CLAUDE DELLACHERIE

Sur la construction de noyaux boréliens

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 545-577
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__545_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

SUR LA CONSTRUCTION DE NOYAUX BORELIENS

par C. Dellacherie

Nous donnons ici une réponse à peu près complète aux questions posées dans le séminaire IX par Getoor (p 455) et par Meyer (p 465). Il s'agit d'un problème de régularisation de pseudo-noyaux, que nous énoncerons à nouveau plus loin et discuterons en détail. Pour l'instant, il suffit de savoir qu'il se résout trivialement si l'on sait résoudre le problème suivant :

PROBLEME 1.- On se donne un espace métrisable compact Z muni d'une classe $\underline{\underline{N}}$ de parties négligeables, c'est à dire telle que

1) une réunion dénombrable d'éléments de $\underline{\underline{N}}$ appartient à $\underline{\underline{N}}$
2) un sous-ensémble d'un élément de $\underline{\underline{N}}$ appartient à $\underline{\underline{N}}$

On se donne aussi une partie Y de Z telle que Y^c appartienne à $\underline{\underline{N}}$. A quelle condition peut on affirmer que Y contient un borélien B de Z tel que B^c appartienne à $\underline{\underline{N}}$?

Une solution classique de ce problème est donnée par le théorème de capacitabilité : la réponse est affirmative si $\underline{\underline{N}}$ est la classe des ensembles négligeables pour une capacité de Choquet sur Z et si Y est coanalytique dans Z .

Dans le paragraphe 1 , qui contient les résultats positifs les plus "utiles" , nous prouvons

THEOREME 1.- *Si Y est coanalytique, et si $\underline{\underline{N}}$ est la classe des ensembles négligeables pour toute mesure $m \in M$, où M est une partie analytique de $\underline{\underline{M}}^+(Z)$, alors la réponse au problème 1 est positive.*

THEOREME 2.- *Pour un processus de Markov satisfaisant aux hypothèses usuelles, et à l'hypothèse de continuité absolue, la classe des ensembles semi-polaires est du type précédent.*

Cela répond aux questions posées par Meyer. Dans le paragraphe 2, nous présentons le problème 2 (régularisation de pseudo-noyaux) et traduisons le théorème 1 en une réponse positive au problème 2 dans certains cas. Puis, passant aux résultats négatifs, nous montrons que le problème 2 ne saurait avoir de solution "générale" en dehors du cas où Y est coanalytique. Cela répond à peu près aux questions posées par Getoor.

Enfin, au paragraphe 3, nous approfondissons en particulier le théorème 1 en montrant que $\underline{\underline{N}}$ peut être la classe des ensembles négligeables pour un "calibre" - notion plus générale que celle de capacité, vérifiant les mêmes propriétés d'approximation, mais ayant l'avantage d'être "invariante" par composition avec un noyau borélien. En fait, nous en avons profité pour exposer les grandes lignes de la théorie des noyaux-capacités et noyaux-calibres, en l'illustrant de quelques exemples.

1. DEMONSTRATION DES THEOREMES 1 et 2

NOTATIONS. Si F est un espace métrisable compact, nous désignerons par

$\underline{P}(F)$ l'ensemble des parties de F

$\underline{\underline{K}}(F)$ l'ensemble des parties compactes de F, muni de la topologie de Hausdorff : c'est un espace compact métrisable

$\underline{\underline{M}}^1(F)$ l'ensemble des mesures positives de masse ≤ 1 sur F, muni de la topologie vague : c'est un espace compact métrisable.

Sauf mention du contraire, toutes les fonctions I sur $\underline{P}(F)$ sont supposées telles que $I(\emptyset) = 0$ et $I(F) \leq 1$.

