégalité $V(\text{grad}^2 f) \leq c^2$ entraîne d'après (3.1) et le th.1 que f appartient à $\underline{\underline{BMO}}$.

4 REMARQUE. Soit f une fonction harmonique dans le demi-espace ouvert, telle que $V(\text{grad}^2 f) \leq c^2$. Nous allons voir dans un instant que f est prolongement harmonique d'une fonction de $\underline{\underline{BMO}}$.

5 THEOREME. Soit f une fonction prolongeable sur le bord, et soit (M_t) le processus $f(B_{t \wedge T_0})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) f appartient à $\underline{\underline{BMO}}$.

2) Il existe une loi initiale μ telle que la martingale $(M_t - M_0)$ appartienne à $\underline{\underline{BMO}}$ pour la loi P^μ (définition rappelée ci-dessous).

3) Pour toute loi initiale μ , la martingale $(M_t - M_0)$ appartient à $\underline{\underline{BMO}}$ pour la loi P^μ .

DEMONSTRATION. Il nous faut d'abord rappeler la définition de $\underline{\underline{BMO}}$ en temps continu. Une martingale locale (M_t) appartient à $\underline{\underline{BMO}}(P^\mu)$ s'il existe une constante c qui, d'une part borne les sauts $|\Delta M_t|$ en valeur absolue (y compris éventuellement le "saut en 0" M_0 , si M n'est pas nulle à l'instant 0), et qui d'autre part est telle que

$$E[[M, M]_\infty | \underline{\underline{F}}_T] - [M, M]_T \leq c^2 \text{ pour tout temps d'arrêt } T \text{ (} P^\mu\text{-p.s.)}$$

Comme le processus du côté gauche est en fait continu à droite, il suffit de vérifier que l'on a $E[[M, M]_\infty | \underline{\underline{F}}_t] - [M, M]_t \leq c^2$ p.s. pour tout t constant. Pour tout cela, voir le séminaire X, p.333.

Lorsque la martingale (M_t) est continue et nulle en 0, il n'y a rien à vérifier quant aux sauts. Il reste la seconde condition, qui s'exprime sous l'une des deux formes suivantes

$$1) \quad M_t = E[M_\infty | \underline{\underline{F}}_t] \text{ et } E[(M_\infty - M_t)^2 | \underline{\underline{F}}_t] \leq c^2 \text{ } P^\mu\text{-p.s.}$$

$$2) \quad E[\langle M, M \rangle_\infty - \langle M, M \rangle_t | \underline{\underline{F}}_t] \leq c^2 \text{ } P^\mu\text{-p.s.}$$

Ces préliminaires ayant été dits, démontrons le théorème.

1) Soit f appartenant à $\underline{\underline{BMO}}$, et soit $(M_t) = (f(B_{t \wedge T_0}))$. Nous avons

$$\begin{aligned} E[\langle M, M \rangle_{\infty} | \underline{\underline{F}}_t] - \langle M, M \rangle_t &= E[\int_t^{t \wedge T_0} 2 \text{grad}^2 f(B_s) ds | \underline{\underline{F}}_t] \\ &= 2V(B_{t \wedge T_0}, \text{grad}^2 f) \leq \theta \|f\|_*^2 \end{aligned}$$

et on voit que $(M_t - M_0)$ appartient à $\underline{\underline{BMO}}(P^\mu)$ pour toute loi initiale μ .

2) Inversement, supposons que pour une loi μ $(M_t - M_0)$ appartienne à $\underline{\underline{BMO}}(P^\mu)$. Alors on a P^μ -p.s. $V(B_{t \wedge T_0}, \text{grad}^2 f) \leq c^2$. Mais cela entraîne que $V(\cdot, \text{grad}^2 f) \leq c^2$ p.p. au sens de Lebesgue. Cette fonction est un potentiel de Green, elle est donc semi-continue inférieurement, l'inégalité a lieu partout, et f appartient à $\underline{\underline{BMO}}$ d'après le théorème 3.

REMARQUE. Nous avons parlé tout le temps de lois initiales. En fait, tout s'applique à des mesures initiales σ -finies.

DEMONSTRATION DE LA REMARQUE 4. Fixons ξ , et introduisons pour $a > 0$ les martingales arrêtées $M_t^a = f(B_{t \wedge T_a})$. Nous avons

$$\begin{aligned} E^\xi [\langle M^a, M^a \rangle_{\infty}] &= E[\int_0^{T_a} 2 \text{grad}^2 f(B_s) ds] \leq E[\int_0^{T_0} 2 \text{grad}^2 f(B_s) ds] \\ &= V(\xi, 2 \text{grad}^2 f) < \infty \end{aligned}$$

Les martingales sont donc uniformément bornées dans $L^2(P^\xi)$, et le n°4 du § II entraîne que f est un prolongement harmonique de fonction sur le bord. Après quoi on applique le th.3.

IV . TRANSFORMATIONS DE RIESZ

1 Les transformations de RIESZ R_j ($j=1, \dots, \nu$) sont les opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ définis par

$$(1.1) \quad (R_j f)^\wedge(u) = i \frac{u_j}{|u|} \hat{f}(u)$$

où la transformation de Fourier est désignée ici par un \wedge (et plus loin par \mathcal{F}). Nous allons relier cela au noyau de Poisson. Partons de la formule classique

$$\mathcal{F} \frac{c_\nu t}{(t^2 + |x|^2)^{(\nu+1)/2}} = e^{-t|u|}$$

Cette égalité est préservée si l'on multiplie par x_j à gauche et si l'on applique iD_j à droite. Ainsi

$$\mathcal{F} \frac{c_\nu x_j}{(t^2 + |x|^2)^{(\nu+1)/2}} = i \frac{u_j}{|u|} e^{-t|u|}$$

Introduisons donc les éléments de L^2

$$(1.2) \quad k_t^j(x) = c_v x_j / (t^2 + |x|^2)^{(v+1)/2}$$

et les opérateurs de convolution bornés sur L^2

$$(1.3) \quad R_{jt} f = f * k_t^j \quad (f \in L^2(\mathbb{R}^v))$$

(nous écrirons désormais k_t au lieu de k_t^j , j restant fixé dans la suite).

On vérifie aussitôt sur (1.1), par transformation de Fourier, que

$$(1.3) \quad R_{jt} = R_j Q_t = Q_t R_j$$

En particulier, la fonction $(t, x) \mapsto R_{jt} f(x)$ est harmonique dans le demi-espace, et lorsque f appartient à L^2 , $R_{jt} f$ converge dans L^2 et p.p. vers $R_j f$.

Notons quelques propriétés des fonctions k_t et des opérateurs R_{jt} .

(1.4) La norme de R_{jt} dans L^2 est bornée par A , indépendant de t .

En effet, on a $|\int u_j e^{-t|u|} / |u| \leq 1$, et on applique Plancherel.

(1.5) On a $|D_i k_t(x)| \leq C/|x|^{v+1}$, où C est indépendant de t

Cela se voit par un petit calcul direct. Il en résulte que si $|x| \geq 2|y|$

$$(1.6) \quad |k_t(x-y) - k_t(x)| \leq |y| \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{C}{|x-ty|^{v+1}} \leq B|y|/|x|^{v+1}$$

Ces propriétés interviendront dans un calcul fondamental que nous allons faire maintenant. Il s'agit d'un résultat sur les (1,2)-atomes (§ I, n°7).

2 THEOREME. Soit Q une boule de centre 0 et de rayon R , et soit a une fonction de carré intégrable, à support dans Q (donc intégrable), et d'intégrale nulle, telle que $\int a^2(x) dx \leq 1/|Q|$. La transformée de RIESZ $R_j a$ appartient alors à L^1 , avec une norme majorée indépendamment de R .

DEMONSTRATION. Comme a appartient à L^2 , $R_j a$ est limite dans L^2 de $R_{jt} a$, et le lemme de Fatou nous ramène à la recherche d'une majoration uniforme pour $\int |R_{jt} a(y)| dy$. Posons $R_{jt} a(y) = r_t(y)$.

Nous avons $\|r_t\|_2 \leq A \|a\|_2 \leq 1/|Q|^{1/2}$ (cf. (1.4)). Donc si B est la boule de rayon $2R$

$$\int_{|y| \leq 2R} |r_t(y)| dy \leq \|I_B\|_2 \|r_t\|_2 \leq (2^v |Q|)^{1/2} \|r_t\|_2 \leq 2^{v/2}.$$

Pour $|y| \geq 2R$, nous utilisons le fait que a est d'intégrale nulle, en écrivant

$$r_t(y) = \int_Q (k_t(y-x) - k_t(y)) a(x) dx$$

Comme $|y| \geq 2R$, $|x| \leq R$, nous avons $|y| \geq 2|x|$, et nous pouvons majorer $|k_t(y-x) - k_t(y)|$ par $B|x|/|y|^{v+1}$, puis x par $|R|$. Alors

$$|r_t(y)| \leq \frac{BR}{|y|^{v+1}} \int_Q |a(x)| dx \leq \frac{BR}{|y|^{v+1}} \|I_Q\|_2 \|a\|_2 \leq BR/|y|^{v+1}$$

et alors $\int_{|y| \geq 2R} |r_t(y)| dy$ est borné par une quantité indépendante de R .

L'ESPACE $\underline{\underline{H}}^1$ DES ANALYSTES ET SON DUAL

3 Nous allons maintenant introduire l'espace $\underline{\underline{H}}^1$ classique, que nous noterons $\underline{\underline{H}}_a^1$ (a rappelant qu'il s'agit de l'espace des analystes, par opposition à l'espace probabiliste $\underline{\underline{H}}_p^1$ que nous verrons plus loin). Puis nous donnerons une description sommaire de son dual - lorsqu'il s'avèrera que ce dual est en fait $\underline{\underline{BMO}}$, nous en déduirons une représentation explicite de $\underline{\underline{BMO}}$.

Nous avons considéré jusqu'à maintenant les transformations de RIESZ comme des opérateurs sur L^2 . Nous dirons à présent qu'une fonction intégrable f admet une transformée de RIESZ intégrable $f_j = R_j f$ si f_j appartient à L^1 et si l'on a $\hat{f}_j(u) = i\hat{f}(u)u_j/|u|$. Noter que \hat{f} et \hat{f}_j sont continues en 0, alors que $u_j/|u|$ n'a pas de limite en 0 ; on a donc $\hat{f}(0) = \hat{f}_j(0) = 0$, autrement dit, f et f_j sont d'intégrale nulle.

DEFINITION. $\underline{\underline{H}}_a^1$ est l'espace des $f \in L^1$ admettant des transformées de RIESZ $R_j f \in L^1$ ($1 \leq j \leq v$) muni de la norme

$$(3.1) \quad \|f\|_{\underline{\underline{H}}_a^1} = \|f\|_1 + \sum_1^v \|R_j f\|_1$$

$\underline{\underline{H}}_a^1$ est un espace de BANACH. Le théorème 2 exprime que tous les (1,2)-atomes sont contenus dans une boule de $\underline{\underline{H}}_a^1$. Nous désignerons par $\underline{\underline{H}}_0^1$ l'espace vectoriel engendré par les (1,2)-atomes, i.e. l'espace des fonctions de carré intégrable, à support compact, et d'intégrale nulle. L'adhérence de $\underline{\underline{H}}_0^1$ dans $\underline{\underline{H}}_a^1$ sera notée $\underline{\underline{H}}_0^1$.

Il est très facile de déterminer le dual de $\underline{\underline{H}}_a^1$: le dual de L^1 étant L^∞

4 THEOREME. Les formes linéaires continues sur $\underline{\underline{H}}_a^1$ s'écrivent

$$(4.1) \quad f \mapsto \langle f, g_0 \rangle + \sum_1^v \langle R_j f, g_j \rangle$$

où g_0, g_j ($1 \leq j \leq v$) sont des éléments de L^∞ .

5 Nous allons donner une représentation plus concrète d'une telle forme linéaire en faisant opérer les transformations de RIESZ sur L^∞ ($[RR]$, p. 70). Nous déduisons d'abord de (1.6) que

$$|k_t(y-x) - k_t(-x)| \leq B|y|/|x|^{v+1} \quad \text{si } |x| \geq 2|y|$$

donc pour y fixe, cette fonction est intégrable en x . Nous remarquons aussi que $|D_t k_t(x)| \leq 2tc_v/|x|^{v+3}$, de sorte que la fonction $k_t(x) - k_1(x)$ (ou $k_t(-x) - k_1(-x)$!) est intégrable. Cela nous permet d'introduire,

pour $t > 0$ les opérateurs sur L^∞ , donnés par de vrais noyaux

$$(5.1) \quad \bar{R}_{jt} f(y) = \int \bar{R}_{jt}(y, dx) f(x) = \int (k_t(y-x) - k_1(-x)) f(x) dx$$

Si f appartient à $L^\infty \cap L^2$, on a $\bar{R}_{jt} f = R_{jt} f + \text{Cte}$. Noter aussi que lorsque y reste dans un compact, la masse totale $\int |\bar{R}_{jt}(y, dx)|$ reste bornée.

6 LEMME. Si a appartient à \underline{H}_0^1 , on a pour $f \in L^\infty$

$$(6.1) \quad \langle R_{jt} a, f \rangle = - \langle a, \bar{R}_{jt} f \rangle$$

DEMONSTRATION. L'application $f \mapsto \langle R_{jt} a, f \rangle$ sur L^∞ est une mesure bornée (th.2), et de même $f \mapsto \langle a, \bar{R}_{jt} f \rangle$ (a est à support compact). Pour vérifier l'égalité sur L^∞ , il suffit de vérifier l'égalité pour $f \in L^\infty \cap L^2$. Mais alors, comme $\bar{R}_{jt} f = R_{jt} f + \text{Cte}$, et comme a est d'intégrale nulle, il suffit de prouver

$$\langle R_{jt} a, f \rangle = - \langle a, R_{jt} f \rangle \quad \text{si } f \in L^2$$

ce qui est immédiat, par transformation de Fourier par exemple.

7 COROLLAIRE. $\|\bar{R}_{jt} f\|_* \leq \theta \|f\|_\infty$, où θ ne dépend pas de t .

DEMONSTRATION. Prenons pour a un $(1,2)$ -atome. Nous avons vu dans le théorème 2 que $\|\bar{R}_{jt} a\|_{L^1} \leq \theta$. Donc $\sup_a |\langle a, \bar{R}_{jt} f \rangle| \leq \theta \|f\|_\infty$, et le membre de gauche est une norme équivalente à $\|f\|_*$ (§ I, n°7).

8 LEMME. $Q_s \bar{R}_{jt} f = \bar{R}_{j, s+t} f$ si $f \in L^\infty$.

DEMONSTRATION. Nous remarquons d'abord que $\bar{R}_{jt} f$ appartient à \underline{BMO} d'après 7, donc $Q_s |\bar{R}_{jt} f| < \infty$. Ensuite, si $f \in L^2 \cap L^\infty$, nous avons

$$\bar{R}_{jt} f = R_{jt} f + \text{Cte} \quad ; \quad \bar{R}_{j, s+t} f = R_{j, s+t} f + \text{Cte}$$

avec la même constante ($-\int k_1(-x) f(x) dx$). Donc la relation se réduit à l'identité $Q_s R_{jt} f = R_{j, s+t} f$. Enfin, la valeur de chacun des deux membres en un point y définit une mesure bornée en f , et deux mesures bornées égales sur $L^\infty \cap L^2$ sont égales.

9 Nous pouvons maintenant conclure : pour $f \in L^\infty$, considérons la fonction $r(x, t) = \bar{R}_{jt} f(x)$. D'après 8, c'est une fonction harmonique poissonnienne dans le demi-espace ouvert. D'après 7, on a $\|r_t\|_* \leq \theta \|f\|_\infty$. D'après un raisonnement tout semblable à celui du § III, n°5, il existe une fonction r sur le bord, telle que $\|r\|_* \leq \theta \|f\|_\infty$, et telle que $r_t = Q_t r$ pour tout t . Nous poserons

$$(9.1) \quad r = \bar{R}_j f \quad f \in L^\infty$$

et nous dirons que r est la j -ième transformée de RIESZ modifiée de f . Il résulte aisément de (6.1) que l'on a, pour $a \in \underline{H}_0^1$

$$\langle R_j a, f \rangle = - \langle a, \bar{R}_j f \rangle$$

Mais alors, revenons à 4. Il vient :

10 THEOREME. Toute forme linéaire continue sur \underline{H}_0^1 est le prolongement d'une forme linéaire sur \underline{H}_0^1 du type

$$(10.1) \quad f \mapsto \langle f, g \rangle \text{ où } g \text{ appartient à } \underline{BMO}.$$

DEMONSTRATION. Avec les notations de 4, $g = g_0 - \sum_1^v \bar{R}_j g_j$. Noter que g est uniquement déterminée à une constante additive près par la connaissance de la forme $f \mapsto \langle f, g \rangle$ sur \underline{H}_0^1 .

Il sera très facile de démontrer que le dual de \underline{H}_0^1 est \underline{BMO} , et plus difficile de démontrer que $\underline{H}_0^1 = \underline{H}_a^1$

V . L'ESPACE \underline{H}_p^1 PROBABILISTE

Nous allons maintenant rappeler quelques points de la théorie probabiliste de la dualité entre \underline{H}^1 et \underline{BMO} , telle qu'elle est exposée dans le séminaire X, p.336 sqq.

1 Soit μ une mesure initiale quelconque (non nécessairement bornée). Une martingale (M_t) pour la loi P^μ appartient à l'espace $\underline{H}^1(\mu)$ si elle satisfait à l'une des conditions équivalentes

$$(1.1) \quad E^\mu[M^*] < \infty \quad \text{où } M^* = \sup_t |M_t| \quad \text{ou} \quad E[[M, M]_\infty^{1/2}] < \infty$$

Nous munirons plutôt l'espace $\underline{H}^1(\mu)$ de sa norme "maximale"

$$(1.2) \quad \|M\|_{\underline{H}^1(\mu)} = E^\mu[M^*]$$

La norme " quadratique " $E^\mu[[M, M]_\infty^{1/2}]$ lui est équivalente (inégalités de DAVIS : les constantes d'équivalence ne dépendent pas de l'espace probabilisé).

Nous définissons maintenant l'espace $\underline{H}_p^1(\mu)$ (qui est un espace de fonctions prolongeables sur le bord) comme l'espace des fonctions f sur le bord, prolongeables, telles que la martingale

$$(1.3) \quad M_t = f(B_{t \wedge T_0}) \text{ appartienne à } \underline{H}^1(\mu)$$

et nous posons $\|f\|_{\underline{H}_p^1(\mu)} = \|M\|_{\underline{H}^1(\mu)}$. La lettre p signifie "probabiliste", par opposition à \underline{H}_a^1 (analytique) utilisé au § IV . Nous poserons

$$(1.4) \quad f^* = \sup_t |f(B_{t \wedge T_0})|$$

1. Rappelons qu'ici $[M, M] = \langle M, M \rangle$, les martingales étant continues.

- 2 Nous allons maintenant définir l'espace \underline{H}_p^1 tout court, sans mesure μ : rappelons que λ_a est la mesure de Lebesgue sur l'hyperplan $\{u=a\}$. Montrons que $E^{\lambda_a}[f^*]$ croît avec a . Soit $0 < b < a$. On a

$$\sup_{0 \leq s \leq T_0} |f(B_s)| \geq \sup_{T_b \leq s \leq T_0} |f(B_s)|$$

Intégrons par rapport à la mesure P^{λ_a} . Du côté gauche nous avons $E^{\lambda_a}[f^*]$. Du côté droit, d'après la propriété de Markov forte, $E^{\lambda_b}[f^*]$. Nous pouvons donc définir

DEFINITION. \underline{H}_p^1 est l'espace des f prolongeables, définies sur le bord, telles que

$$(2.1) \quad \|f\|_{\underline{H}_p^1} = \lim_{a \rightarrow \infty} \|f\|_{\underline{H}_p^1(\lambda_a)} < \infty .$$

Nous donnerons en appendice une interprétation de cette norme qui ne fait pas intervenir un passage à la limite (grâce à la théorie du retournement du temps).