Rappelons qu'une fonction I sur $\underline{P}(F)$ est une capacité (de Choquet) si elle vérifie les conditions suivantes

1) I est croissante : $A \subset B \Rightarrow I(A) \leq I(B)$

2) I monte sur $\underline{P}(F)$: $A_n \uparrow A \Rightarrow I(A_n) \uparrow I(A)$

3) I descend sur $\underline{\underline{K}}(F)$: $K_n \in \underline{\underline{K}}(F)$ et $K_n \downarrow K \Rightarrow I(K_n) \downarrow I(K)$

Etant donnée la croissance de I , la condition 3) est équivalente à

.) la restriction de I à $\underline{\underline{K}}(F)$ est s.c.s.

DEFINITION 1.- *Soient F_1 et F_2 deux espaces métrisables compacts, et J une fonction sur $\underline{P}(F_1) \times \underline{P}(F_2)$. On dit que J est une* bicapacité *si*

1) *pour tout $A_1 \in \underline{P}(F_1)$, $J(A_1,.)$ est croissante et monte sur $\underline{P}(F_2)$, et pour tout $K_1 \in \underline{\underline{K}}(F_1)$, $J(K_1,.)$ descend sur $\underline{\underline{K}}(F_2)$*

2) *pour tout $A_2 \in \underline{P}(F_2)$, $J(.,A_2)$ est croissante et monte sur $\underline{P}(F_1)$, et pour tout $K_2 \in \underline{\underline{K}}(F_2)$, $J(.,K_2)$ descend sur $\underline{\underline{K}}(F_1)$.*

Le résultat principal sur les bicapacités est le suivant, qui est la quintessence de la démonstration du théorème de séparation figurant à la p.101 de la nouvelle édition de "Probabilités et Potentiel"

THEOREME 3.- *Soit J une bicapacité. Si A_1 et A_2 sont des parties analytiques respectivement de F_1 et F_2, on a*

$$J(A_1,A_2) = \sup J(K_1,K_2)\,,\ K_i \in \underline{\underline{K}}(F_i)\,,\ K_i \subset A_i \quad (i=1,2)$$

$$J(A_1,A_2) = \inf J(B_1,B_2)\,,\ B_i \in \underline{\underline{B}}(F_i)\,,\ B_i \supset A_i \quad (i=1,2)$$

Note : comme l'ensemble $\underline{\underline{B}}(F_i)$ des boréliens de F_i est stable pour les intersections dénombrables et que J est croissante, la borne inférieure dans la deuxième formule est atteinte.

DEMONSTRATION. Disons qu'une partie R de $F_1 \times F_2$ est un rectangle de côtés C_1 et C_2 si $R = C_1 \times C_2$ - les côtés sont bien déterminés si R n'est pas vide - , et désignons par $\underline{\underline{R}}$ une classe de rectangles de $F_1 \times F_2$ contenant les rectangles compacts et stable pour les lim inf de suites. Définissons une fonction I sur $\underline{P}(F_1 \times F_2)$ en posant, pour tout $R \in \underline{\underline{R}}$ de cotés C_1 et C_2, $I(R) = J(C_1,C_2)$ (l'ambiguité pour $C = \emptyset$ est sans importance : $I(\emptyset) = 0$) et, pour toute partie H de $F_1 \times F_2$,

$$I(H) = \inf I(R)\,,\ R \in \underline{\underline{R}}\,,\ R \supset H$$

Comme $\underline{\underline{R}}$ est en particulier stable pour les intersections dénombrables et que I est croissante sur $\underline{\underline{R}}$, l'inf est atteint sur $\underline{\underline{R}}$. Je dis que I est une capacité. La croissance est évidente. Vérifions la montée. Soient $H_n \uparrow H$, et R_n, $R \in \underline{\underline{R}}$ tels que $H_n \subset R_n$, $H \subset R$ et $I(H_n) = I(R_n)$, $I(H) = I(R)$. Puisque $\underline{\underline{R}}$ est stable pour les lim inf de suites, on peut supposer que $R_n \uparrow R$, quitte à remplacer R_n par $\inf_{k \geq n} R_k$ et R par $\liminf R_k$. La montée de I résulte alors aisément de la montée de J selon chacun de ses arguments. Vérifions enfin la descente sur les compacts. Remarquons d'abord que, $\underline{\underline{R}}$ contenant les rectangles compacts, on a, pour $L \in \underline{\underline{K}}(F_1 \times F_2)$, $I(L) = J(\pi_1(L), \pi_2(L))$ où π_1, π_2 sont les projections sur F_1, F_2. Maintenant, si les compacts $L_n \downarrow L$, on a $\pi_1(L_n) \times \pi_2(L_n) \downarrow \pi_1(L) \times \pi_2(L)$, et la descente de I résulte alors aisément de la descente de J selon chacun de ses arguments compacts. Nous faisons maintenant une remarque capitale : la valeur de I sur les parties compactes ne dépendant pas du choix de $\underline{\underline{R}}$ dans les limites imposées, la valeur de I sur les parties analytiques n'en dépend pas non plus d'après le théorème de capacitabilité. Soient alors A_1, A_2 des parties analytiques non vides de F_1, F_2 (le théorème est trivial si l'un des A_i est vide puisque $J(\emptyset, .) = J(., \emptyset) = 0$) : $A = A_1 \times A_2$ est une partie analytique de $F_1 \times F_2$. Si on prend pour $\underline{\underline{R}}$ la classe des rectangles quelconques (ou analytiques), on obtient la première formule de l'énoncé en appliquant le théorème de capacitabilité à I(A), et, si l'on prend pour $\underline{\underline{R}}$ la classe des rectangles boréliens, on obtient la seconde formule en appliquant la remarque précédente.

REMARQUES.

1) Disons, plus généralement, qu'une fonction J sur $\underline{P}(F_1) \times \dots \times \underline{P}(F_n)$, où les F_i sont métrisables compacts, est une <u>multicapacité</u> si, chaque fois que l'on fixe n-1 arguments, elle est croissante et monte en le n-ième, et descend en le n-ième quand celui-ci est compact ainsi que les arguments fixés. On a un théorème analogue d'approximation pour les multicapacités, qui se démontre de la même manière.

2) Mokobodzki (voir ce volume) et Saint-Raymond viennent de démontrer (indépendamment) le théorème de Novikov sur les suites d'analytiques d'intersection vide sans utiliser le 2ème théorème de séparation. Leurs techniques permettent plus généralement de démontrer un théorème d'approximation pour une multicapacité dépendant d'une infinité dénombrable d'arguments. Pour la définition précise d'une telle multicapacité et une esquisse de la démonstration du théorème, voir mon exposé "Compléments..." de ce volume.

Nous allons déduire du théorème 3 une forme générale du théorème de séparation des ensembles analytiques. Pour cela, il nous faut d'abord définir la notion de noyau-capacité, qui sera convenablement étendue au paragraphe 3 .

DEFINITION 2.- _Soient_ E _et_ F _des espaces compacts métrisables. Une application_ $(x,A) \to U(x,A)$ _de_ $E \times \underline{P}(F)$ _dans_ $\overline{\mathbb{R}}$ _- ici, conformément à nos conventions, dans_ $[0,1]$ _- est un_ noyau-capacité de E dans F _si_

1) _pour tout_ $x \in E$, $U(x,.)$ _est une capacité sur_ F
2) _pour tout_ $K \in \underline{\underline{K}}(F)$, $U(.,K)$ _est s.c.s. sur_ E .

EXEMPLE. Ici, il nous suffira de noter que, si Z est un espace métrisable compact, $(m,A) \to m^*(A)$ est un noyau-capacité de $\underline{\underline{M}}^1(Z)$ dans Z . Nous verrons d'autres exemples au §3 .

THEOREME 4.- _Soient_ U _un noyau-capacité de_ E _dans_ F , A _une partie analytique de_ E _et_ A' _une partie analytique de_ F . _Si l'on a_ $U(x,A') = 0$ _pour tout_ $x \in A$, _alors il existe un borélien_ B _de_ E _contenant_ A _et un borélien_ B' _de_ F _contenant_ A' _tels que_ $U(x,B') = 0$ _pour tout_ $x \in B$.