- 3 Revenons à l'espace $\underline{H}^1(\mu)$ (toutes les martingales, pas seulement celles qui sont associées aux fonctions). On prouve dans le séminaire X, p.337, l'inégalité de FEFERMAN

(3.1). Si (M_t) appartient à $\underline{H}^1(\mu)$, si (N_t) appartient à $\underline{BMO}(\mu)$ (l'espace des martingales \underline{BMO} pour la mesure P^μ) on a

$$E^\mu \left[\int_{0, \infty} |d[M, N]_s| \right] \leq \theta \|M\|_{\underline{H}^1(\mu)} \|N\|_{\underline{BMO}(\mu)}^2$$

et le théorème de dualité nous dit (p.338) que toute forme linéaire continue sur $\underline{H}^1(\mu)$ est de la forme $M \mapsto E[[M, N]_\infty]$, où N appartient à $\underline{BMO}(\mu)$.

En particulier, si g est une fonction sur le bord, qui appartient à \underline{BMO} , la martingale $g(B_{t \wedge T_0}) - g(B_0) = N_t$ est nulle en 0, et appartient à $\underline{BMO}(\mu)$, avec une norme $\leq \theta \|g\|_*$ (§ III, n°5) indépendante de μ . Il n'y a pas de terme en $M_0 N_0$, et nous connaissons, par polarisation de la formule (3.2) du § II, l'expression explicite des crochets $[M, N]$. Nous avons donc

$$(3.2) \quad E^\mu \left[\int_0^\infty 2 |\text{grad} f(B_s) \cdot \text{grad} g(B_s)| ds \right] \leq \theta \|f\|_{\underline{H}_p^1(\mu)} \|g\|_*$$

Le côté gauche vaut $< \mu, 2V(|\text{grad} f \cdot \text{grad} g|) >$. Prenons en particulier $\mu = \lambda_a$, il vient

$$(3.3) \quad \int_0^\infty dx \int_0^\infty u \wedge a |\text{grad} f(x, u) \cdot \text{grad} g(x, u)| du \leq \theta \|f\|_{\underline{H}_p^1(\lambda_a)} \|g\|_*$$

1. Une lecture inattentive de la référence laisserait croire que $\theta = \sqrt{2}$, mais en fait la norme que l'on utilise sur \underline{H}^1 n'est pas la même.

et en faisant tendre a vers +∞

$$(3.4) \int dx \int_0^\infty 2u |\text{grad}f(x,u) \cdot \text{grad}g(x,u)| du \leq \theta \|f\|_{\underline{H}_p^1} \|g\|_*$$

On peut considérer cela comme une forme analytique précise de l'inégalité de FEFERMAN. Explicitons en une conséquence

- 4 THEOREME. Pour tout a>0, soit
 (4.1) $\Lambda_a(f,g) = \int dx \int_0^\infty 2u^a \text{grad}f(x,u) \cdot \text{grad}g(x,u) du$
et soit $\Lambda(f,g) = \Lambda_\infty(f,g)$. Cette forme bilinéaire est bien définie et continue (uniformément en a) sur le produit $\underline{H}_p^1 \times \underline{BMO}$, et l'on a $\lim_a \Lambda_a(f,g) = \Lambda(f,g)$.

La formule de Plancherel permet de voir que , lorsque f et g appartiennent à L^2 , on a $\int fg \lambda = \Lambda(f,g)$. Cela peut aussi se démontrer de manière probabiliste, mais nous ne donnerons pas de détails, car nous aurons à démontrer plus loin cette égalité lorsque f est un atome et g appartient à \underline{BMO} , et le principe de la démonstration est le même.

CONSTRUCTION D'ELEMENTS DE \underline{H}_p^1

Nous démontrons maintenant un résultat fondamental. Nous en donnons en fait deux démonstrations : l'une au n°6, l'autre au n°8 ou 9 - mais cela n'apparaîtra que plus tard. Le n°8, par ailleurs, nous servira directement.

- 5 THEOREME. Les (1,2)-atomes appartiennent à \underline{H}_p^1 , et plus précisément forment un ensemble borné dans \underline{H}_p^1 .

Nous avons vu plus haut que les (1, 2)-atomes forment un ensemble borné dans \underline{H}_a^1 (§ IV, n°2), donc il suffit de montrer

- 6 THEOREME. $\|f\|_{\underline{H}_p^1} \leq \theta \|f\|_{\underline{H}_a^1}$.

DEMONSTRATION. Nous posons $f_0=f$, et nous désignons par f_i ($1 \leq i \leq \nu$) les transformées de RIESZ de f, qui appartiennent toutes à L^1 par hypothèse. La définition des transformées de RIESZ entraîne immédiatement, en regardant les transformées de Fourier, que l'on a pour les prolongements harmoniques de f et des f_i les relations

$$(6.1) \quad D_0 f_i = D_i f_0 \quad (i=1, \dots, \nu; D_0 = D^-) \quad ; \quad \sum_0^\nu D_j f_j = 0$$

Nous considérons la martingale vectorielle $F_t = (f_0(B_{t \wedge T_0}), \dots, f_\nu(B_{t \wedge T_0}))$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{\nu+1}$. Elle s'écrit

$$(6.2) \quad F_t^i = F_0^i + \sum_k \int_0^t U_{ks}^i d\beta_s^k \quad \text{où } U_{ks}^i = D_k f_i(B_{t \wedge T_C}), \quad \beta_s^k = B_{t \wedge T_0}^k$$

Nous allons montrer qu'il existe un exposant $q < 1$ tel que, pour toute loi P^ξ , le processus $(\varepsilon + \sum F_t^{i2})^{q/2}$ soit une sousmartingale. Appliquant alors l'inégalité de DOOB avec l'exposant $1/q > 1$, nous aurons

$$(6.3) \quad E^\xi [(\varepsilon + \sum F_t^{i2})^{1/2}]^* \leq c_q E^\xi [(\varepsilon + \sum F_\infty^{i2})^{1/2}]$$

après quoi on fait tendre ε vers 0, puis on intègre par rapport à λ_a , puis on fait tendre a vers l'infini. Du côté droit on a une norme équivalente à $\|f\|_{\underline{H}_a}^1$. Du côté gauche, on obtient un résultat meilleur que celui qui est annoncé, à savoir que

si f appartient à \underline{H}_a^1 , toutes les $R_i f$ appartiennent à \underline{H}_p^1 .

7 Pour établir le résultat concernant la sousmartingale, nous reprenons la formule (6.1), et nous posons sur \mathbb{R}^{v+1}

$$h(x) = (\varepsilon + \sum x_i^2)^{q/2}$$

la formule d'ITO nous dit que

$$h(F_t) = h(F_0) + \text{martingale} + \frac{1}{2} \sum_0^t D_i D_j h(F_s) U_{ks}^i U_{ls}^j d\langle \beta^k, \beta^l \rangle_s$$

On a $d\langle \beta^k, \beta^l \rangle_s = I_{\{s < T_0\}} \delta^{kl} ds$. Donc pour finir il suffit de vérifier que

$$\sum_{ijk\ell} D_i D_j h(F_s) U_{ks}^i U_{ls}^j \delta^{k\ell}$$

est positif. Ou encore qu'en tout point x , et quelle que soit la matrice U_k^i symétrique et de trace nulle, on a

$$(7.1) \quad \sum D_i D_j h(x) U_k^i U_\ell^j \delta^{k\ell} \geq 0$$

Dans le cas qui nous occupe, nous avons en posant $|x|=r$

$$D_i D_j h(x) = A(x) [(q-2)x_i x_j + (\varepsilon+r^2)\delta_{ij}] \quad A(x) \geq 0$$

Nous avons d'abord $\varepsilon \sum \delta_{ij} U_k^i U_\ell^j \delta^{k\ell} \geq 0$. Inutile donc de s'occuper du terme en ε ! Ce qui reste est homogène, une forme quadratique en les x_i .

$\sum \delta_{ij} U_k^i U_\ell^j \delta^{k\ell} = \sum (U_k^i)^2$ est alors la somme $\sum \lambda_i^2$, où les λ_i sont les

valeurs propres. La relation $\lambda_0 = \sum_{i>0} -\lambda_i$ (trace nulle) entraîne $\lambda_0^2 \leq \sum_{i>0} \lambda_i^2$ (Schwarz), puis $(v+1)\lambda_0^2 \leq v \sum_{i>0} \lambda_i^2$. Cela vaut pour toute valeur propre, et l'on a donc $|\sum x_i x_j U_k^i U_\ell^j \delta^{k\ell}| \leq r^2 \sup_i |\lambda_i| \leq \frac{v}{v+1} \sum \lambda_i^2$. Reste donc comme minoration

$$A(x)r^2 \cdot \sum \lambda_i^2 \cdot [1+(q-2)\frac{v}{v+1}], \text{ positif si } q > \frac{v-1}{v}$$

Cette démonstration est servilement copiée de STEIN, Singular integrals and differentiability properties of functions, p. 217. Mais je dois dire que j'ai été frappé de la propriété (7.1), qui est liée à la convexité (positivité sans restriction de (7.1)) un peu de la même manière que le "type négatif" au "type positif" en analyse harmonique.

- 8 L'autre procédé va consister à évaluer, si a est un $(1,2)$ -atome, l'intégrale de la fonction maximale radiale associée à a :

$$(8.1) \quad a^-(y) = \sup_u |Q_u(y, a)|.$$

et à montrer qu'elle est bornée indépendamment de a . Nous verrons dans le second exposé que cette propriété caractérise H_p^1 . On se ramène aussitôt au cas où

$$(8.2) \quad a \text{ est une fonction d'intégrale nulle, à support dans la boule unité de } \mathbb{R}^v, \text{ telle que } \int a^2(x) dx \leq 1.$$

après quoi on procède par translation et dilatation, pour atteindre les $(1,2)$ -atomes généraux.

$$\text{Nous allons calculer séparément } \int_{|y| \leq 2} a^-(y) dy \text{ et } \int_{|y| > 2} a^-(y) dy$$

PREMIERE INTEGRALE. Nous n'utilisons pas le fait que a est d'intégrale nulle ; nous écrivons simplement que

$$(8.3) \quad \|a^-\|_2 \leq \theta \|a\|_2$$

qui est un résultat classique (se ramenant à l'inégalité de DOOB pour une martingale convenable : voir l'appendice 1 . Voir aussi dans le séminaire X p.167 une démonstration par la théorie ergodique). Nous majorons alors $\int_{|y| \leq 2} a^-(y) dy$ par l'inégalité de SCHWARZ.

SECONDE INTEGRALE. Nous écrivons que a est nulle hors de la boule unité, et d'intégrale nulle

$$(8.4) \quad Q_t(y, a) = \int_{|x| \leq 1} (q_t(y-x) - q_t(y)) a(x) dx$$

Or nous avons

$$|D_i q_t(x)| = \theta (t^2 + |x|^2)^{-(v+1)/2} t x_i / (t^2 + |x|^2)$$

et comme $2t x_i \leq t^2 + |x_i|^2$ il reste $|D_i q_t(x)| \leq \theta (t^2 + |x|^2)^{-(v+1)/2}$. Si $|y| \geq 2$, $|x| \leq 1$ on a $|y| \geq 2|x|$ et

$$\begin{aligned} |q_t(y-x) - q_t(y)| &\leq \theta |x| \sup_{0 \leq s \leq 1} (t^2 + |y-sx|^2)^{-(v+1)/2} \\ &\leq \theta |x| |y|^{-(v+1)} \text{ car } |y-sx| \geq |y|/2 \end{aligned}$$

et comme $|x| \leq 1$ il reste

$$(8.5) \quad |Q_t(y, a)| \leq \theta \int_{|x| \leq 1} |y|^{-v-1} |a(x)| dx \leq \theta |y|^{-v-1}$$

qui est intégrable sur $\{|y| \geq 2\}$. Il ne reste plus qu'à passer au sup en t .

- 9 Avant d'en tirer une conséquence assez importante, mentionnons qu'un calcul analogue peut se faire à la main pour démontrer l'intégrabilité de la fonction maximale conique

$$(9.1) \quad a^<(y) = \sup_{(x,u) \in \Gamma_y} |Q_u(x, a)| \quad \Gamma_y = \{(y, u) : |y-x| \leq u\}$$

où l'on prend le sup sur un cône d'ouverture fixe de sommet y , au lieu du rayon issu de y . Ce n'est pas une simple vanterie : le calcul (sans intérêt) figurait dans la première rédaction.

- 10 Revenons au n°8, avec les mêmes notations. Soit J le cube homothétique du cube unité dans le rapport 2. La formule (8.5) nous donne

$$a^-(y) \leq \theta(1+|y|^2)^{-(v+1)/2} \quad \text{pour } |y| \geq 2$$

et alors la formule (1.2) du § III n°1 nous donne (le fait que l'on ait doublé le cube n'ayant aucune importance !)

$$\int_{|y| \geq 2} a^-(y) |g(y) - g_J| dy \leq \theta \|g\|_*$$

D'autre part on a $\int_{|y| \leq 2} a^-(y) |g(y) - g_J| dy \leq \|a^-\|_2 \|(g - g_J)I_J\|_2 \leq \theta \|g\|_*$.

Ainsi on a, pour toute fonction $g \in \underline{\underline{BMO}}$

$$(10.1) \quad \int a^-(y) |g(y) - g_J| dy \leq \theta \|g\|_*$$

La formule (10.1) n'a pas d'importance en elle même, mais l'intégrabilité de $a^-|g|$ pour toute $g \in \underline{\underline{BMO}}$ va nous permettre, par convergence dominée, de démontrer un résultat important.

- 11 THEOREME. Si f appartient à \underline{H}_0^1 , si g appartient à $\underline{\underline{BMO}}$, on a $\Lambda(f, g) = fg\lambda$.

DEMONSTRATION. Nous écrivons la formule

$$E^\xi[M_\infty N_\infty] = E^\xi[M_0 N_0] + E^\xi[\int_0^\infty d\langle M, N \rangle_s]$$

pour les deux martingales $(M_t) = (f(B_t \wedge T_0))$ et $(N_t) = (g(B_t \wedge T_0))$, bornées dans L^2 pour la loi P^ξ . Cela nous donne, si $0 \leq \xi = (x, u)$

$$Q_u(x, fg) = f(x, u)g(x, u) + 2V(\xi, \text{grad}f. \text{grad}g).$$

Intégrons par rapport à la mesure $\lambda_a(d\xi)$; f appartenant à L^2 et étant à support compact, g appartenant à L_{loc}^2 , $|fg|$ appartient à L^1 et est à support compact, donc $\int |fg|\lambda = \int Q_a(|fg|)\lambda < \infty$. La fonction $|g|$ appartient à $\underline{\underline{BMO}}$ (§ 1, n°4), la fonction $Q_a|g|$ aussi (§ III, n°2), donc $\int f^- Q_a|g|\lambda < \infty$ (n°10) et en particulier $\int Q_a f^- |g|\lambda < \infty$. Enfin, nous avons $2/V(\xi, |\text{grad}f. \text{grad}g|)\lambda_a(d\xi) < \infty$ puisque f appartient à \underline{H}_p^1 et g à $\underline{\underline{BMO}}$ (n°3).

Nous pouvons donc écrire

$$\int fg\lambda = \int f_a g_a \lambda + \Lambda_a(f, g)$$

et comme $\Lambda_a(f, g)$ tend vers $\Lambda(f, g)$ lorsque $a \rightarrow \infty$ par convergence dominée (n°4), il nous suffit de démontrer que $\int f_a g_a \lambda \rightarrow 0$. Mais nous avons

$\int |Q_a f^-| Q_a |g|\lambda < \infty$, donc $\langle Q_a f, Q_a g \rangle_\lambda = \langle Q_{2a} f, g \rangle_\lambda$. Enfin, $Q_{2a} f$ tend vers 0 dans L^2 (Plancherel) donc en mesure, et nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée puisque $|Q_{2a} f| \leq f^-$ et que $\int f^- |g|\lambda < \infty$.

D'où la conclusion. En particulier, d'après (3.4) et 6.

- 12 COROLLAIRE. Si $f \in \underline{H}_0^1$ et $g \in \underline{\underline{BMO}}$ on a $\int fg\lambda \leq \theta \|f\|_{\underline{H}_a^1} \|g\|_*$

EXPOSE II : LE THEOREME DE DUALITE

Dans cet exposé, nous allons présenter d'abord le théorème de dualité sous sa forme la plus complète, puis nous traiterons une théorie des transformations de RIESZ, ne reposant pas sur les calculs explicites de l'exposé I, §4 . Nous démontrerons d'autre part, presque complètement, le théorème de BURKHOLDER, GUNDY et SILVERSTEIN caractérisant \underline{H}^1 au moyen de la fonction maximale radiale ou conique.

Le numérotage des paragraphes suit celui de l'exposé I.

§ VI . DEMONSTRATION DU THEOREME DE DUALITE

1 Si l'on veut comprendre clairement le problème qui reste à résoudre, il faut éviter de mélanger les espaces \underline{H}_a^1 et \underline{H}_p^1 . Nous nous occupons uniquement de \underline{H}_p^1 et nous rappelons deux faits établis dans l'exposé I.

(1.1) Les (1,2)-atomes forment un ensemble borné dans \underline{H}_p^1 .

(1.2) Si f est un (1,2)-atome, si $g \in \underline{BMO}$, on a $\int fg \lambda = \Lambda(f,g)$, et la forme Λ est bornée sur $\underline{H}_p^1 \times \underline{BMO}$.

Rappelons bien aussi comment cela s'obtient : (1.1) résulte d'un calcul fait à la main, à partir d'une condition suffisante analytique d'appartenance à \underline{H}_p^1 . (1.2) cache l'inégalité de FEFPERMAN et dit, d'une part que l'on sait majorer $E[[M,N]_\infty]$ en fonction de $\|M\|_{\underline{H}^1} \|N\|_{\underline{BMO}}$, et d'autre part que l'on peut interpréter $E[[M,N]_\infty]$ simplement comme $E[M_\infty N_\infty]$.

Les démonstrations de ces théorèmes n'ont pas été spécialement simples, mais toutes les difficultés sont venues du fait que la mesure de Lebesgue n'est pas bornée. Imaginons un instant, en effet, qu'elle le soit. Nous démontrons (1.1) en prenant un cube fixe, et en regardant les atomes relatifs à ce cube. Ils forment un ensemble borné dans L^2 , donc (inégalité de DOOB) dans \underline{H}^2 , contenu dans \underline{H}^1 avec norme plus forte. Puis nous changeons de cube grâce aux dilatations, qui préservent la norme \underline{H}^1 . De même, en (1.2), il n'y a aucune difficulté quand au passage de $E[[M,N]_\infty]$ à $E[M_\infty N_\infty]$, puisque les deux martingales sont bornées dans L^2 . La seconde simplification se présente effectivement dans le cas du disque, mais je ne sais pas si l'on peut utiliser, dans ce cas, quelque chose d'analogue aux dilatations.

Rappelons que \underline{H}_0^1 désigne le sous-espace engendré par les atomes, i.e. l'espace des fonctions de carré intégrable, à support compact, d'intégrale nulle, et que \underline{H}_0^1 est l'adhérence de \underline{H}_0^1 dans \underline{H}_p^1 (ou si l'on veut le complété de \underline{H}_0^1).

On a immédiatement un petit théorème de dualité :

THEOREME. Le dual de \underline{H}_0^1 est \underline{BMO} . Toute forme linéaire I continue sur \underline{H}_0^1 est prolongement par continuité d'une forme linéaire sur \underline{H}_0^1 du type

$$(2.1) \quad f \mapsto \int fg \lambda \quad \text{où } g \in \underline{BMO} \text{ est déterminée à une constante près,}$$

et on a alors $I(f) = \Lambda(f, g)$ pour tout $f \in \underline{H}_0^1$.

DEMONSTRATION. Nous savons déjà que si $g \in \underline{BMO}$, la forme linéaire (2.1) sur \underline{H}_0^1 s'écrit aussi $f \mapsto \Lambda(f, g)$, et donc se prolonge à \underline{H}_p^1 , qui contient \underline{H}_0^1 . L'unicité de g à une constante près est aussi évidente. Il reste donc à vérifier que toute forme linéaire continue I s'obtient ainsi.

Soit J le cube unité, et soit J_n le cube homothétique $n \cdot J$. Soit $f \in \underline{H}_0^1$ à support dans J_n ; la fonction $\frac{1}{|J_n|^{1/2}} \frac{f}{\|f\|_2}$ est un (1,2)-atome, et on a donc $|I(f)| \leq c |J_n|^{1/2} \|f\|_2$, où c est la norme de I. Donc il existe une fonction $g_n \in L^2$, nulle hors de J_n , telle que $I(f) = \int fg_n \lambda$ pour toute $f \in \underline{H}_0^1$ à support dans J_n . Comme toute f est d'intégrale nulle, g_n est déterminée à une constante près, que nous choisirons en imposant que la moyenne $(g_n)_J$ sur le cube unité soit nulle. Cette normalisation étant imposée, on vérifie aussitôt que les g_n se raccordent en une seule fonction g, et la continuité de I exprime que g appartient à \underline{BMO} .

On voit bien pourquoi il a fallu travailler sur les (1,2)-atomes, et non sur les (1,∞)-atomes : on serait tombé sur le dual de L^∞ , et on n'aurait pu continuer.

3 Le théorème de dualité complet << le dual de \underline{H}_p^1 est \underline{BMO} >> est maintenant équivalent à l'assertion suivante

$$(3.1) \quad \underline{H}_0^1 \text{ est dense dans } \underline{H}_p^1$$

Il faut remarquer que c'est un problème sérieux, que de trouver un ensemble dense dans \underline{H}_p^1 ! Voir STEIN [S], p.225, ligne 20, puis la démonstration p.230-231, puis l'échappatoire "that such f are dense in L_0^1 can be proved by elementary computation, or one can appeal to WIENER's theorem characterizing the maximal ideals of L^1 " qui évite d'écrire encore une page de démonstration. Nous allons suivre ici une méthode purement probabiliste.

Nous exprimons la propriété (1.2) sous la forme d'un lemme, qui contient l'essentiel de l'histoire. Dès qu'on l'a énoncé, on s'aperçoit qu'il y a un vide gênant. Peut-on le généraliser¹ à des martingales non bornées ? Il n'est même pas évident que l'espérance considérée ait un sens.

- 4 LEMME. Fixons $a > 0$. Soit (V_t) une martingale bornée pour la mesure P^{λ_a} , et soit k une fonction borélienne sur \mathbb{R}^v satisfaisant à

$$(4.1) \quad k(X_{T_0}) = E^{\lambda_a}[V_\infty | X_{T_0}] \text{ p.s.}$$

(rappelons les notations : $B_t = (X_t, U_t)$, $B_{T_0} = (X_{T_0}, 0)$). Alors k appartient à $\underline{\underline{BMO}}$ et l'on a

$$(4.2) \quad \|k\|_* \leq \theta \|V\|_{\underline{\underline{BMO}}(\lambda_a)}$$

DEMONSTRATION. On écrit la chaîne d'inégalités suivante, où tout est immédiat à justifier du fait que (V_t) est bornée. Soit j un $(1, \infty)$ -atome ; on a $\|j\|_{\underline{\underline{H}}^1_p(\lambda_a)} \leq \theta$ et

$$\begin{aligned} |/j k \lambda| &= |E^{\lambda_a}[j(X_{T_0})k(X_{T_0})]| = |E^{\lambda_a}[j(X_{T_0})V_\infty]| = |E^{\lambda_a}[M_\infty V_\infty]| \\ &= |E^{\lambda_a}[[M, V]_\infty]| \leq \theta \|V\|_{\underline{\underline{BMO}}}. \end{aligned}$$

Il reste à passer au sup sur j , et on obtient (4.2).

Nous savons que nous pouvons "tester" l'appartenance à $\underline{\underline{BMO}}$ au moyen des atomes, et que ceux-ci appartiennent à une boule de $\underline{\underline{H}}^1_p$. Nous allons en déduire - par application de la dualité probabiliste entre $\underline{\underline{H}}^1_p(\lambda_a)$ et $\underline{\underline{BMO}}(\lambda_a)$ - que l'on peut tester l'appartenance à $\underline{\underline{H}}^1_p$ au moyen de certains éléments de $\underline{\underline{BMO}}$.

- 5 DEFINITION. Nous désignons par \mathcal{G} l'ensemble des $g \in \underline{\underline{BMO}}$ telles que

$$(5.1) \quad \|g\|_* \leq 1, \quad |g(x)| \leq A(1+|x|^2)^{-(v+1)/2}.$$

La constante A peut dépendre de g . De telles fonctions appartiennent à tous les L^p , et d'autre part, si f est prolongeable, l'inégalité $Q_1(0, |f|) < \infty$ entraîne $/|fg|\lambda < \infty$ pour $g \in \mathcal{G}$, ce qui donne un sens à l'énoncé suivant

- 6 THEOREME. Soit f une fonction prolongeable. Alors

$$(6.1) \quad \|f\|_{\underline{\underline{H}}^1_p} \leq \theta \sup_{g \in \mathcal{G}} /fg\lambda$$

DEFINITION. Si f n'appartient pas à L^1 , le second membre vaut $+\infty$ (il suffit de prendre des g bornées à support compact dans le sup !), et il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $f \in L^1$.

1. Nous le ferons, mais après la démonstration du th. de dualité (n°12).

Soit δ (fini) tel que $\delta < \|f\|_{\underline{H}_p^1}$ (finie ou non). D'après la définition de \underline{H}_p^1 , nous pouvons choisir a assez grand pour que l'on ait

$$\delta < \|f\|_{\underline{H}_p^1(\lambda_a)}$$

Considérons la martingale $M_t = f(B_{t \wedge T_0})$, posons $q_1(x) = c_\nu(1+|x|^2)^{-(\nu+1)/2}$ (noyau de POISSON), et introduisons le temps d'arrêt

$$(6.2) \quad R = \inf \{ t : |M_t - M_0| \geq cq_1(X_0) \}$$

$R=R(c,M)$ dépend de la martingale (M_t) et de la constante c , que l'on choisira très grande. La martingale arrêtée $M_{t \wedge R} = M_t^R$ appartient à $\underline{H}_p^1(\lambda_a)$, puisqu'elle est majorée par $|M_0| + cq_1(B_0) \in L^1$. Nous choisirons c assez grand pour que $\delta < \|M^R\|_{\underline{H}_p^1(\lambda_a)}$ et n'y toucherons plus.

D'après le théorème de FEFERMAN probabiliste, il existe une martingale (U_t) de norme $\underline{BMO}(\lambda_a) \leq 1$, telle que l'on ait

$$\begin{aligned} \|M^R\|_{\underline{H}_p^1(\lambda_a)} &\leq \mathbb{E}^{\lambda_a} [U_0 M_0^R + \int_{0+}^{\infty} d[U, M^R]_s] \\ &= \mathbb{E}^{\lambda_a} [U_0 M_0 + \int_{0+}^R d[U, M]_s] \end{aligned}$$

- le théorème de FEFERMAN n'est pas établi, d'habitude, pour des espaces de mesure infinie, mais il n'y a aucune difficulté lorsque la mesure est σ -finie sur \underline{F}_0 , comme c'est le cas ici. Introduisons à nouveau un temps d'arrêt $R'=R(c',U)$ relatif à (U_t) , et soit V_t la martingale $U_{t \wedge R'} - U_0$. Si c' est assez grand, l'intégrale

$$\mathbb{E}^{\lambda_a} \left[\int_{0+}^{\infty} d[V, M^R]_s \right] = \mathbb{E}^{\lambda_a} \left[\int_{0+}^{R'} d[U, M^R]_s \right]$$

est arbitrairement voisine de $\mathbb{E}^{\lambda_a} \left[\int_{0+}^{\infty} d[U, M^R]_s \right]$ (convergence dominée).

Nous choisissons c' assez grand pour que

$$(6.3) \quad \delta < \mathbb{E}^{\lambda_a} [U_0 M_0 + \int_{0+}^{\infty} d[V, M^R]_s] = \mathbb{E}^{\lambda_a} [U_0 M_0 + V_R M_\infty]$$

En effet, la martingale (V_t) est dominée par $c'q_1(B_0)$ qui est bornée, et l'on a donc, V étant nulle en 0

$$\mathbb{E}^{\lambda_a} \left[\int_{0+}^{\infty} d[V, M^R]_s \right] = \mathbb{E}^{\lambda_a} [V_\infty M_\infty^R] = \mathbb{E}^{\lambda_a} [V_\infty M_R] = \mathbb{E}^{\lambda_a} [V_R M_R] = \mathbb{E}^{\lambda_a} [V_R M_\infty]$$

Rappelons aussi que dans (6.3)

- U_0 est \underline{F}_0 -mesurable, bornée par 1 du fait que $\|U\|_{\underline{BMO}(\lambda_a)} \leq 1$
- V est une martingale nulle en 0, de norme $\underline{BMO} \leq 1$, dominée par $cq_1(B_0)$, et en particulier bornée.

Introduisons deux fonctions h et k sur le bord, définies par

$$\begin{aligned} h(X_0) &= U_0 \quad (U_0 \text{ est mesurable par rapport à la tribu engendrée} \\ &\quad \text{par } B_0 = (X_0, a)) \\ k(X_{T_0}) &= E^{\lambda a} [V_R | X_{T_0}] \end{aligned}$$

La formule (6.3) nous donne alors

$$\delta < \Theta E^{\lambda a} [U_0 M_0 + V_R M_\infty] = \int f(Q_a h + k) \lambda$$

en effet, $E^{\lambda a} [U_0 M_0] = E^{\lambda a} [(f_a h) \circ X_0] = \int f_a h \lambda = \int f \cdot Q_a h \lambda$. De même, $M_\infty = f(B_{T_0})$, donc on peut remplacer V_R par $E^{\lambda a} [V_R | B_{T_0}]$, et le second terme donne $\int f k \lambda$.

Nous faisons alors une dernière transformation, en posant $g = Q_a h \cdot I_K + k$, où K est un compact assez gros pour que l'on ait encore $\delta < \Theta / fg \lambda$. Nous vérifions que g possède les propriétés exigées dans la définition de \mathfrak{G} .

1) D'après le lemme 4, $\|k\|_* \leq \Theta \|V_R\|_{\underline{BMO}} = \Theta$. D'autre part, h est bornée par 1, donc $Q_a h \cdot I_K$ aussi, et pour finir $\|g\|_{\underline{BMO}} \leq \Theta$.

2) $Q_a h \cdot I_K$ est bornée à support compact. V_R est majorée par $c q_1(B_0)$ et nous avons donc en conditionnant

$$|k(X_{T_0})| \leq c' \int Q_a(X_{T_0}, dy) q_1(y) = c' q_{1+a}(X_{T_0})$$

et par conséquent $|k(x)| \leq A(1+|x|^2)^{-(v+1)/2}$.

Le théorème est établi.

7 Nous démontrons maintenant que les (1,2)-atomes relatifs au semi-groupe (Q_t) (§ III, n°2) appartiennent à \underline{H}_p^1 .

THEOREME. Soit f une fonction intégrable, d'intégrale nulle, telle que

$$(7.1) \quad \int f^2(x) (1+|x|^2)^{(v+1)/2} \leq 1$$

On a alors $\|f\|_{\underline{H}_p^1} \leq \Theta$.

DEMONSTRATION. D'après 6, il suffit de montrer que si g satisfait à (5.1) on a $|\int fg \lambda| \leq \Theta$. Or soit $\bar{g} = g - Q_1(0, g)$; comme f est intégrable d'intégrale nulle, fg et $f\bar{g}$ sont simultanément intégrables (avec la même intégrale). D'autre part

$$f(x)\bar{g}(x) = \bar{g}(x)\sqrt{q_1(x)} \cdot f(x)/\sqrt{q_1(x)}$$

Appliquons l'inégalité de SCHWARZ. Le second facteur fournit $(\int f^2/q_1 \lambda)^{1/2} \leq 1$ d'après (7.1). Le premier fournit $Q_1(0, (g - Q_1(0, g))^{1/2} \leq \Theta \|g\|_*$ III.1).

Ainsi $f\bar{g}$ est intégrable et $|\int f\bar{g} \lambda| \leq \Theta \|g\|_* \leq \Theta$.

8 **LEMME** . Soit \underline{K} l'ensemble des fonctions f intégrables, d'intégrale nulle et telles que $|f(x)| \leq A(1+|x|^2)^{-(v+1)/2}$. Alors \underline{K} est dense dans \underline{H}_p^1 .

DEMONSTRATION. Soit $j \in \underline{H}_p^1$, et soit $(M_t) = (j(B_{t \wedge T_0}))$ la martingale correspondante. Soit $N_t = M_t - M_0$. Nous avons

$$\|M - N\|_{\underline{H}_p^1(\lambda_a)} = E^{\lambda_a}[|M_0|] = \int |Q_a j| \lambda$$

NOUS DEMONTRERONS EN APPENDICE¹ QUE CETTE INTEGRALE TEND VERS 0 lorsque $a \rightarrow \infty$: c'est un tout petit résultat, tout à fait élémentaire, de convergence dominée. Pour l'instant, étant donné $\varepsilon > 0$, choisissons a assez grand pour que cette intégrale soit $< \varepsilon/2$.

Ce choix étant fait, nous considérons un temps d'arrêt de la forme

$$R = \inf \{ t : |N_t| \geq c q_1(X_0) \}$$

et nous désignons par (U_t) la martingale nulle en 0 $(N_{t \wedge R})$. Elle est dominée par $c q_1(X_0)$, et nous avons

$$E^{\lambda_a}[\sup_t |N_t - U_t|] = E^{\lambda_a}[\sup_{t \geq R} |N_t - N_R|]$$

Lorsque $c \rightarrow \infty$, on a $I_{\{R < \infty\}} \rightarrow 0$, donc la variable aléatoire sous le signe E , dominée par $2N^*$, tend vers 0 dans L^1 . Donc pour c assez grand $\|N - U\|_{\underline{H}_p^1(\lambda_a)} < \varepsilon/2$, et $\|M - U\|_{\underline{H}_p^1(\lambda_a)} > \varepsilon$.

Soit enfin k la fonction définie par $k(X_{T_0}) = E^{\lambda_a}[U_\infty | X_{T_0}]$. Comme U_∞ est P^{λ_a} -intégrable d'intégrale nulle, k est λ -intégrable d'intégrale nulle. Comme $|U_\infty| \leq c q_1(X_0)$, on a $|k(x)| \leq c q_{1+a}(x)$, et k appartient à \underline{K} . Reste à évaluer $\|k - j\|_{\underline{H}_p^1}$. Pour cela, nous prenons $g \in \mathcal{G}$ et la martingale $G_t = g(B_{t \wedge T_0})$ correspondante. Nous avons

$$\begin{aligned} \int (k - j) g \lambda &= E^{\lambda_a}[g(X_{T_0})(M_\infty - k(X_{T_0}))] = E^{\lambda_a}[g(X_{T_0})(M_\infty - U_\infty)] \\ &= E^{\lambda_a}[G_\infty(M_\infty - U_\infty)] \end{aligned}$$

Comme G_∞ est bornée, nous pouvons calculer cela au moyen de l'inégalité de FEFERMAN probabiliste, et il vient

$$|\int (k - j) g \lambda| \leq \theta \|M - U\|_{\underline{H}_p^1(\lambda_a)} \|G\|_{\underline{BMO}} \leq \theta \varepsilon$$

Il ne reste plus qu'à passer au sup sur $g \in \mathcal{G}$, et à appliquer 6.

- 9 THEOREME DE DUALITE . 1) Le dual de \underline{H}_p^1 est \underline{BMO} .
2) Les $(1, \infty)$ -atomes forment un ensemble dense dans \underline{H}_p^1 .

DEMONSTRATION. Soit μ la mesure de densité $(1 + |x|^2)^{-(\nu+1)/2}$. L'intégrale ordinaire $\int f \lambda$ est une forme linéaire continue sur $L^2(\mu)$, et le théorème 7 nous dit que l'espace $L_0^2(\mu)$ des fonctions d'intégrale nulle est contenu dans \underline{H}_p^1 , avec une norme plus forte. Il est très facile de vérifier que

les éléments de $L_0^2(\mu)$ à support compact (i.e. les éléments de \underline{H}_0^1)
forment un ensemble dense dans $L_0^2(\mu)$.

Soit I une forme linéaire continue sur \underline{H}_p^1 , nulle sur \underline{H}_0^1 . D'après le théorème 7, elle est continue sur $L_0^2(\mu)$. Donc nulle sur $L_0^2(\mu)$. D'après le lemme 8, elle est nulle sur \underline{H}_p^1 . D'après le théorème de HAHN-BANACH, \underline{H}_0^1 est dense dans \underline{H}_p^1 . D'après 2 et 3, la première assertion est établie.

2) résulte alors d'une nouvelle application du th. de HAHN-BANACH.

APPLICATION AUX TRANSFORMEES DE RIESZ

10 Nous avons vu au § IV, n°10, que si f est un atome

$$(10.1) \quad \|f\|_{\underline{H}_a^1} \leq \theta \sup \langle f, g \rangle$$

où $g = g_0 - \sum_1^v \bar{R}_j g_j$, et $\|g_i\|_{\infty} \leq 1$ pour $i=0, \dots, v$. D'après le § IV n°7 on a donc

$$\|f\|_{\underline{H}_a^1} \leq \theta \sup_{\|g\|_{\infty} \leq 1} \langle f, g \rangle \leq \theta \|f\|_{\underline{H}_p^1} \quad (\text{th. de dualité, n°9 !})$$

mais d'autre part, au § V n°6 nous avons vu l'inégalité inverse : $\underline{H}_a^1 \subset \underline{H}_p^1$ avec une norme plus forte. Au § IV n°2 nous avons vu que $\underline{H}_0^1 \subset \underline{H}_a^1$.

Ainsi \underline{H}_a^1 et \underline{H}_p^1 induisent sur \underline{H}_0^1 des normes équivalentes. D'après le n°9, l'inclusion $\underline{H}_0^1 \subset \underline{H}_a^1 \subset \underline{H}_p^1$ nous donne par complétion $\underline{H}_0^1 = \underline{H}_a^1 = \underline{H}_p^1$. Cela mérite un énoncé (qui nous autorisera à écrire simplement \underline{H}^1 désormais) :

11 THEOREME . \underline{H}_a^1 et \underline{H}_p^1 sont identiques, et les transformations de RIESZ R_j se prolongent en opérateurs continus de \underline{H}_p^1 dans lui même.

En effet, les R_j sont définis sur \underline{H}_0^1 qui est dense, et nous avons vu à la fin du n° V. 6 que $\|R_j f\|_{\underline{H}_p^1} \leq \theta \|f\|_{\underline{H}_a^1}$.

REMARQUE. Le lecteur pourra s'amuser à démontrer que \underline{H}_0^1 est dense dans \underline{H}_a^1 (ce qui est à proprement parler, avec le théorème 2, le théorème de FEFFERMAN-STEIN analytique) en utilisant seulement le théorème 2 et la détermination du dual de \underline{H}_a^1 (§ IV, n°4), sans recourir aux théorèmes des n°s 6-8 (ce n'est tout de même pas évident).

OPERATEURS D'ESPERANCES CONDITIONNELLES ET \underline{BMO}

12 Nous revenons maintenant sur le lemme 4. Notre but est de lever l'hypothèse que V soit bornée, et nous ne donnerons donc pas de nouvel énoncé - d'autant plus qu'il y a un point délicat !

Toute martingale (V_t) de norme $\underline{BMO} \leq 1$ est différence de deux martingales positives de norme $\underline{BMO} \leq 2$ (c'est le fait que la fonction x^+ ou x^- est lipschitzienne de rapport 1 ; la démonstration est toute analogue à celle du § I, n°s 3-4. Nous supposons donc V positive .

Nous poserons $k(X_{T_0}) = E^{\lambda a} [V_{\infty} | X_{T_0}]$ (aucune difficulté quant à l'existence de k , puisque $V_{\infty} \geq 0$) et $k^n(X_{T_0}) = E^{\lambda a} [V_{\infty} \wedge n | X_{T_0}]$. La fonction $x \mapsto x \wedge n$ étant lipschitzienne de rapport 1, le lemme 4 entraîne que $\|k^n\|_* \leq \theta \|V_{\infty} \wedge n\|_{\underline{\underline{BMO}}}$ reste uniformément borné.

Maintenant, on utilise le petit lemme analytique suivant

- 13 LEMME. Soit (k^n) une suite uniformément bornée dans $\underline{\underline{BMO}}$, qui converge en mesure vers k . Alors ou bien $k = +\infty$ p.s., ou bien $k = -\infty$ p.s., ou bien la suite k^n converge faiblement dans $\underline{\underline{BMO}}$ vers k (en particulier $k \in \underline{\underline{BMO}}$).

DEMONSTRATION. Soit J le cube unité. Nous faisons une extraction de sous-suite, sans changer de notation, assurant les propriétés

(1) $k^n \rightarrow k$ p.s. (2) les moyennes k_J^n tendent vers $\gamma \in \mathbb{R}$.

D'après le § III, n°1, nous avons

$$\sup_n \int (k^n - k_J^n)^2 \mu < \infty, \text{ où } \mu \text{ est la mesure } Q_1(0, \cdot) = q_1 \lambda$$

Faisant une nouvelle extraction, nous supposons que les $k^n - k_J^n$ convergent faiblement dans $L^2(\mu)$ vers $l \in L^2(\mu)$. Si a est un $(1, \infty)$ -atome, on a $a/q_1 \in L^2(\mu)$, donc $\int a l \lambda = \lim_n \int a (k^n - k_J^n) \lambda$, et $\sup_n \int |a l \lambda|$ est fini, de sorte que l appartient à $\underline{\underline{BMO}}$, et que la suite $(k^n - k_J^n)$ converge faiblement vers l dans $\underline{\underline{BMO}}$.

D'après le théorème de HAHN-BANACH, il existe des fonctions h^n telles que i) h^n appartient à l'enveloppe convexe de la suite $(k^m - k_J^m)_{m \geq n}$ ii) h^n converge vers l dans $L^2(\mu)$ fort. Ecrivons h^n comme combinaison convexe finie $\sum \lambda_i (k^i - k_J^i)$ avec $i \geq n$, et posons $l^n = \sum \lambda_i k^i$; nous avons

$$(1) l^n \rightarrow k \text{ p.s. } (2) l_J^n \rightarrow \gamma \in \mathbb{R} \quad (3) l^n - l_J^n \rightarrow l \text{ dans } L^2(\mu) \text{ fort.}$$

Il existe alors une sous-suite de (l^n) qui converge p.s. vers l , et on en tire $l = k - \gamma$. Donc ou bien $\gamma = \pm \infty$, et $k = \pm \infty$, ou bien $\gamma \in \mathbb{R}$ et $k \in \underline{\underline{BMO}}$.

Quant à la convergence faible, si $\gamma \in \mathbb{R}$, ce raisonnement montre que toute sous-suite de (k^n) qui converge faiblement vers j dans $\underline{\underline{BMO}}$ est telle que $j = k$ à une constante près. Comme $\underline{\underline{BMO}}$ est un dual, la boule unité de $\underline{\underline{BMO}}$ est faiblement compacte, et toute la suite (k^n) converge vers j .

REMARQUE. Soit $k \in \underline{\underline{BMO}}$ positive, et soit $k^n = k \wedge n$; les k^n sont uniformément bornées dans $\underline{\underline{BMO}}$, et le lemme entraîne que $k^n \rightarrow k$ faiblement dans $\underline{\underline{BMO}}$.

Ce lemme étant établi, nous revenons à la situation initiale : il s'agit d'examiner si la fonction positive k telle que $k(X_{T_0}) = E^{\lambda a} [V_{\infty} | X_{T_0}]$ peut être p.p. égale à $+\infty$. Nous utilisons l'inégalité de JOHN-NIRENBERG de la manière suivante. Soit $\varphi(x)$ une fonction positive d'intégrale 1 sur \mathbb{R}^v , et soit α la loi initiale portée par l'hyperplan $\{u = a\}$, de

densité φ par rapport à la mesure de Lebesgue de l'hyperplan. D'après l'inégalité de JOHN-NIRENBERG, dès que c positif est assez petit (dépendant seulement de $\|V\|_{\underline{\underline{BMO}}}$) nous avons $E^\alpha[\exp(cV_\infty)] < \infty$. Ou encore

$$E^{\lambda a}[\exp(cV_\infty)\varphi(X_0)] < \infty$$

Utilisons maintenant la concavité du log : nous avons¹

$$E^{\lambda a}[cV_\infty + \log \varphi(X_0) | X_{T_0}] \leq \log(E^{\lambda a}[\exp(cV_\infty)\varphi(X_0) | X_{T_0}]) < \infty \text{ p.s.}$$

et il reste seulement à voir si $E^{\lambda a}[\log \varphi(X_0) | X_{T_0}]$ est p.s. finie. Mais cela se calcule explicitement : c'est $j(X_{T_0})$, où

$$j(x) = \int Q_a(x, dy) \log \varphi(y)$$

et on constate que si l'on prend encore une fois $\varphi(x) = q_1(x)$, cette intégrale est convergente. Nous avons donc prouvé l'extension du lemme 4 sans restriction.

- 14 Nous avons en fait prouvé un peu plus. Supposons $\|V_\infty\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leq 1$. Alors c peut être choisi indépendamment de V , et si nous posons

$$h(X_{T_0}) = E^{\lambda a}[\exp(cV_\infty)\varphi(X_0) | X_{T_0}]$$

nous avons $E^{\lambda a}[h(X_{T_0})] \leq \theta$. La formule que nous avons écrite plus haut pour majorer k s'écrit

$$ck(X_{T_0}) \leq \log h(X_{T_0}) - j(X_{T_0})$$

et par conséquent

$$ck(X_{T_0}) \leq \exp(ck(X_{T_0})) \leq (he^{-j})(X_{T_0})$$

La fonction j est localement bornée. Donc si L est un compact nous avons, avec une constante θ dépendant de L

$$ck(X_{T_0}) I_L(X_{T_0}) \leq \theta h(X_{T_0}), \text{ donc finalement}$$

$$(14.1) \quad \left| \begin{array}{l} \text{si } L \text{ est compact, si } \|V_\infty\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leq 1, V_\infty \text{ étant positive,} \\ \text{on a } E^{\lambda a}[V_\infty I_L(X_{T_0})] \leq \theta \end{array} \right.$$

Mais qu'est ce que cela signifie ? Tout simplement que la fonction positive I_L appartient à $H_p^1(\lambda_a)$. Contrairement à H_p^1 , qui ne contient que des fonctions d'intégrale nulle, il y a des éléments positifs dans les espaces $H_p^1(\lambda_a)$ lorsque a est fini.

- 15 Encore une conséquence. Soit f une fonction qui appartient à $\underline{\underline{BMO}}$, et soit (M_t) la martingale associée. Nous savons que la variable aléatoire

$$\langle M, M \rangle_\infty = \int_0^\infty 2 \text{grad}^2 f(B_s) ds$$

appartient à $\underline{\underline{BMO}}(\mu)$ pour toute mesure μ . Il en résulte que si l'on pose $E^{\lambda a}[\langle M, M \rangle_\infty | X_{T_0}] = k(X_{T_0})$, k appartient à $\underline{\underline{BMO}}$. Or l'expression de

1. Ne pas confondre X_0 (position de départ, relative à l'hyperplan $\{u=a\}$) et X_{T_0} (position d'arrivée, sur l'hyperplan $\{u=0\}$)

k est connue (sém. X, p.132). En explicitant la dépendance en a

$$k_a(x) = \int_0^\infty 2u \wedge a \operatorname{grad}^2 f(x,u) du$$

d'après le théorème qui vient d'être établi, $\|k_a\|_* \leq \theta \|f\|_*^2$. Faisons tendre a vers $+\infty$, et appliquons le lemme 13. Il vient

THEOREME. Soit $f \in \underline{\underline{BMO}}$. Ou bien la fonction de LITTLEWOOD-PALEY

$$(15.1) \quad G_f^2(x) = \int_0^\infty u \operatorname{grad}^2 f(x,u) du$$

est p.p. égale à $+\infty$, ou bien elle appartient à $\underline{\underline{BMO}}$, avec $\|G_f^2\|_* \leq \theta \|f\|_*^2$.

Il s'agit bien sûr d'une simple curiosité mathématique.

VII . DEFINITION DE $\underline{\underline{H}}^1$ AU MOYEN DES FONCTIONS MAXIMALES

La démonstration du théorème de dualité au paragraphe précédent a reposé entièrement sur les propriétés (1.1) et (1.2). Nous avons démontré (1.1) au moyen des transformations de RIESZ, mais nous allons développer dans ce paragraphe des méthodes directes pour y parvenir. D'une manière précise, nous allons établir le théorème de BURKHOLDER-GUNDY-SILVERSTEIN, que nous énonçons à présent.

1 **DEFINITION.** Soit f une fonction sur $\mathbb{R}^v \times]0, \infty[$. Nous définissons la fonction maximale radiale $f^=$ et la fonction maximale conique $f^<$ associées à f comme les fonctions sur \mathbb{R}^v

$$(1.1) \quad f^=(y) = \sup_{u>0} |f(y,u)|$$

$$(1.2) \quad f^<(y) = \sup_{(x,u) \in \Gamma_y} |f(x,u)|.$$

Ici Γ_y est le cône $\{(x,u) : |x-y| \leq tu\}$ d'ouverture t . Nous prendrons toujours $t=1$ dans la suite, d'ailleurs, mais si l'on voulait faire une théorie sérieuse il faudrait se laisser la possibilité de varier t .

2 **THEOREME.** f note à la fois une fonction prolongeable sur \mathbb{R}^v et son prolongement harmonique à $\mathbb{R}^v \times \mathbb{R}_+$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

$$a) f \in \underline{\underline{H}}^1 \quad b) f^= \in L^1 \quad c) f^< \in L^1.$$

et les trois normes $\|f\|_{\underline{\underline{H}}^1}$, $\|f^=\|_{L^1}$, $\|f^<\|_{L^1}$ sont équivalentes.

DEMONSTRATION. a) \Rightarrow b) . Nous savons que $E^{\lambda a}[f^*] \leq \|f\|_{\underline{\underline{H}}^1} < \infty$. Nous avons alors

$$\sup_{0 < b \leq a} |E^{\lambda a}[f \circ X_{T_b} | X_{T_0}]| \leq E^{\lambda a}[f^* | X_{T_0}]$$

Or qu'est ce que $E^{\lambda a}[f \circ X_{T_b} | X_{T_0}]$ pour $0 < b < a$? Il résulte très simplement de la symétrie du noyau Q_b de POISSON que c'est $Q_b(X_{T_0}, f_b) = Q_{2b}(X_{T_0}, f)$.

Le côté gauche vaut donc $\sup_{0 < t \leq 2a} |Q_t(X_{T_0}, f)|$, et en intégrant on obtient

$$\int \sup_{0 < t \leq 2a} |Q_t(x, f)| \leq \|f\|_{\underline{\underline{H}}^1}(\lambda_a)$$

il ne reste plus qu'à faire tendre a vers l'infini.

REMARQUE. Pour $b > a$ on a $E^{\lambda_a}[f \circ X_{T_b} I_{\{T_b < \infty\}} | X_{T_0}] = \frac{a}{b} Q_{2b}(X_{T_0}, f)$, de sorte que la vraie formule relative à λ_a est

$$\int \sup_t |(1 \wedge \frac{a}{t}) Q_t(x, f)| \lambda(dx) \leq \|f\|_{\underline{H}^1(\lambda_a)}$$

Cela ne sert probablement à rien.

- 3 b) \Rightarrow c) Nous allons commettre une escroquerie, en déclarant qu'il s'agit là d'un résultat d'analyse¹. Nous utilisons le lemme suivant, que nous ne démontrerons pas (il est dû à HARDY-LITTLEWOOD, et démontré dans [FS], lemme 9.2). Il n'est pas évident.

LEMME. Soit f une fonction harmonique dans une boule H de centre x , et soit $v = |f|^{1/2}$. Alors

$$(3.1) \quad v(x) \leq \frac{\theta}{|H|} \int_H v(y) dy$$

Ce lemme étant admis, nous prouvons que $f^{\leq \lambda} \leq \theta / f^{\leq \lambda}$ pour toute fonction harmonique f . Soit $g = (f^{\leq})^{1/2}$, et soit M_g la fonction maximale de HARDY-LITTLEWOOD relative à g , c'est à dire

$$(3.2) \quad M_g(x) = \sup \frac{1}{|B|} \int_B g(y) dy \quad (B \text{ boule de } \mathbb{R}^n \text{ centrée en } x)$$

Il suffit de prouver que $f^{\leq}(x) \leq \theta M_g^2(x)$ en tout point x , car on en tire $\|f^{\leq}\|_1 \leq \theta \|M_g\|_2^2 \leq \theta \|g\|_2^2 = \theta \|f^{\leq}\|_1$; la seconde inégalité est un théorème classique ([S], théorème 1, p.5) et plutôt facile.

Plaçons nous donc au point 0. Il nous faut montrer que pour tout $\xi = (x, u)$ tel que $|x| \leq u$ on a $|f(x, u)| \leq \theta M_g^2(0)$. Soit $v = |f|^{1/2}$, soit H la boule de centre (x, u) et de rayon u , soit B la boule de centre 0 et de rayon $2u$, et soit enfin $T = B \times [0, u]$. Nous avons $H \subset T$, mais le rapport $|T|/|H|$ reste borné. Alors d'après (3.1)

$$v(\xi) \leq \frac{\theta}{|H|} \int_H v(\eta) d\eta \leq \frac{\theta}{|T|} \int_T v(\eta) d\eta \leq \frac{\theta}{|T|} \int_T g(z) dz$$

car nous majorons $v(z, w) = |f(z, w)|^{1/2}$ par $|f^{\leq}(z)|^{1/2} = g(z)$

$$v(\xi) \leq \frac{\theta}{|B|} \int_B g(z) dz \leq M_g(0) \quad \square$$

- 4 c) \Rightarrow a). Nous suivons le raisonnement même de BURKHOLDER, GUNDY et SILVERSTEIN. Nous prenons une fonction continue f sur le demi-espace ouvert, sa fonction maximale conique f^{\leq} , sa maximale probabiliste $f^*(w) = \sup_{t < T_C} |f(B_t(w))|$, et nous prouvons que pour tout $a > 0$ et tout $c > 0$

$$P^{\lambda_a}\{f^* > c\} \leq \theta \lambda\{f^{\leq} > c\} \quad (\theta \text{ dépend de } v \text{ seulement})$$

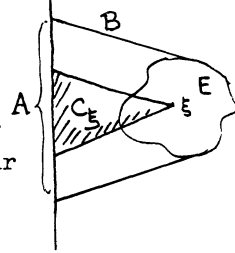
d'où par intégration $\|f\|_{\underline{H}^1(\lambda_a)} \leq \theta / f^{\leq \lambda}$, et il reste seulement à faire tendre a vers $+\infty$.

1. Après tout, nous aurions pu décider que \ll le dual de \underline{H}^1 est $\underline{BMO} \gg$ est un théorème d'analyse, et rester au lit.

DEMONSTRATION. Soit E l'ensemble ouvert $\{f > c\}$, soit B la réunion de tous les troncs de cônes C_ξ ouverts ($\xi \in E$), et soit A la trace de B sur le bord (cf. dessin).

Nous notons les points suivants

- A est l'ensemble $\{f < c\}$
- Il suffit de raisonner lorsque $\lambda(A) < \infty$. Mais la mesure de la trace de $C_{x,u}$ sur le bord majore cu^v . Donc $\lambda(A) < \infty$ entraîne que la hauteur de E est bornée. Nous prendrons a plus grand que la hauteur de E .
- Soit ξ un point de B . Alors le cône C_ξ de sommet ξ est contenu dans B , et la probabilité partant de ξ de rencontrer la base A_ξ du cône est une constante $\theta > 0$. A fortiori, la probabilité partant de ξ de rencontrer $A - A_\xi$ majore θ .



D'après la propriété de Markov forte, pour tout η , $P^\eta\{\text{rencontrer } A\} \geq \theta P^\eta\{\text{rencontrer } B\}$.

Alors, B contenant E : $P^a\{f^* > c\}$ s'écrit

$$P^a\{\text{rencontrer } E\} \leq P^a\{\text{rencontrer } B\} \leq \frac{1}{\theta} P^a\{\text{rencontrer } A\} = \frac{1}{\theta} \lambda(A).$$

Le théorème est établi.

Revenons maintenant au § V, n°8. Nous y avons prouvé directement, sans faire appel aux transformées de RIESZ, que si j est un atome la fonction maximale radiale j^- est intégrable, et nous avons signalé au n°9 qu'on peut faire aussi la même vérification directe pour $j^<$ (ou bien appliquer la partie b) \Rightarrow c) du théorème précédent). Alors le théorème de BURKHOLDER GUNDY et SILVERSTEIN nous affirme que les atomes appartiennent à H_p^1 ... et nous avons rendu la théorie de la dualité indépendante des transformations de RIESZ. Cela donne tout son sens au paragraphe suivant.

VIII. THEORIE PROBABILISTE DES TRANSFORMEES DE RIESZ

1 Nous allons utiliser ici pour la première fois les notions définies dans les passages entre astérisques *...* du § 2, n°3. Etant donnée une fonction prolongeable f , et la martingale associée $M_t = f(B_{t \wedge T_0})$, nous considérons la seconde martingale

$$(1.1) \quad M_t^\rightarrow = \int_0^{t \wedge T_0} D^- f(B_s) dU_s, \quad \langle M^\rightarrow, M^\rightarrow \rangle_t = \int_0^{t \wedge T_0} 2(D^- f(B_s))^2 ds$$

et nous utilisons le fait que M^\rightarrow est la projection de M sur le sous-espace stable formé des intégrales stochastiques par rapport au mouvement

$(U_t - U_0)$ nul en 0, et le fait que les projections diminuent les normes dans $\underline{H}_p^1(\mu)$ quelle que soit la loi μ , pour écrire que

$$(1.2) \quad \|\vec{M}\|_{\underline{H}_p^1(\mu)} \leq \theta \|M\|_{\underline{H}_p^1(\mu)}$$

Cela vaut aussi pour les mesures μ positives non bornées, et en particulier pour les mesures λ_a . D'autre part, on a $\langle \vec{M}, \vec{M} \rangle_\infty - \langle \vec{M}, \vec{M} \rangle_t \leq \langle M, M \rangle_\infty - \langle M, M \rangle_t$, donc aussi $\|\vec{M}\|_{\underline{BMO}} \leq \|M\|_{\underline{BMO}}$.

En particulier, considérons une seconde martingale $N_t = g(B_t \wedge T_0)$, et écrivons l'inégalité de FEFERMAN probabiliste

$$(1.3) \quad E^\mu \left[\int_0^\infty |d[\vec{M}, \vec{N}]_s| \right] \leq \theta \|\vec{M}\|_{\underline{H}_p^1(\mu)} \|\vec{N}\|_{\underline{BMO}} \leq \theta \|M\|_{\underline{H}_p^1(\mu)} \|N\|_{\underline{BMO}}$$

Le côté gauche s'écrit $\langle \mu, 2V[D \vec{f}, D \vec{g}] \rangle$. Prenant $\mu = \lambda_a$, puis faisant tendre a vers ∞ , et enfin multipliant par 4 pour obtenir une égalité un peu plus loin, nous obtenons

$$(1.4) \quad \int_0^\infty \int dx/du |D \vec{f}(x,u) D \vec{g}(x,u)| du \leq \theta \|f\|_{\underline{H}_1} \|g\|_*$$

$$(1.5) \quad \text{la forme bilinéaire } \Lambda^-(f,g) = 4 \int dx \int_0^\infty u D \vec{f}(x,u) D \vec{g}(x,u) du \text{ est bien définie sur } \underline{H}_1 \times \underline{BMO}, \text{ et bornée.}$$

Nous démontrons maintenant que la forme Λ^- peut s'utiliser aussi bien que la forme Λ :

2 THEOREME. Si f est un $(1, \infty)$ -atome, si g appartient à \underline{BMO} , on a $\Lambda^-(f,g) = \Lambda(f,g)$ ($= \int fg \lambda$, cf. § V, n°11).

DEMONSTRATION. D'après (1.4) et le résultat analogue pour Λ (§ V, formule (3.4)), il suffit de démontrer que, pour tout $u > 0$

$$(2.1) \quad 2 \int D \vec{f}(x,u) D \vec{g}(x,u) dx = \int \text{grad} f(x,u) \text{grad} g(x,u) dx$$

Lorsque g appartient à L^2 , c'est le théorème de Plancherel. Il reste à justifier un passage à la limite. Nous introduisons la mesure $\mu = Q_1(0, \cdot)$ et montrons que (f restant un atome fixé) les deux membres de (2.1) définissent des formes linéaires continues sur $L^1(\mu)$; comme $L^2(\lambda)$ est contenu dans $L^1(\mu)$ et dense dans $L^1(\mu)$, comme d'autre part $L^1(\mu)$ contient \underline{BMO} (§ III, n°1) nous aurons démontré le théorème.

C'est très simple. Nous posons $\beta(x) = D_t q_t(x)|_{t=u}$, et nous vérifions que $|\beta(x)| \leq c q_u(x) \leq c' q_1(x)$. Le côté gauche de (2.1) s'écrivant

$2 \langle \lambda, (\beta * f)(\beta * g) \rangle$, il nous suffit de majorer $\langle \lambda, |\beta * f| |\beta * g| \rangle$. Comme f est bornée à support compact, nous avons $|\beta * f| \leq c q_1(x)$ (une autre constante c), et nous pouvons remplacer $|\beta * f| \lambda$ par $c \mu$. Nous majorons $|\beta * g|$ par $c Q_1 |g|$, de sorte que ce qu'il nous reste est $\langle c \mu Q_1, |g| \rangle$. Mais μQ_1 est la mesure $Q_{1+u}(0, \cdot)$, elle est elle-même majorée par $c \mu$, et finalement

il nous reste une majoration en $c \langle \mu, |g| \rangle = c \|g\|_{L^1(\mu)}$. On procède de même pour le côté droit.

3 COROLLAIRE. Si $f \in \underline{H}^1$, $g \in \underline{BMO}$, on a $\Lambda^-(f, g) = \Lambda(f, g)$.

Le théorème suivant est énoncé sous une condition trop forte : il suffit certainement que g soit prolongeable. Mais je ne sais pas le démontrer.

4 LEMME. Soit $g \in L^2$ telle que $V((D^-g)^2)$ soit bornée par une constante c^2 . Alors g appartient à \underline{BMO} et on a $\|g\|_* \leq \theta c$.

DEMONSTRATION. Soit f un $(1, \infty)$ -atome. Introduisons les martingales $M_t = f(B_{t \wedge T_0})$, $N_t = g(B_{t \wedge T_0})$ et les deux martingales radiales correspondantes $M_t^- = \int_0^t D^-f(B_s) dU_s$, $N_t^- = \int_0^t D^-g(B_s) dU_s$, nulles pour $t=0$. La martingale M est bornée dans $\underline{H}_p^1(\lambda_a)$, il en est de même de sa projection M^- sur le mouvement brownien (U_t) ; d'autre part (N_t^-) appartient à \underline{BMO} avec une norme $\leq c$. Le théorème de FEFERMAN probabiliste nous donne

$$E^{\lambda_a} \left[\int_0^\infty |d[M^-, N^-]_s| \right] \leq \theta \|f\|_{\underline{H}_p^1} c \leq \theta c \text{ puisque } f \text{ est un atome}$$

ou encore $\langle \lambda_a, V(|D^-f \cdot D^-g|) \rangle \leq \theta c$. Faisons tendre a vers $+\infty$, nous obtenons $|\Lambda^-(f, g)| \leq \theta c$. Par le théorème de Plancherel - c'est ici qu'intervient l'hypothèse que $g \in L^2$ - cela s'écrit $|\int fg \lambda| \leq \theta c$, d'où en passant au sup sur f $\|g\|_* \leq \theta c$ avec un autre θ .

5 LEMME. Si $g \in L^2 \cap \underline{BMO}$, $R_j g = h$ appartient à $L^2 \cap \underline{BMO}$ (la transformée de RIESZ est ici définie sur L^2 au moyen du multiplicateur de Fourier : cf. § IV n° 1) et on a $\|h\|_* \leq \theta \|g\|_*$.

DEMONSTRATION. Passant aux prolongements harmoniques, on a $h \in L^2$, $D^-h(x, u) = D_j g(x, u)$, donc $V((D^-h)^2) \leq V(\text{grad}^2 g) \leq \theta \|g\|_*^2$ (§ III, n°3), après quoi on applique le lemme 4.

Et nous montrons enfin que les R_j définissent des opérateurs continus dans \underline{H}^1 : comme $\underline{H}^1 \cap L^2$ est dense dans \underline{H}^1 il suffit de montrer :

6 THEOREME. Si $f \in \underline{H}^1 \cap L^2$, on a $\|R_j f\|_{\underline{H}^1} \leq \theta \|f\|_{\underline{H}^1}$.

DEMONSTRATION. On applique le théorème 6 du § VI, suivant lequel il suffit de montrer que $|\langle R_j f, g \rangle| \leq \theta \|f\|_{\underline{H}^1} \|g\|_*$ pour $g \in \underline{BMO} \cap L^2$. Comme tout est dans L^2 on écrit $\langle R_j f, g \rangle = -\langle f, R_j g \rangle = -\Lambda(f, R_j g)$, et on applique l'inégalité de FEFERMAN en tenant compte du lemme 5 pour évaluer $\|R_j g\|_*$.

LE DUAL DE $\underline{\underline{H}}^1(\mathbb{R}^V)$: DEMONSTRATIONS PROBABILISTES

EXPOSE III : APPENDICES DIVERS

Nous commençons par un paragraphe court et facile, qui démontre à partir d'un petit résultat de retournement du temps deux propriétés admises dans les exposés principaux. Puis nous donnons un long paragraphe, qui n'a pratiquement plus rien à voir avec la dualité $\underline{\underline{H}}^1\text{-BMO}$, dans lequel le demi-espace fermé est interprété (d'une manière qui nous semble plaisante) comme un compactifié de MARTIN du demi-espace ouvert relativement au semi-groupe de GREEN. La corésolvante, le semi-groupe retourné, etc, s'écrivent explicitement, et divers lemmes techniques de la théorie classique de la dualité $\underline{\underline{H}}^1\text{-BMO}$ (tels que ceux qui concernent les " mesures de CARLESON ") apparaissent plus ou moins comme des résultats de théorie du potentiel. Finalement, un troisième appendice présente quelques problèmes ouverts.

App.I . RETOURNEMENT DU PROCESSUS DE CAUCHY

1 Considérons le mouvement brownien (B_t) , avec la mesure initiale ε_ξ ($\xi=(x,a)$). Nous savons que $P^\xi\{T_0<\infty\}$ (qui est aussi la probabilité pour que le mouvement brownien horizontal (U_t) issu de a rencontre 0) est égal à 1. Comme les trajectoires de (U_t) sont continues, nous avons aussi $P^\xi\{T_s<T_0\}=1$ pour tout $s \in]0,a[$. Toujours d'après la continuité des trajectoires de (U_t) , nous pouvons écrire

$$B_{T_s} = (X_{T_s}, s) \text{ pour } s \in]0,a[$$

Nous poserons pour $0 \leq s \leq a$

$$(1.1) \quad C_s = X_{T_{a-s}} \quad \hat{C}_s = X_{T_s} \quad (\text{v.a. à valeurs dans } \mathbb{R}^V)$$

Quelle est la loi du processus (C_s) ? Lorsque s croît, le temps d'arrêt T_{a-s} croît, et si nous posons $\underline{G}_s = \underline{F}_{T_{a-s}}$, la propriété de Markov forte du mouvement brownien (B_t) nous donne, sans aucune peine, que

$$(1.2) \quad E[f \circ C_t | \underline{G}_s] = Q_{t-s}(C_s, f) \text{ si } 0 \leq s \leq t \leq a$$

pour toute fonction borélienne bornée f sur \mathbb{R}^V . Cette formule n'est rien

d'autre que l'interprétation des fonctions harmoniques au moyen des martingales, que nous utilisons depuis le début : en effet, supposons que l'on ait $t=a$, et soit $f(x,u)$ le prolongement harmonique de la fonction f ; le processus $(f(B_t))$ étant une martingale bornée, nous pouvons lui appliquer le théorème d'arrêt de DOOB, et écrire que pour tout $T \leq T_0$

$$E^\xi[f(B_{T_0}) | \underline{F}_T] = f(B_T) \quad \text{p.s.}$$

et on obtient alors (1.2) en prenant $T=T_{a-s}$: alors $\underline{F}_T = \underline{G}_s$, $B_T = (C_s, a-s)$ $f(B_{T_0}) = f(C_t)$, $f(B_T) = f(C_s, a-s) = Q_{a-s}(C_s, f) = Q_{t-s}(C_s, f)$.

Mais d'autre part, (1.2) signifie que le processus $(C_t)_{0 \leq t \leq a}$ est un processus de Markov relativement à la famille $(\underline{G}_t)_{0 \leq t \leq a}$, gouverné par le semi-groupe de CAUCHY (Q_t) , et issu du point x .

(De là la notation C_t pour les variables aléatoires du processus !)

Maintenant, intégrons par rapport à la mesure $\lambda_a(d\xi)$. Le processus (C_t) reste un processus de CAUCHY, mais avec la mesure initiale λ au lieu de ε_x . Nous remarquons maintenant que le semi-groupe (Q_t) est self-adjoint par rapport à sa mesure initiale λ , qui est invariante, et nous invoquons un argument extrêmement classique de retournement à un temps fixe pour en déduire

(1.3) Le processus retourné $\hat{C}_s = C_{a-s}$ est encore, pour la mesure P^{λ_a} , un processus de CAUCHY de mesure initiale λ .

Il faut faire une petite remarque, toutefois : le processus (C_t) n'est pas continu, mais continu à droite et pourvu de limites à gauche (pourquoi ?) et l'on a p.s. $C_t = C_{t-}$ pour tout t . Si l'on veut que le retourné soit un vrai processus de Markov continu à droite, il faut considérer le processus \hat{C}_{s+} au lieu de \hat{C}_s .

2 Nous établissons maintenant la propriété admise au § II, n°4. Nous savions que pour une mesure P^ξ des v.a. de la forme

$$M_n = f_n \circ X_{T_{1/n}} \quad (f_n \text{ boréliennes sur } \mathbb{R}^V)$$

avaient une limite p.s., i.e. que les v.a.

$$\underline{M} = \liminf f_n \circ X_{T_{1/n}}, \quad \overline{M} = \limsup f_n \circ X_{T_{1/n}}$$

et notre problème consiste à savoir s'il existe une fonction borélienne φ sur le bord telle que $\underline{M} = \overline{M} = \varphi \circ X_{T_0}$ p.s.

Première remarque : la fonction $P \cdot \{ \underline{M}, \overline{M} \}$ est harmonique dans le demi-espace (cela résulte aussitôt de la propriété de Markov forte), et positive. Si elle est nulle en un point ξ , elle est identiquement nulle.

Donc nous avons aussi $P^{\lambda_a} \{ \overline{M} \neq M \} = 0$.

Maintenant, retournons le temps. Soit $\hat{G}_t = \mathbb{T}(\hat{C}_s, 0 \leq s \leq t)$. Comme $f_n \circ X_{T_{1/n}}$ = $f_n \circ \hat{C}_{1/n}$ est $\hat{G}_{1/n}$ -mesurable, \underline{M} et \overline{M} sont mesurables par rapport à la tribu $\hat{G}_{0+} = \bigcap_n \hat{G}_{1/n}$. Or d'après la <<loi de tout ou rien>> des bons processus de Markov, tout élément de \hat{G}_{0+} est égal P $^{\lambda_a}$ -p.s. à un élément de $\hat{G}_0 = \mathbb{T}(\hat{C}_{0+})$, et comme $\hat{C}_{0+} = \hat{C}_0$ p.s., il existe une fonction borélienne $\overline{\varphi}$ telle que $\overline{M} = \overline{\varphi}(\hat{C}_0)$ P $^{\lambda_a}$ p.s..

La fonction harmonique $P^* \{ \overline{M} \neq \overline{\varphi}(X_{T_0}) \}$ est positive, nulle λ_a -p.p., donc identiquement nulle, et nous avons fini.

3 Maintenant, nous allons appliquer la théorie du processus de CAUCHY à l'étude de l'espace H_p^1 . Nous remarquons que, lorsque nous avons à notre disposition un semi-groupe de Markov (Q_t) tel que le semi-groupe de CAUCHY, et une mesure invariante telle que λ , nous pouvons construire un processus de Markov continu à droite

$$(3.1) \quad \Omega, \mathbb{F}, P, (C_t)_{-\infty < t < \infty}, G_t = \mathbb{T}(C_s, -\infty < s \leq t)$$

gouverné par le semi-groupe (Q_t) , et tel que $P\{C_t \in A\} = \lambda(A)$ pour tout t - bien entendu, P n'est pas une loi de probabilité ! La partie du processus qui nous intéresse est celle qui correspond aux temps négatifs.

Soit f une fonction prolongeable sur le bord. Notant f comme d'habitude son prolongement harmonique, nous avons que pour $t < 0$

$$(3.2) \quad f(C_t, -t) = E[f(C_0) | G_t] \text{ p.s.}$$

et le processus du côté gauche est continu à droite, puisque f est continue et le processus (C_t) continu à droite. On peut donc si l'on veut remplacer G_t par G_{t+} du côté droit, appliquer le théorème d'arrêt...

Il est bien connu en théorie des probabilités que la tribu $G_{-\infty}$ est dégénérée, et l'on montre aussi en théorie des martingales que, dans ces conditions, si M est une v.a. intégrable, $E[M | G_t]$ converge p.s. (mais non nécessairement dans L^1) vers $E[M | G_{-\infty}] = E[M]$ lorsque $t \rightarrow -\infty$, tandis que si M appartient à L^p , $1 < p < \infty$, $E[M | G_t]$ converge dans L^p vers 0. Ces résultats de convergence en mesure infinie ne sont pas absolument classiques. On les trouve par exemple dans le cours de CHATTERJI (Lecture Notes n° 307).

Puisque nous avons associé une martingale (3.2) à toute fonction prolongeable, nous pouvons introduire la variable aléatoire

$$(3.3) \quad f_c^* = \sup_t |f(C_t, -t)| \quad t \text{ variant de } -\infty \text{ à } 0$$

et introduire le nouvel espace \underline{H}_c^1 , relatif au processus de CAUCHY

4 DEFINITION. $\|f\|_{\underline{H}_c^1} = E[f_c^*]$, $\underline{H}_c^1 = \{f : \|f\|_{\underline{H}_c^1} < \infty\}$.

Nous allons vérifier que $\underline{H}_c^1 = \underline{H}_p^1$, mais seule l'inclusion $\underline{H}_c^1 \subset \underline{H}_p^1$ nous sera vraiment nécessaire.

5 THEOREME. $\underline{H}_c^1 = \underline{H}_p^1$.

DEMONSTRATION. Soit $f_{ca}^* = \sup_{-a \leq t \leq 0} |f(C_t, -t)|$. Comme le processus $(C_t)_{-a \leq t \leq 0}$ a même loi que le processus $(X_{T-t})_{-a \leq t \leq 0}$ pour la mesure P^{λ_a} nous avons $E[f_{ca}^*] \leq \|f\|_{\underline{H}_p^1(\lambda_a)} \leq \|f\|_{\underline{H}_p^1}$. Il ne reste plus qu'à faire tendre a vers $+\infty$.

Pour voir l'inclusion inverse, nous écrivons que $E[f(C_t, -t) | C_0] = Q_{-2t}(C_0, f)$, donc

$$E[\sup_{t \leq 0} |Q_{-2t}(C_0, f)|] \leq E[E[f_c^* | C_0]] = \|f\|_{\underline{H}_c^1}$$

de sorte que $\|f\|_{\underline{H}_c^1} \leq \|f\|_{\underline{H}_p^1}$. D'après le théorème de BURKHOLDER-GUNDY-SILVERSTEIN, cela entraîne $\|f\|_{\underline{H}_p^1} \leq \theta \|f\|_{\underline{H}_c^1}$.

Maintenant, soit $f \in \underline{H}_c^1$. $E[f \circ C_0 | \underline{G}_t]$ converge p.s. vers $E[f \circ C_0 | \underline{G}_{-\infty}] = f \lambda$ lorsque $t \rightarrow -\infty$, avec domination par f_c^* intégrable. Comme la seule constante intégrable est 0, nous voyons que $f \lambda = 0$ (nous avons montré que toute fonction de \underline{H}_c^1 est d'intégrale nulle au moyen de la transformation de Fourier !). Alors $E[f \circ C_0 | \underline{G}_t] \rightarrow 0$ dans L^1 , ce qui signifie que

$$(6.1) \quad \int |Q_t f| \lambda \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty, \text{ si } f \in \underline{H}_c^1$$

C'est la propriété dont nous avons eu besoin au §6 n°8. En fait, on a mieux : les variables aléatoires

$$\sup_{-\infty \leq s \leq t} |f(C_s, -s)|$$

tendent p.s. vers 0 lorsque $t \rightarrow -\infty$, en restant dominées par f_c^* . Cela signifie que $\|Q_t f\|_{\underline{H}_c^1} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, et d'après le théorème 5, que

$$(6.2) \quad Q_t f \rightarrow 0 \text{ dans } \underline{H}_c^1 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty, \text{ si } f \in \underline{H}_c^1.$$

Cela peut se déduire très simplement de (6.1) au moyen des transformées de RIESZ, mais la démonstration probabiliste est plus générale.

App. 2 . LE DEMI-ESPACE COMME ESPACE DE MARTIN

Il est bien connu que la compactification de MARTIN du demi-espace ouvert est le demi-espace fermé. Néanmoins, la manière dont on fait la compactification de MARTIN en théorie classique du potentiel, en normalisant la fonction de GREEN par la condition d'avoir la valeur 1 en un point fixé, ne respecte pas la structure du demi-espace (déterminée par deux types d'opérations : d'une part, les translations parallèles à l'hyperplan bord ; d'autre part, les homothéties relatives à un point du bord). Ce que je voudrais montrer ici, c'est que le demi-espace peut être considéré comme espace de MARTIN pour une autre normalisation de la fonction de GREEN, de manière à respecter cette structure. Cela n'a rien à voir avec la théorie de la dualité elle même, mais éclaire certains aspects de la démonstration classique du théorème de dualité.

LE MOUVEMENT BROWNIEN A UNE DIMENSION ET LE PROCESSUS DE BESSEL

- 1 Le semi-groupe du mouvement brownien "horizontal" (sur \mathbb{R}) a été noté (P_t^{\rightarrow}) dans l'exposé I. Dans les quelques numéros qui suivent, il n'y a aucun risque de confusion, et nous lui enlevons sa flèche.

Le mouvement brownien sur la demi-droite positive, tué en 0, admet le semi-groupe de GREEN (G_t) (plus loin G_t^{\rightarrow}) de résolvante (V_p) et de densité

$$(1.1) \quad g_t(x,z) = p_t(x,z) - p_t(x,-z) \quad (x > 0, z > 0)$$

ce qui permet de calculer sa résolvante . Connaissant l'expression classique de la résolvante du mouvement brownien

$$(1.2) \quad u_p(x,z) = \frac{1}{2\sqrt{p}} e^{-|x-z|\sqrt{p}}$$

nous formons $u_p(x,z) - u_p(x,-z)$, et obtenons la densité de $V_p(x,dz)$:

$$v_p(x,z) = \frac{1}{\sqrt{p}} \text{Sh}(x\wedge z)\sqrt{p} e^{-(x\vee z)\sqrt{p}}$$

formule sans doute un peu inutile, mais qui pour $p=0$ nous donne un résultat important

$$(1.3) \quad v(x,z) = x\wedge z .$$

- 2 Nous posons maintenant $\underline{z}(z)=z$. Introduisant le mouvement brownien (Z_t) sur \mathbb{R} , et désignant par T_0 le temps de rencontre de 0, nous avons

$$V_p(x,z) = E^x \left[\int_0^{T_0} e^{-pt} Z_t dt \right] \quad (x > 0)$$

1. Dans les exposés I et II, le mouvement brownien "horizontal" est noté (U_t) , non (Z_t) . La notation (Z_t) vient d'une rédaction antérieure, conservée par paresse.

$$pV_p(x, z) = E^x[-e^{-pt} Z_t \mid \int_0^t e^{-ps} dZ_s] = E^x[Z_0] = x = z(x)$$

Nous voyons donc que z est invariante pour le semi-groupe de GREEN. Cela nous permet d'introduire un nouveau semi-groupe, markovien, sur $]0, \infty[$

$$(2.1) \quad H_t(x, dz) = G_t(x, dz) \frac{z}{x} \quad (x > 0, z > 0)$$

- plus loin, nous le noterons H_t^- . La résolvante correspondante sera notée W_p , qui se calcule connaissant V_p

$$W_p(x, dz) = e^{-(x \wedge z) \sqrt{p}} \frac{\text{Sh}(x \wedge z) \sqrt{p}}{x \sqrt{p}} dz \quad (1)$$

le point important est l'existence d'une limite lorsque $x \rightarrow 0$

$$(2.2) \quad W_p(0, dz) = e^{-z \sqrt{p}} dz$$

Si f est continue à support compact dans $[0, \infty[$, $W_p f$ est continue dans $[0, \infty[$ et tend vers 0 à l'infini. On vérifie aussitôt que les W_p forment une résolvante de RAY sur $[0, \infty[$, que 0 n'est pas un point de branchement, d'où l'existence d'un semi-groupe de FELLER prolongeant (H_t) à la demi-droite fermée. Il est intéressant de savoir calculer $H_t(0, dz)$. Rappelons que si l'on pose

$$(2.4) \quad \mu_t(ds) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} e^{-t^2/4s} s^{-3/2} ds$$

on a $\int_0^\infty \mu_t(ds) e^{-ps} = e^{-t\sqrt{p}}$ (on a déjà utilisé cela dans le sémin. X, p.127). Alors la relation $\int_0^\infty H_t(0, dz) e^{-pt} dt = e^{-z\sqrt{p}} dz$ s'inverse et nous donne

$$(2.5) \quad H_s(0, dz) = \frac{s^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} z^2 e^{-z^2/4s} dz$$

[Une remarque ici, pour faire joli, mais qui ne sera pas utilisée : posons $\eta_s(dx) = H_s(0, dx)$; ces mesures de probabilité forment une loi d'entrée du semi-groupe (H_t) sur $]0, \infty[$, soit $\eta_s H_t = \eta_{s+t}$. Les mesures $\eta_s(dx)/x$ forment alors une loi d'entrée non bornée pour le semi-groupe (G_t) , la fameuse loi d'entrée d'ITO, correspondant au "mouvement brownien issu de 0 et tué en 0", cf. le séminaire V p.187].

3 Nous faisons quelques calculs plus précis sur le semi-groupe (H_t) . Pour cela, il nous faut quelques notations. Ω désignant l'espace des

1. Noter pour $p=0$ l'expression simple : (2.3) $W(x, dz) = x \wedge z \frac{z}{x} dz$.

applications continues ω , à durée de vie $\zeta(\omega)$, de \mathbb{R}_+ dans $\mathbb{R}U\{\partial\}$, avec les applications coordonnées notées Z_t , nous pouvons munir Ω de diverses mesures :

- mesures P^x (espérances E^x) relatives au mouvement usuel issu de x ; la durée de vie correspondante est infinie p.s..

- Mesures P_0^x (espérances E_0^x) relatives au semi-groupe de GREEN ($x > 0$; on les obtient en tuant le mouvement brownien à l'instant T_0).

- Mesures $P_0^{x/\nu}$ (espérances $E_0^{x/\nu}$), relatives au processus de Markov gouverné par (H_t) , issu de $x \geq 0$.

Rappelons quelques formules relatives au mouvement brownien ordinaire. D'abord, pour la loi P^x , le processus $Z_t^2 - 2t$ est une martingale. Donc aussi le processus arrêté à T_0 , ce qui entraîne en particulier que

$$(3.1) \quad E_0^x[Z_t^2] = E^x[Z_t^2 I_{\{t < T_0\}}] = E^x[Z_{t \wedge T_0}^2] = 2E^x[t \wedge T_0]$$

Nous avons aussi pour $x > 0$

$$(3.2) \quad E_0^{x/\nu}[Z_t] = \frac{1}{x} E_0^x[Z_t \nu(Z_t)] = \frac{1}{x} E_0^x[Z_t^2] = \frac{2}{x} E^x[t \wedge T_0]$$

D'autre part

$$(3.3) \quad E_0^{x/\nu}\left[\frac{1}{Z_t}\right] = \frac{1}{x} E_0^x\left[\frac{1}{Z_t} \nu(Z_t)\right] = \frac{1}{x} P_0^x\{t < \zeta\} = \frac{1}{x} P^x\{t < T_0\}$$

Reprenons (3.2) : $E^x[t \wedge T_0] = \int_0^t P^x\{s < T_0\} ds$, donc pour $x > 0$

$$(3.4) \quad E_0^{x/\nu}[Z_t] = \int_0^t E_0^{x/\nu}\left[\frac{2}{Z_s}\right] ds$$

Ne nous occupons pas pour l'instant de ce qui se passe pour $x=0$: les processus gouvernés par (G_t) pouvant être réalisés sur l'espace d'états $]0, \infty[$, les processus conditionnels gouvernés par (H_t) peuvent être réalisés sur le même espace d'états, ce qui signifie que le point 0 est polaire pour le semi-groupe (H_t) . Le sens de (3.4) - auquel on joint l'intégrabilité de Z_t , formule (3.2) - est le fait que le processus

$$(3.5) \quad M_t = Z_t - \int_0^t \frac{2}{Z_s} ds$$

est une martingale pour toute loi $P_0^{x/\nu}$, $x > 0$. Soit t rationnel, et soit A l'événement

$$\left\{ \lim_n \sum_i (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^2 \neq 2t \right\}, \text{ où } t_i^n = i2^{-n}t, 0 \leq i < 2^n$$

Nous avons $P_0^{x/\nu}(A) = \frac{1}{x} \int_{A \cap \{t < \zeta\}} \nu(Z_t) P_0^x = 0$, car pour la mesure P_0^x (Z_t) est un mouvement brownien tué à l'instant ζ , tandis que l'intégrale est à variation bornée sur $[0, t]$ puisque $t < \zeta$. Il en résulte que (M_t) est un mouvement brownien pour $P_0^{x/\nu}$, $x > 0$.

Maintenant, plaçons nous en 0 . Nous avons d'après (2.2)

$$\int_0^\infty E_0^{0/\nu}[Z_t]e^{-pt}dt = W_p(0, \nu) = \int_0^\infty e^{-z\sqrt{p}}z^2dz = 2p^{-3/2}$$

d'où l'on déduit que pour (presque) tout t

$$(3.6) \quad E_0^{0/\nu}[Z_t] = 2\sqrt{t}\Gamma(3/2) = 4\sqrt{t/\pi}$$

formule peut être intéressante. Un calcul analogue donne

$$(3.7) \quad E_0^{0/\nu}[1/Z_t] = 1/\sqrt{\pi t} \quad \text{pour (presque) tout t}$$

Noter qu'en tout cas, d'après le lemme de Fatou, $E_0^{0/\nu}[Z_t] \leq \theta\sqrt{t}$, et $E_0^{0/\nu}[\int_0^t \frac{2}{Z_s} ds] \leq \theta\sqrt{t}$. Donc le processus $(M_t)_{t>0}$, pour la mesure $P_0^{0/\nu}$, est une martingale bornée dans L^1 au voisinage de 0. Elle converge donc vers sa limite p.s. $M_0=0$ dans L^1 , et le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale. On vérifie alors aussitôt que c'est un mouvement brownien issu de 0. (3.6) et (3.7) ont alors lieu pour tout t.

Cela nous permet de calculer le générateur infinitésimal du semi-groupe (H_t) de manière très précise. Soit f une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} (cette hypothèse est trop forte, mais peu importe). Appliquons la formule d'ITO à $M_t + A_t$, où $A_t = \int_0^t \frac{2}{Z_s} ds$. Il vient

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s)dZ_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(Z_s).2ds$$

ou encore

$$(3.8) \quad f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s)dM_s + \int_0^t Cf(Z_s)ds$$

où C est l'opérateur de BESSEL $D^2 + \frac{2}{z}D$. C'est pourquoi nous appellerons (H_t) le semi-groupe de BESSEL.

En particulier, si f est l'application identique, nous voyons que (Z_t) satisfait, pour la loi $P_0^{0/\nu}$, à une équation différentielle stochastique

$$(3.9) \quad Z_t = M_t + \int_0^t \frac{2}{Z_s} ds, \quad Z_t \geq 0, \quad Z_0=0$$

où (M_t) est un mouvement brownien issu de 0. Il est amusant de remarquer, comme MCKEAN l'a fait, que cette équation a une solution unique. Car soient Z et Z^1 deux solutions ; fixons ω et posons $f(t)=Z_t(\omega)$, $f^1(t)=Z_t^1(\omega)$, $g(t)=f(t)-f^1(t)$, et enfin $h(t)=g(t)^2$. Nous avons $g'(t) = -2g(t)/f(t)f^1(t)$, donc $h'(t) \leq 0$, et comme h est positive avec $h(0)=0$ on a $h=0$. Ce raisonnement s'applique en fait aux solutions issues du même point $x \geq 0$, et non seulement aux solutions issues de 0.

Une conséquence, qui fait le lien avec l'interprétation classique du processus de BESSEL. Considérons un mouvement brownien (B_t) à trois dimensions issu de 0 ; on sait qu'il ne revient jamais en 0, et

on peut donc appliquer la formule d'ITO à la fonction $x \mapsto |x|$, qui est deux fois dérivable hors de l'origine. Il vient

$$|B_t| = |B_0| + \sum_1^3 \int_0^t \frac{B_s^1}{|B_s|} dB_s^1 + \sum_1^3 \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{1}{|B_s|} - \frac{B_s^{i2}}{|B_s|^3} \right) 2ds$$

La première somme est un mouvement brownien, la seconde se réduit à $2 \int_0^t \frac{ds}{|B_s|}$, et on retombe sur la même équation différentielle stochastique. On peut en déduire que le processus $|B_t|$ a même loi que le processus (Z_t) pour $P_0^{0/\nu}$.

- 4 Deux résultats sont clairs sur l'interprétation brownienne (mais peuvent aussi se vérifier directement). Le premier, c'est le comportement des trajectoires du processus de BESSEL (i.e. du processus (Z_t) pour la mesure $P_0^{x/\nu}$) : elles ne passent jamais par 0 pour $t > 0$, et s'éloignent indéfiniment pour $t \rightarrow +\infty$. Le second, c'est le caractère "stable d'ordre 2" du semi-groupe (H_t) relativement aux dilatations de la demi-droite positive. Faisons opérer la dilatation $x \mapsto cx$ ($c > 0$) sur les fonctions et les mesures par

$$c \cdot f(x) = f(cx) \quad c \cdot \mu = \int \varepsilon_{cx} \mu(dx)$$

de sorte que $\langle c \cdot \mu, f \rangle = \langle \mu, c \cdot f \rangle$, et sur les noyaux par

$$c \cdot A(x, f) = A(c^{-1}x, c \cdot f)$$

(la mesure du noyau dilaté $c \cdot A$ au point cx est la dilatée de la mesure $A(x, dy)$ du noyau A au point x). Dans ces conditions, on a

$$(4.1) \quad c \cdot H_t = H_{c^2 t}$$

- 5 Les calculs suivants n'ont probablement pas d'intérêt, mais nous les recopions tout de même. Il s'agit de calculer certaines probabilités de passage relativement au semi-groupe (H_t) . Notons T_u le premier passage par u , et posons $A = \{u\}$; on suppose d'abord $x > 0$.

$$\begin{aligned} E_0^{x/\nu} [e^{-pT_u}] &= p\text{-réduite de } 1 \text{ sur } A \text{ relativement à } (H_t), \text{ en } x \\ &= \frac{1}{\nu(x)} \cdot p\text{-réduite de } \nu \text{ sur } A \text{ relativement à } (G_t), \text{ en } x \\ &= \frac{u}{x} \cdot p\text{-réduite de } 1 \text{ sur } A \text{ relativement à } (G_t), \text{ en } x. \end{aligned}$$

Les p -réduites des points pour (G_t) sont classiques, et on a

$$E_0^{x/\nu} [e^{-pT_u}] = \frac{u}{x} \frac{\text{Sh}(x/\sqrt{p})}{\text{Sh}(u/\sqrt{p})} \quad \text{si } x \leq u, \quad \frac{u}{x} \frac{\exp(-x/\sqrt{p})}{\exp(-u/\sqrt{p})} \quad \text{si } x \geq u$$

le cas où $p > 0$ n'a en fait aucun intérêt pour nous : seul compte le cas $p = 0$, beaucoup plus simple, qui nous donne

$$(5.1) \quad P_0^{x/\nu} [T_u < \infty] = 1 \wedge \frac{u}{x}$$

Pour $x = 0$, on a $T_u < \infty$ p.s., et cette formule est donc encore vraie.

SEMI-GROUPES SUR $\mathbb{R}^v \times \mathbb{R}_+$

6

Nous remettons maintenant leur flèche aux semi-groupes (G_t^-) , (H_t^-) , pour rappeler qu'il s'agit de deux semi-groupes sur $]0, \infty[$, en remarquant que le second se prolonge aussi à $[0, \infty[$ de manière naturelle, et nous construisons sur $\mathbb{R}^v \times]0, \infty[$ les deux semi-groupes

$$(6.1) \quad G_t(\xi, d\eta) = P_t(x, dy) \otimes G_t^-(u, dv) \quad (\text{semi-groupe de GREEN})$$

$$(6.2) \quad H_t(\xi, d\eta) = P_t(x, dy) \otimes H_t^-(u, dv) \quad (\text{semi-groupe de BESSEL})$$

où $\xi = (x, u)$, $\eta = (y, v)$. Le second semi-groupe peut aussi être considéré sur $\mathbb{R}^v \times]0, \infty[$. Il est aussi markovien ($H_t(\xi, 1) = 1$) alors que (G_t^-) est sous-markovien. La relation entre les deux semi-groupes est

$$(6.3) \quad H_t(\xi, d\eta) = G_t(\xi, d\eta) \frac{\nu(\eta)}{\nu(\xi)} \quad \text{si } \nu(\xi) > 0$$

où l'on a posé $\nu(x, u) = u$. De même, entre les opérateurs potentiels des deux semi-groupes : $V(\xi, d\eta)$ pour (G_t^-) , $W(\xi, d\eta)$ pour (H_t^-) , on a la relation

$$(6.4) \quad W(\xi, d\eta) = V(\xi, d\eta) \frac{\nu(\eta)}{\nu(\xi)}$$

7

Le semi-groupe (G_t^-) est en dualité avec lui-même par rapport à la mesure $d\xi = dx du$, ce qui se traduit par le fait que la densité $V(\xi, \eta)$ de l'opérateur potentiel V par rapport à $d\eta$ est symétrique. CHANGEONS DE MESURE en introduisant la mesure fondamentale

$$(7.1) \quad m(d\xi) = u du dx$$

Alors (G_t^-) est en dualité avec (H_t^-) par rapport à m , ce qui signifie que si f et g sont positives, $\langle G_t^- f, g \rangle_m = \langle f, H_t^- g \rangle_m$.

Notons pour un instant E l'espace localement compact $\mathbb{R}^v \times]0, \infty[$, \bar{E} l'espace compact métrisable, compactifié d'ALEXANDROV de $\mathbb{R}^v \times]0, \infty[$. Le semi-groupe qui nous intéresse vraiment est (\underline{G}_t^-) . Le semi-groupe dual (H_t^-) est fellérien sur E , et se prolonge en un semi-groupe fellérien sur $\mathbb{R}^v \times \mathbb{R}^+$, puis sur \bar{E} (le point à l'infini étant absorbant). Ainsi, \bar{E} apparaît comme un compactifié de RAY de E relativement au semi-groupe dual (H_t^-) , c'est à dire ce que l'on appelle, de manière générale, un compactifié de MARTIN de E pour (\underline{G}_t^-) ¹.

Quel est le noyau de MARTIN ? A tout point ξ de \bar{E} nous associons une

1. Malheureusement, la théorie de la frontière de MARTIN telle qu'elle est développée d'habitude suppose que la mesure fondamentale m est purement coexcessive, alors qu'ici elle est co-invariante : la fonction ν est invariante pour (G_t^-) , le semi-groupe dual a une durée de vie infinie.

fonction excessive $k(.,\xi)=\hat{k}(\xi,.)$, qui est la densité de la mesure coexcessive $W(\xi,.)$ par rapport à m . C'est à dire

- si $\xi=(x,u) \in E$, la fonction de GREEN "normalisée" de pôle ξ

$$(7.2) \quad \hat{k}(\xi,.) = \frac{1}{u}V(\xi,.)$$

- si ξ est le point à l'infini, $W(\xi,.)$ est une masse $+\infty$ au point à l'infini, et la densité correspondante est nulle.

- enfin, le cas le plus intéressant : si $\xi=(x,0)$ nous écrivons

$$W(\xi,d\eta) = \int_0^\infty P_S(x,dy)H_S(0,v)ds \quad (\eta=(y,v))$$

$H_S(0,dv)$ nous est donné par (2.5). Donc si l'on pose $p_S(x,y)=P_S(x,dy)/dy$

$$W(\xi,d\eta) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty v s^{-3/2} e^{-v^2/4s} p_S(x,y) ds \right) v dv dy$$

et la grande parenthèse n'est autre (séminaire X, p.127, formules (6) et (7)) que la densité $q_v(x,y) = Q_v(x,dy)/dy$ du noyau de POISSON. Prenant la densité de $W(\xi,d\eta)$ par rapport à $m(d\eta)=v dv dy$, il vient que

$$(7.3) \quad \text{si } \xi=(x,0), \hat{k}(\xi,.) \text{ est la fonction harmonique } q_\cdot(x,.) \text{, noyau de POISSON de pôle } x \text{ sur le bord.}$$

Dans ces conditions, nous pouvons aussi écrire :

si f est une fonction positive, et $\xi=(x,0)$, on a

$$(7.4) \quad \int W(\xi,d\eta)f(\eta) = \int_0^\infty v dv / Q_v(x,dy) f(y,v)$$

REMARQUE. Si nous prenons comme mesure de référence $n(d\eta) = v^2 dy dv$, nous voyons que le semi-groupe (H_t) est son propre dual par rapport à n , avec la densité symétrique

$$(7.5) \quad W(\xi,d\eta) = e(\xi,\eta)n(d\eta)$$

où pour $\xi=(x,u)$, $u>0$

$$(7.6) \quad e(\xi,\eta) = \frac{V(\xi,\eta)}{uv} \quad \text{ayant la limite au bord } \frac{1}{u}q_u(x,y) \text{ lorsque } v \rightarrow 0$$

tandis que si $u=0$, $v>0$

$$(7.7) \quad e(\xi,\eta) = \frac{1}{v}q_v(x,y) = c_v (v^2 + |x-y|^2)^{-(v+1)/2}$$

ayant enfin la limite au bord

$$(7.8) \quad \text{si } \xi=(x,0), \eta=(y,0), e(\xi,\eta) = c_v |x-y|^{-v-1}$$

qui est un noyau de RIESZ d'exposant 1. C'est la notion qui correspond ici aux "potentiels e " de Mme LUMER-NAÏM, à nouveau utilisés par DOOB (Ann. Institut Fourier, 12, 1962). Je ne sais malheureusement rien en faire.

- 8 REMARQUE. Quelle est la "normalisation" des fonctions excessives qui correspond à cette compactification de MARTIN ? Considérons les mesures λ_a ; leurs potentiels de GREEN sont $\lambda_a V(d\eta) = v \wedge a \, dydv$, ils croissent lorsque $a \rightarrow +\infty$ vers la mesure fondamentale $m(d\eta) = vdydv$. Si f est une fonction excessive, la fonction $a \mapsto \langle \lambda_a, f \rangle$ est croissante¹, et on pose
- $$(8.1) \quad L(m, f) = \lim_{a \rightarrow \infty} \langle \lambda_a, f \rangle$$

Nous avons $\lambda_a V(d\eta) = v \wedge a \, dydv$, d'où en passant aux densités $\int \lambda_a(d\xi) V(\xi, \eta) = v \wedge a$, ou $\langle \lambda_a, V(\cdot, \eta) \rangle = v \wedge a$. Par symétrie, $\langle \lambda_a, V(\xi, \cdot) \rangle = u \wedge a$ et nous avons d'après (7.2), si $u > 0$

$$(8.2) \quad L(m, \hat{k}(\xi, \cdot)) = \lim_{a \rightarrow \infty} \langle \lambda_a, \frac{1}{u} V(\xi, \cdot) \rangle = \lim_a \frac{u \wedge a}{u} = 1$$

tandis que si $u=0$, $\hat{k}(\xi, \cdot)$ est (cf. (7.3)) le noyau de POISSON, dont l'intégrale sur tout hyperplan parallèle au bord est égale à 1. On a donc pour tout ξ (sauf le point à l'infini)

$$(8.3) \quad L(m, \hat{k}(\xi, \cdot)) = 1$$

et l'on comprend pourquoi cette compactification de MARTIN n'a guère été utilisée. La compactification usuelle permet de représenter, par des mesures bornées , toutes les fonctions excessives finies en un point x_0 choisi à l'avance. Celle ci ne permet de représenter - toujours par des mesures bornées - qu'une classe beaucoup plus petite, formée de fonctions excessives intégrables sur les hyperplans. Il faut des mesures non bornées pour atteindre les autres.

LE RETOURNEMENT DU TEMPS

- 9 Les semi-groupes (G_t) et (H_t) , explicitement donnés ci-dessus, sont en dualité par rapport à m . Quelle est l'interprétation probabiliste de cette dualité ?

Nous rappelons une forme relativement simple du théorème général du retournement du temps (et qui en est la plus importante !) . Elle est due à NAGASAWA (présentée dans le vol. I du séminaire, puis dans le vol. II avec une généralisation et une erreur, puis reprise dans le Lecture Notes n°77 sur la frontière de MARTIN, p.34-45). Présentons d'abord la situation :

1. C'est évident lorsque f est un potentiel de GREEN Vg , et toute fonction excessive est sup d'une suite croissante de tels potentiels. Pour une théorie plus détaillée de la fonctionnelle L , voir le séminaire VI, p. 212 .

Nous considérons un espace localement compact E , et deux semi-groupes de FELLER (H_t) et (G_t) sur E , de résolvantes respectives (W_p) et (V_p) . Ces semi-groupes sont en dualité par rapport à une mesure

$$m = \alpha W$$

et l'on suppose que α et m sont des mesures de Radon. Nous munissons l'espace Ω de toutes les applications càdlàg. de \mathbb{R}_+ dans E , à durée de vie, de la mesure \hat{P}^α correspondant au semi-groupe (H_t) et à la mesure initiale α . Nous noterons \hat{B}_t les coordonnées sur Ω .

[Dans le cas qui nous occupe, $E = \mathbb{R}^V \times]0, \infty[$, et α est la mesure de Lebesgue λ_0 sur $\mathbb{R}^V \times \{0\}$, qui n'est pas portée par E : cela ne fait aucune différence essentielle ; c'est la situation concrète où nous sommes qui nous fait noter $\hat{B}_t, \hat{P}^\alpha$ les quantités relatives à (H_t) .]

Soit L un temps de retour, c'est à dire une v.a. sur Ω satisfaisant à l'identité

$$(9.1) \quad L \circ \theta_t = (L-t)^+$$

Le dernier temps de passage dans un ensemble borélien A

$$(9.2) \quad L_A(\omega) = \sup \{ t : \hat{B}_t(\omega) \in A \} \quad (\sup \emptyset = 0)$$

est un temps de retour. Si L est un temps de retour, et si $\Omega_L = \{0 < L < \infty\}$, on définit sur Ω_L le processus retourné de (\hat{B}_t) à L

$$(9.3) \quad B_t(\omega) = \hat{B}_{(L(\omega)-t)-} \quad \text{si } 0 \leq t < L(\omega) \quad B_t(\omega) = \partial \quad \text{si } t \geq L(\omega)$$

[Dans le cas qui nous occupe, (\hat{B}_t) peut être pris à trajectoires continues, et $\hat{B}_{-} = \hat{B}$, donc $B_t = \hat{B}_{L-t}$ tout simplement si $0 \leq t < L$.]

Voici le théorème de retournement :

- 10 THEOREME. Pour la mesure \hat{P}^α , le processus retourné (B_t) est un processus de Markov, gouverné par le semi-groupe (G_t) , et admettant la mesure initiale

$$(10.1) \quad \beta(f) = \hat{E}^\alpha [f \circ \hat{B}_{L-}, 0 < L < \infty] \quad (f \text{ borél. positive}).$$

- 11 Nous appliquons ce résultat au semi-groupe de BESSEL (H_t) , avec mesure initiale $\alpha = \lambda_0$, et en prenant pour L le dernier temps de passage L_a par l'hyperplan $\{u=a\}$. Noter que $\Omega_{L_a} = \Omega$ (n°s 4 et 5). La mesure β est portée par l'hyperplan $\{u=a\}$, et manifestement invariante par translation. Elle est donc de la forme $c\lambda_a$, et nous allons voir dans un instant que $c=1$: ainsi

Le retourné à L_a du processus de BESSEL issu de λ_0 est un mouvement brownien (B_t) issu de λ_a et tué à l'instant T_0 de rencontre du bord.

[on a $c=1$, parce que d'après le retournement $\alpha(f) = E^\beta [f(X_{T_0})] = c\lambda_0(f)$].

12 On voit donc que tous les mouvements browniens tués au bord, et admettant les diverses mesures initiales λ_a , peuvent être plongés comme processus retournés dans un même processus, le processus de BESSEL issu de λ_0 . D'une manière intuitive, on peut donc dire que le retourné du processus de BESSEL issu de λ_0 est le "mouvement brownien venant de l'infini et tué en 0".

Donnons en deux applications. Soit A un ensemble borélien. La probabilité $P^{\lambda_a}\{T_A < T_0\}$ peut aussi s'interpréter comme $\hat{P}^{\lambda_0}\{\hat{T}_A < L_a\}$, et lorsque $a \rightarrow +\infty$ ceci tend vers $\hat{P}^{\lambda_0}\{\hat{T}_A < \infty\}$. Ainsi

La capacité de Green de A est simplement la probabilité de rencontre de A pour le processus de BESSEL issu de λ_0 .

Seconde application. Soit f une fonction harmonique. Nous avons

$$\|f\|_{\underline{H}_p^1(\lambda_a)} = E^{\lambda_a}[\sup_{0 \leq t \leq T_0} |f(B_t)|] = \hat{E}^{\lambda_0}[\sup_{0 \leq t \leq L_a} |f(\hat{B}_t)|]$$

faisant tendre a vers l'infini, nous voyons que

$$\|f\|_{\underline{H}_p^1} = \hat{E}^{\lambda_0}[\sup_t |f(\hat{B}_t)|].$$

13 Nous poursuivons cette introduction au retournement par des remarques moins directement liées au sujet principal de ce travail.

On peut encore énoncer le théorème 11 de la manière suivante : si nous regardons le mouvement brownien issu de λ_a et tué à T_0 , et que nous le retournons à l'instant T_0 , nous obtenons un processus (\hat{B}_t) identique en loi à un processus de BESSEL issu de λ_0 , et tué¹ au temps de retour L_a . Or nous avons un théorème général sur les processus de Markov, qui nous dit ceci :

Si nous munissons Ω de la mesure \hat{P}^α du processus gouverné par (H_t) et issu de α , et si L est un temps de retour, le processus (\hat{B}_t) tué à L, c'est à dire le processus

$$Y_t = \hat{B}_t \text{ si } 0 \leq t < L, \quad Y_t = \partial \text{ si } t \geq L$$

est un processus de Markov gouverné par le semi-groupe (H_t^c) et issu de $c.\alpha$, où c est la fonction excessive pour (H_t)

$$(13.1) \quad c(\xi) = \hat{P}^\xi\{L > 0\}$$

et comme d'habitude

$$(13.2) \quad H_t^c(\xi, d\eta) = \frac{1}{c(\xi)} H_t(\xi, d\eta) c(\eta) \quad \text{si } c(\xi) > 0.$$

1. Ceci n'est vrai que parce que L_a est p.s. fini, mais le résultat donné plus bas s'applique à un temps de retour non nécessairement fini.

Nous ne détaillerons pas les conventions relatives aux ξ tels que $c(\xi)=0$, car ici c est strictement positive. Pour les détails de ce théorème - qui est beaucoup plus simple que le théorème de retournement - voir le séminaire V, p.229 .

Dans le cas qui nous occupe ici, la fonction c a été calculée dans la formule (5.1) : $\hat{P}^\xi\{L_a > 0\}$ est la probabilité pour qu'un processus de BESSEL issu de ξ rencontre l'hyperplan $\{u=a\}$. Donc

$$(13.3) \quad \text{Si } \xi=(x,u) , c_a(\xi) = \hat{P}^\xi\{L_a > 0\} = 1 \wedge \frac{a}{x}$$

- 14 Nous pouvons retrouver à partir de ce résultat la formule fondamentale des exposés [LP] de l'an dernier (Sém. X, p.131, formule (17)) : si j est une fonction positive

$$E^{\lambda a} \left[\int_0^{T_0} j(B_s) ds \mid B_{T_0} \right] = \int_0^\infty a \wedge v Q_v(B_{T_0}, j(\cdot, v)) dv$$

En effet, nous retournons le temps à T_0 , et le côté gauche devient

$$\hat{E}^{c_a \lambda_0 / c_a} \left[\int_0^{\zeta} j(\hat{B}_s) ds \mid \hat{B}_0 \right] = W^{/c_a}(\hat{B}_0, j)$$

puisqu'on conditionne simplement par la valeur initiale, $W^{/c_a}$ étant l'opérateur potentiel du semi-groupe $(H_t^{/c_a})$:

$$W^{/c_a}(\xi, d\eta) = \frac{1}{c_a(\xi)} W(\xi, d\eta) c_a(\eta)$$

Comme \hat{B}_0 est ici sur le bord, nous pouvons nous limiter au cas où $\xi=(x,0)$. Alors $c_a(\xi)=1$, et nous avons d'après (7.4)

$$\int W((x,0), d\eta) c_a(\eta) j(\eta) = \int_0^\infty v dv \int Q_v(x, dy) j(y, v) 1 \wedge \frac{a}{v}$$

et c'est exactement l'expression cherchée.

- 15 Nous appliquons maintenant la théorie du retournement du temps à la définition et à l'interprétation des limites fines d'une fonction en un point $\xi=(x,0)$ du bord.

Soit f une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^d \times]0, \infty[$. Nous munissons $\hat{\Omega}$ de la mesure \hat{P}^ξ du processus de BESSEL issu de ξ (ici encore, le point initial est hors de E , mais cela n'a pas d'importance). Alors les v.a.

$$\limsup_{t \rightarrow 0} f(\hat{B}_t) \quad \text{pour } t > 0 , t > 0$$

sont mesurables par rapport à la tribu \hat{F}_{0+} , et sont donc \hat{P}^ξ -p.s. égales à des constantes $\bar{a}(\xi)$, $\underline{a}(\xi)$. Si ces deux constantes sont égales, leur valeur commune $a(\xi)$ est appelée la limite fine de f en ξ (il serait plus juste de l'appeler limite cofine !).

Nous appliquons le théorème 10, en prenant pour (H_t) le semi-groupe de BESSEL, et pour $\bar{\alpha}$ la mesure ε_ξ . La nouvelle mesure $\bar{m} = \varepsilon_\xi W$ admet pour densité par rapport à m la fonction excessive $k(\cdot, \xi)$, que nous

noterons k_ξ , et le nouveau semi-groupe en dualité avec (H_t) par rapport à \bar{m} n'est plus (G_t) , le semi-groupe de GREEN, mais

$$\bar{G}_t(\eta, d\zeta) = G_t^{k_\xi}(\eta, d\zeta) = G_t(\eta, d\zeta) \frac{k_\xi(\zeta)}{k_\xi(\eta)}$$

Si nous retournons à nouveau le temps à l'instant L_a , nous voyons que le processus retourné sera un processus de Markov gouverné par $(G_t^{k_\xi})$, de mesure initiale \bar{P} . Nous voudrions calculer \bar{P} .

Pour toute fonction positive j sur $\mathbb{R}^n \times]0, \infty[$ nous avons, en désignant par \bar{V} l'opérateur potentiel V^{k_ξ} de $(\bar{G}_t) = (G_t^{k_\xi})$

$$\begin{aligned} \langle \bar{P}\bar{V}, h \rangle &= E^{\bar{P}/k_\xi} \left[\int_0^\zeta h(B_s) ds \right] = \hat{E}^\xi \left[\int_0^{L_a} h(\hat{B}_s) ds \right] \\ &= \hat{E}^\xi / c_a \left[\int_0^\zeta h(\hat{B}_s) ds \right] \quad (n^\circ 13) \\ &= \int_0^\infty v \wedge a Q_v(x, h(\cdot, v)) dv \quad (n^\circ 14) \end{aligned}$$

et cette propriété caractérise la mesure \bar{P} , car une mesure est connue dès que son potentiel est une mesure de Radon connue. Or vérifions que la mesure $\gamma(d\eta) = q_a(x, y) \lambda(dy) \otimes \varepsilon_a(dv)$ la possède, d'où il résultera que nous avons bien identifié $\bar{P} = \gamma$. Comme γ est portée par l'hyperplan $\{v=a\}$, nous avons $k_\xi(\eta) = q_a(x, y) \gamma$ -p.s., donc $\gamma(d\eta)/k_\xi(\eta) = \lambda_a(d\eta)$, et

$$\bar{V}(d\zeta) = \int \lambda_a(d\eta) V(\eta, d\zeta) k_\xi(\zeta)$$

Mais le potentiel de Green $\int \lambda_a(d\eta) V(\eta, d\zeta)$ est connu (séminaire X, p.131, formule (16)) : si $\zeta = (z, w)$, c'est la mesure $w \wedge a dz dw$. Reste donc finalement la mesure $w \wedge a k_\xi(z, w) dz dw$, et c'est juste ce qu'il nous faut. Nous avons obtenu :

Le retourné à L_a du processus de BESSEL issu du point $\xi = (x, 0)$ du bord est un processus de Markov gouverné par $(G_t^{k_\xi})$, de loi initiale $q_a(x, y) \lambda_a(d\eta)$.

Revenons alors aux limites fines : l'existence d'une limite fine de f au point ξ , i.e. l'existence d'une limite p.s. de $f(\hat{B}_t)$ lorsque $t \rightarrow 0$ le long des trajectoires du processus de BESSEL issu de ξ , équivaut par retournement du temps à l'existence d'une limite p.s. de $f(B_t)$ lorsque t tend vers la durée de vie, pour le processus gouverné par $(G_t^{k_\xi})$ avec la mesure initiale indiquée plus haut (ou une mesure équivalente, puisqu'il s'agit de convergence p.s.).

1. On pourrait aussi utiliser une méthode directe, en utilisant la loi de L_a pour \hat{P}^ξ : $\hat{P}^\xi \{L_a > t\} = P^a \{T_0 > t\}$ pour le mouvement brownien à une dimension issu de a - puis l'indépendance des deux composantes de \hat{B}_t .

MESURES DE CARLESON

Nous allons maintenant faire le lien entre l'interprétation du demi-espace comme compactifié de MARTIN, et la théorie des mesures de CARLESON telle qu'elle est développée dans [RR].

Nous commençons par quelques notations. $Q(x,h)$ est le cube de \mathbb{R}^v de centre x et d'arête h . $T_\alpha(x,h)$ est le pavé $Q(x,h) \times [0, \alpha h]$ de $\mathbb{R}^v \times [0, \infty[$, dont une face est collée contre le bord. Nous posons $T(x,h) = T_1(x,h)$.

16 **DEFINITION.** Une mesure positive μ sur $\mathbb{R}^v \times [0, \infty[$ est une mesure de CARLESON s'il existe une constante c telle que l'on ait, pour tout (x,h)

$$(16.1) \quad \mu(T(x,h)) \leq ch^v$$

Noter qu'on a alors $\mu(T_\alpha(x,h)) \leq c_\alpha h^v$, avec $c_\alpha = c$ si $\alpha \leq 1$, $c_\alpha = c\alpha^v$ si $\alpha \geq 1$.

La condition (16.1) est satisfaite par $\mu = \varepsilon_{(y,v)}$ avec $c = v^{-v}$.

17 Nous démontrons maintenant le lemme de CARLESON. Nous faisons un dessin voisin de celui de la page 169. Etant donné un point ξ de $\mathbb{R}^v \times [0, \infty[$, nous considérons le cône C_ξ de sommet ξ dirigé vers la gauche - mais cette fois ce sera un cône fermé - et sa trace $[\xi]$ sur le bord. Etant donné un sous ensemble A de $\mathbb{R}^v \times [0, \infty[$, nous posons

$$(17.1) \quad [A] = \bigcup_{\xi \in A} [\xi].$$

Le lemme de CARLESON affirme que

THEOREME. Si μ est une mesure de CARLESON, et c est la constante (16.1), on a pour tout A borélien dans $\mathbb{R}^v \times \mathbb{R}_+$

$$(17.2) \quad \mu(A) \leq c\theta\lambda([A])$$

DEMONSTRATION. Nous traitons d'abord le cas où A est ouvert. Nous allons alors modifier très légèrement la définition de $[A]$, en le remplaçant par la réunion des intérieurs des $[\xi]$, $\xi \in A$, ce qui revient à établir une inégalité légèrement plus forte que (17.2). Nous appliquons la partie facile du théorème de recouvrement de WHITNEY (STEIN, Singular integrals... p. 167-168). Nous pouvons représenter l'ouvert $[A]$ de \mathbb{R}^v comme une réunion de cubes $Q_i = Q(x_i, h_i)$ d'intérieurs disjoints, tels que la distance de x_i au complémentaire de $[A]$ soit $\leq \theta_1 h_i$. Soit alors $x \in Q_i$, et soit $(x,u) \in A$. On a $|x - x_i| \leq \theta_2 h_i$. Toute la boule de centre x et de rayon u étant contenue dans $[A]$, la distance de x à $[A]^c$ est au moins u , or elle est au plus αh_i ($\alpha = \theta_1 + \theta_2$), donc $u \leq \alpha h_i$, et (x,u) appartient à $T_\alpha(x_i, h_i)$. Cela signifie que les $T_\alpha(x_i, h_i)$ recouvrent A , et nous avons

nous avons

$$\mu(A) \leq \sum_i \mu(T_{\alpha}(x_i, h_i)) \leq \sum_i c\theta h_i^{\nu} = \sum_i c\theta \lambda(Q_i) = c\theta \lambda([A]).$$

Ceci vient d'être établi lorsque A est ouvert. Si maintenant K est un compact, nous pouvons trouver des ouverts A_n emboîtés tels que $K = \bigcap_n \bar{A}_n$, et alors $[K] = \bigcap_n [A_n]$, et la formule précédente s'étend. De là on déduit que si B est borélien, on a $\mu(B) \leq c\theta \lambda([B])$ (le lecteur vérifiera, par un argument d'images directes, que [B] est analytique, donc λ -mesurable).

Inversement, ces propriétés caractérisent les mesures de CARLESON. Car si l'on a $\mu(K) \leq c\lambda([K])$ pour tout compact, en prenant $K=T(x, h)$ on a $\lambda([K]) \leq \theta h^{\nu}$, et (16.1) est satisfaite.

18 Soit maintenant f une fonction borélienne dans le demi-espace, et soit $f^<$ la fonction maximale conique (§ VII, n°1)

$$(18.1) \quad f^<(x) = \sup_{\eta \in \Gamma_x} |f(\eta)| \quad \text{avec } \Gamma_x = \{ \eta : |y-x| \leq \nu \}$$

Si $B = \{ |f| > t \}$, nous avons $[B] = \{ f^< > t \}$, donc $\mu \{ |f| > t \} \leq c\theta \lambda \{ f^< > t \}$ et en intégrant de 0 à $+\infty$ par rapport à dt

$$(18.2) \quad \int |f| \mu \leq c\theta \int f^< \lambda$$

19 Considérons maintenant le noyau de MARTIN sur $E \times \bar{E}$ ($E = \mathbb{R}^{\nu} \times]0, \infty[$)

$$(19.1) \quad k(\xi, \eta) = \frac{1}{\nu} v(\xi, \eta) \text{ si } \eta = (y, \nu), \nu > 0 ; \quad k(\xi, \eta) = q_u(x, y) \text{ si } \begin{matrix} \xi = (x, u) \\ \eta = (y, 0) \end{matrix}$$

Le potentiel de MARTIN d'une mesure positive μ est la fonction surharmonique positive dans le demi-espace ouvert E

$$(19.2) \quad K\mu(\cdot) = \int k(\cdot, \eta) \mu(d\eta)$$

Nous prouvons :

Si la fonction $K\mu$ est bornée, μ est une mesure de CARLESON (la réciproque est fautive, puisque $\varepsilon_{(y, \nu)}$ est une mesure de CARLESON si $\nu > 0$).

DEMONSTRATION. Supposons que $K\mu \leq a$. Soit j_h l'indicatrice de $T(0, h)$.

Nous allons prouver que

$$(19.3) \quad \int j_h(\xi) k(x, \xi) dx du \geq \theta h \quad \text{pour } \eta \in T(0, h)$$

Cela entraînera

$$\begin{aligned} \theta h \mu(T(0, h)) &\leq \int_{T(0, h)} \mu(d\eta) \int j_h(\xi) k(\xi, \eta) dx du \leq \int j_h(\xi) dx du / k(\xi, \eta) \mu(d\eta) \\ &\leq a \int j_h(\xi) dx du = ah^{\nu+1} \end{aligned}$$

donc $\mu(T(0, h)) \leq ch^{\nu}$ ($c = a/\theta$), et ce qu'on a fait au point 0 s'applique à n'importe quel point. Par dilatation, on se ramène à vérifier (19.3) pour $h=1$ (ce n'est pas tout à fait évident). Soit C un compact contenu dans l'intérieur de $T(0, 1)$ et de mesure positive. La fonction $(\xi, \eta) \mapsto k(\xi, \eta)$ est continue et strictement positive, donc bornée inférieurement,

dans le compact $C \times T(0,1)$. Mais alors $\int_C j_1(\xi)k(\xi,.)$ est bornée inférieurement dans $T(0,1)$, et cela entraîne (19.3).

- 20 Et maintenant, nous revenons au § III, n°3 : si f est une fonction de BMO, le potentiel de GREEN $V(\text{grad}^2 f)$ est borné. Cela signifie que le $\int \text{grad}^2 f(x,u) dx du$ a un potentiel de MARTIN borné, et par conséquent

la mesure de densité $\int \text{grad}^2 f(x,u)$ est une mesure de CARLESON si f appartient à BMO.

Ceci est une étape importante dans la démonstration du théorème de dualité classique. Voir [RR], p.72, Satz 2. Il y a une réciproque (même référence, Satz 3), qui exprime que l'équivalence (CARLESON) \Leftrightarrow (pot. de MARTIN borné) est vraie pour les mesures de ce type particulier.

- 21 Voici encore une conséquence du n°19, assez intéressante, due à STEIN et ZYGMUND ([RR] p.86). Soit φ une fonction sousharmonique positive telle que $V\varphi$ soit bornée par une constante c . C'est le cas par exemple pour $\varphi = \text{grad}^2 f$ lorsque $f \in \text{BMO}$. Nous avons vu que l'on a dans ce cas, si Q est un cube d'arête h et de centre x

$$\int_{Q \times [0,2h]} u\varphi(x,u) dx du \leq \theta c h^v$$

Sur $Q \times [h,2h]$ on a $u \geq h$, donc

$$\int_{Q \times [h,2h]} h\varphi(x,u) dx du \leq \int_{Q \times [0,2h]} u\varphi(x,u) dx du \leq \theta c h^v$$

et cela signifie que la moyenne M de φ sur le cube $Q \times [h,2h]$, de centre $(x, 3h/2)$, est $\leq \theta c h^{-2}$. Or φ est sousharmonique : en comparant la moyenne sur le cube à la moyenne sur une boule inscrite, on voit que $\varphi(x, 3h/2) \leq \theta c h^{-2}$, majoration indépendante de x . Ainsi

Si $\varphi \geq 0$ est sousharmonique, et $V(u\varphi) \leq c$, on a $\varphi(x,u) \leq \theta c u^{-2}$.

Cette propriété n'a manifestement rien à voir avec toutes ces boules et ces cubes : elle a un sens pour des semi-groupes quelconques prolongés par produit avec un mouvement brownien horizontal. Qui trouvera une meilleure démonstration ?

- 21 Voici une dernière conséquence du n°19. Rappelons nous qu'une mesure μ telle que $K\mu \leq \lambda$ a satisfait à $\mu(B) \leq \theta a \lambda([B])$ pour tout borélien B . Par conséquent

$$(21.1) \quad \sup \{ \mu : K\mu \leq \lambda \} \mu(B) \leq \theta \lambda([B])$$

Qu'est ce que le côté gauche ? C'est la capacité de MARTIN de B . Si l'on interprète cette capacité comme probabilité de rencontre de B pour le

"mouvement brownien venant de l'infini", la signification de (21.1) est la moitié facile (§ VII, n°4) du théorème de BURKHOLDER-GUNDY-SILVERSTEIN. Mais cette démonstration est évidemment bien moins bonne que celle du § VII.

App. 3 : QUELQUES PROBLEMES NON RESOLUS

LE PROLONGEMENT PARABOLIQUE

1 Le prolongement harmonique d'une fonction f (mettons positive pour être sûr que les intégrales ont un sens) est donné par

$$(1.1) \quad f(x,u) = Q_u(x,f)$$

où (Q_t) est le semi-groupe de CAUCHY (le noyau de POISSON). Le prolongement parabolique est donné par

$$(1.2) \quad f^\circ(x,u) = P_u(x,f)$$

où (P_t) est le semi-groupe du mouvement brownien.

On peut développer une théorie de la dualité \underline{H}^1 - \underline{BMO} pour les prolongements paraboliques. Commençons par les aspects analytiques de la question. L'espace \underline{BMO} parabolique se définit tout naturellement comme l'espace des fonctions f telles que

$$(1.3) \quad P_t(x,f^2) < \infty \text{ pour au moins un } t > 0 \text{ et un } x \in \mathbb{R}^n \text{ (et alors la même propriété est vraie pour tout } \bar{t} > 0 \text{ et tout } \bar{x} \text{ , la densité } P_{\bar{t}}(\bar{x}, \cdot) / P_t(x, \cdot) \text{ étant bornée) ;}$$

$$(1.4) \quad \text{il existe } c \geq 0 \text{ telle que } P_t(f^2) - P_t f)^2 \leq c^2 \text{ pour tout } t .$$

Le semi-groupe (P_t) étant à décroissance plus rapide que le semi-groupe (Q_t) , il résulte aussitôt du début du § III que l'espace \underline{BMO} parabolique est identique à l'espace \underline{BMO} classique.

L'espace \underline{H}^1 parabolique peut se définir tout naturellement au moyen de la fonction maximale radiale $x \mapsto \sup_{t > 0} |f^\circ(x,t)|$. Et ici il résulte d'un théorème très général de FEFFERMAN et STEIN que cet espace est identique à celui que nous avons étudié plus haut, défini à l'aide de la fonction maximale radiale $\sup_t |Q_t(x,f)|$. Le théorème de dualité entre \underline{H}^1 parabolique et \underline{BMO} parabolique est donc vrai, et se réduit au théorème de dualité que nous avons vu - mais ce n'est pas évident.

Du point de vue probabiliste, maintenant, le processus (X_t, U_t) où (X_t) est un mouvement brownien "transversal", (U_t) un mouvement brownien "horizontal" que l'on tue à la première rencontre de 0, est remplacé par (X_t, V_t) , où (V_t) est un processus de translation uniforme vers la gauche, tué à la première rencontre de 0.

L'espace $\underline{\underline{H}}_p^1$ probabiliste relatif au prolongement parabolique se définit ainsi. On associe à f sur le bord la martingale

$$(1.6) \quad M_t = f^\circ(X_{t \wedge T_0}, V_{t \wedge T_0}) \quad \langle M, M \rangle_t = \int_0^{t \wedge T_0} 2 \text{grad}_\dagger^2 f^\circ(X_s, V_s) ds$$

où T_0 est la première rencontre du bord (en fait $T_0 = V_0$, puisque le processus (V_t) est une translation uniforme) et la notation grad_\dagger signifie que la composante "horizontale" est absente du gradient. Dans ces conditions, la norme $\underline{\underline{H}}_p^1(\mu)$ relative à la mesure initiale μ est

$$\|f\|_{\underline{\underline{H}}_p^1(\mu)} = E^\mu[\sup_t |M_t|] = E^\mu[\sup_t |f^\circ(X_{t \wedge T_0}, V_{t \wedge T_0})|]$$

et comme d'habitude $\|f\|_{\underline{\underline{H}}_p^1} = \lim_{a \rightarrow \infty} \|f\|_{\underline{\underline{H}}_p^1(\lambda_a)}$.

Ici le retourné du processus (X_t, V_t) de mesure initiale λ_a est immédiat. C'est un processus (X_t, W_t) , où W_t est une translation uniforme vers la droite, de mesure initiale λ_0 , tué à la première rencontre de l'hyperplan d'abscisse a . Donc on a tout simplement

$$(1.6) \quad \|f\|_{\underline{\underline{H}}_p^1} = E^{\lambda_0} [\sup_t |f^\circ(X_t, t)|]$$

où (X_t) est un mouvement brownien dans \mathbb{R}^v . Mais remarquer que le processus $f^\circ(X_t, t)$ n'est pas une martingale : ce qui est une martingale, c'est pour tout a fixé le processus $(f(X_t, a-t))_{0 \leq t \leq a}$!

Quant à l'interprétation probabiliste de $\underline{\underline{BMO}}$, elle est la même que dans la théorie des prolongements harmoniques : f appartient à $\underline{\underline{BMO}}$ si et seulement si pour une (pour toute) mesure initiale μ la martingale associée (M_t) est dans l'espace $\underline{\underline{BMO}}(P^\mu)$ du processus (X_t, V_t) pour la loi P^μ . La mise en dualité de $\underline{\underline{H}}_p^1$ et de $\underline{\underline{BMO}}$ se fait au moyen de la forme bilinéaire

$$(1.7) \quad \Lambda(f, g) = 2 \int_0^\infty \text{grad}_\dagger f^\circ(x, u) \cdot \text{grad}_\dagger g^\circ(x, u) du$$

Ici encore, la théorie de la dualité revient au fait que les atomes appartiennent à $\underline{\underline{H}}_p^1$... mais les outils pour le démontrer font défaut : transformée de RIÉSZ, fonction maximale conique (il faudrait remplacer ici les cônes par des paraboloides, semble t'il), et on ne sait pas non plus s'il y a identité entre le $\underline{\underline{H}}_p^1$ défini au moyen de la fonction maximale (parabolique) radiale, et le $\underline{\underline{H}}_p^1$ ci-dessus . Tout ce qui est évident, c'est que $\underline{\underline{H}}_p^1$ est contenu dans $\underline{\underline{H}}^1$ (radial) avec une norme plus forte , comme au § VII. n°2 . C'est une situation aussi peu satisfaisante que possible.

LE SEMI-GROUPE DE LA CHALEUR

2 L'étude du prolongement "parabolique" est l'étude de certaines solutions de l'équation de la chaleur dans le demi-espace, pour lesquelles la coordonnée "singulière" (celle qui manque dans la somme des dérivées partielles du second ordre) est la coordonnée horizontale. Mais il est beaucoup plus intéressant que cette coordonnée se trouve en position "transversale" .

Nous distinguons donc sur \mathbb{R}^v la coordonnée x_v , et nous désignons par (P_t) , non plus le semi-groupe du mouvement brownien, mais le semi-groupe de la chaleur admettant comme générateur infinitésimal

$$(2.1) \quad -\frac{\partial}{\partial x_v} + \sum_1^{v-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

L'expression explicite de (P_t) est connue : la mesure $P_t(0, dx)$ est portée par l'hyperplan $\{x_v=t\}$, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de l'hyperplan, avec la densité

$$(2.2) \quad (4\pi x_v)^{-(v-1)/2} \exp(-|x'|^2/4x_v) \quad \text{où } x=(x', x_v)$$

Ce semi-groupe est stable d'ordre 2 (au sens que l'on a donné à ce mot dans l'appendice 2, n°4), mais par rapport à un autre groupe de "dilatations" . Si nous définissons $c \cdot x$ ($c>0$, $x \in \mathbb{R}^v$) par $c \cdot x = (c^{1/2} x_v, cx')$, alors nous avons, avec les notations de l'appendice 2, n°4

$$(2.3) \quad c \cdot P_t = P_{c^2} 2_t$$

Soit dit en passant : lorsqu'on opère sur des groupes de dilatations généralisées, qui ne sont plus des homothéties, la notion d'ordre de stabilité n'a plus de sens intrinsèque. Par exemple, on pourrait décrire le même groupe de dilatations avec un autre paramètre en posant $c \cdot x = c^\alpha \cdot x$ ($\alpha \neq 0$), et on aurait cette fois $c \cdot P_t = P_{c^{2\alpha}} 2_t$. Il me semble que pour obtenir une notion d'ordre de stabilité intrinsèque, il faut regarder aussi de quelle manière les dilatations opèrent sur le semi-groupe et sur sa mesure invariante (ici $\int f(c \cdot x) \lambda(dx) = c^{-(v-1/2)} \int f(x) \lambda(dx)$) l'ordre de stabilité intrinsèque étant une fonction du rapport des deux exposants. Mais revenons au semi-groupe de la chaleur.

Les processus que l'on considère sont alors de la forme (X_t, U_t) , où (X_t) est un processus de la chaleur gouverné par (P_t) , et (U_t) un mouvement brownien sur \mathbb{R} , que l'on tuera à la première rencontre de 0.

Nous n'insistons pas, parce que nous ne savons pas grand chose : tout reste à faire ! Démontrer la dualité entre \underline{H}_p^1 et \underline{BMO} (l'espace \underline{BMO} que nous allons définir dans un instant), et en déduire les théorèmes sur les "transformées de RIESZ paraboliques".

Mais comment décrire l'espace $\underline{\underline{BMO}}$ associé au semi-groupe de la chaleur ? On peut conjecturer que c'est l'espace suivant, introduit par STROOCK dans [Str] pour l'étude de certaines intégrales singulières, sous des hypothèses un peu plus générales.

Soit $\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)$ un multiplet de nombres >0 . Soit Q un pavé dont les arêtes ont pour longueurs (h_1, \dots, h_ν) . Nous dirons que Q est de type α si $h_1^{1/\alpha_1} = h_2^{1/\alpha_2} = \dots = h_\nu^{1/\alpha_\nu}$. Un cube unité, par exemple, est toujours de type α . Les pavés de type α sont les mêmes que ceux de type $t\alpha$ ($t>0$) de sorte que, si les α_i sont rationnels, on peut toujours se ramener au cas où ils sont entiers.

STROOCK définit l'espace $\underline{\underline{BMO}}(\alpha)$ comme l'ensemble des fonctions f localement intégrables telles que $(1/|Q|) \int_Q |f-f_Q| \lambda \leq c$ pour tout pavé Q de type α . Pour $\alpha=(1, 1, \dots, 1)$ on a l'espace $\underline{\underline{BMO}}$ ordinaire, et l'espace $\underline{\underline{BMO}}$ associé au semi-groupe de la chaleur semble être $\underline{\underline{BMO}}(\alpha)$ pour $\alpha=(1, \dots, 1, \frac{1}{2})$. La notion d'atomes se transpose, elle aussi, au type α de manière évidente.

Si les α_i sont entiers, il est facile de construire des partitions d'un pavé de type α en pavés de type α , de manière à pouvoir utiliser la théorie des martingales : il suffit de couper le premier côté en 2^{α_1} parties égales, le second en 2^{α_2} parties égales... Si les α_i sont incommensurables, l'article [Str] contient un lemme technique qui permet d'utiliser la théorie des martingales pour des partitions "presque de type α ".

Parmi les problèmes concrets que l'on a rencontrés dans les exposés I et II rappelons encore la détermination du dual de $\underline{\underline{H}}_p^1(\mu)$ pour une mesure μ quelconque.

D'autre part, FEFERMAN-STEIN ont montré que $\underline{\underline{H}}^1$ coïncide aussi avec l'ensemble des fonctions f dont la fonction de LITTLEWOOD-PALEY radiale

$$x \mapsto \left(\int_0^\infty u \operatorname{grad}^2 f(x, u) du \right)^{1/2} \text{ ou } \left(\int_0^\infty u (D_u f(x, u))^2 du \right)^{1/2}$$

est intégrable. Ce critère admet-il une démonstration probabiliste ? Problème analogue pour l'intégrale d'aire de LUSIN. A ce propos, une remarque de FEFERMAN-STEIN doit jouer un rôle. Soit H l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_+, u du)$. Soit $f(x, u)$ un prolongement harmonique, et soit $\varphi(x, u) = D_i f(x, u)$ (pour $i=0$, c'est la dérivée radiale). Au point (x, t) associons la fonction $\varphi(x, t+.)$ sur \mathbb{R}_+ . D'après les inégalités de LITTLEWOOD-PALEY, cette fonction est dans H dès que f possède un peu d'intégrabilité, et nous avons alors une fonction harmonique à valeurs dans

H, donc aussi des martingales hilbertiennes.

PROBLEMES DE NATURE GENERALE

Ici nous désignons par (X_t) un bon processus de Markov à valeurs dans un espace d'états E, à durée de vie ζ finie. La limite à gauche $X_{\zeta-}$ peut être prise dans un compactifié convenable.

1) Soit μ une loi initiale. Supposons que E soit localement compact, et munissons l'espace $\underline{C}(E)$ de la norme

$$f \mapsto E^\mu [\sup_t |f(X_t)|]$$

Quelles sont les formes linéaires continues pour cette norme ?

2) Soit M une v.a. qui appartient à $\underline{BMO}(P^\mu)$, et soit N son espérance conditionnelle par rapport à la tribu terminale,

$$N = E^\mu [M | X_{\zeta-}]$$

est ce que N appartient encore à $\underline{BMO}(\mu)$?