Note : le théorème de séparation s'obtient en posant $E = F$ et $U(x,H) = 1_H(x)$.

DEMONSTRATION. Posons, pour $C \in \underline{P}(E)$ et $D \in \underline{P}(F)$, $J(C,D) = \sup_{x \in C} U(x,D)$. On définit ainsi une bicapacité J . La croissance et la montée de J selon chacun de ses arguments sont claires. La descente selon chacun des arguments compacts résulte aisément du fait que $U(.,D)$ est s.c.s. sur E pour tout $D\in\underline{\underline{K}}(F)$ et $U(x,.)$ est s.c.s. sur $\underline{\underline{K}}(F)$ pour tout $x\in E$, en appliquant la forme suivante du lemme de Dini-Cartan : si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille filtrante décroissante de fonctions s.c.s. sur un espace compact T, alors $\sup_{t\in T}\inf_{i\in I} f_i(t) = \inf_{i\in I}\sup_{t\in T} f_i(t)$. Ceci dit, la condition de l'énoncé s'écrit $J(A,A') = 0$: il existe donc d'après le théorème 3 des boréliens B,B' contenant A,A' tels que $J(B,B') = 0$.

DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Nous devons montrer que, si Y est une partie coanalytique d'un espace compact métrisable Z et si Y^c est négligeable pour toute mesure $m\in M$, où M est une partie analytique de $\underline{\underline{M}}^1(Z)$, alors Y contient un borélien D de Z tel que D^c soit négligeable pour tout $m\in M$.

Nous prenons, dans l'énoncé précédent, $E = \underline{\underline{M}}^1(Z)$, $F = Z$, $U(m,H) = m^*(H)$ et $A = M$, $A' = Y^c$. La condition que Y^c soit négligeable pour tout $m\in M$ signifie que $U(m,A') = 0$ pour tout $m\in A$, et le théorème 4 nous dit qu'il existe alors un borélien B' contenant A' tel que $U(m,B') = 0$ pour tout $m\in A$ (et même un peu plus) : il ne reste plus qu'à prendre pour D le complémentaire de B' .

DEMONSTRATION DU THEOREME 2

On considère un semi-groupe markovien (P_t) vérifiant les "vieilles" hypothèses droites (mais pas forcément borélien) sur un espace d'états E lusinien métrisable. On suppose que (P_t) vérifie l'hypothèse de continuité absolue et on désigne par λ une mesure de probabilité sur E telle que, pour tout $B\in\underline{\underline{B}}(E)$, on ait $\lambda(B) = 0$ ssi B est de potentiel nul. Dans ces conditions, on sait que la classe $\underline{\underline{N}}$ des ensembles semi-polaires est une classe de parties négligeables de E telle que

1) $A\in\underline{\underline{N}} \Rightarrow \exists B\in\underline{\underline{B}}(E)\ B\in\underline{\underline{N}}$ et $B\supset A$

2) $B\in\underline{\underline{B}}(E)$ et $B\in\underline{\underline{N}} \Leftrightarrow B\in\underline{\underline{B}}(E)$ et $m(B) = 0$ pour toute mesure m ne chargeant pas les éléments de $\underline{\underline{N}}$

L'ensemble $\underline{\underline{M}}^1(E)$ des mesures (positives) de masse ≤ 1 sur E étant muni de la topologie étroite, nous allons montrer qu'il existe une partie analytique[1)] M de $\underline{\underline{M}}^1(E)$ telle que $\underline{\underline{N}}$ soit la classe des ensembles négligeables pour toute mesure $m \in M$. Si on plonge alors E dans un espace métrisable compact F, $\underline{\underline{M}}^1(E)$ s'identifie à un sous-espace lusinien de $\underline{\underline{M}}^1(F)$ et M sera analytique dans $\underline{\underline{M}}^1(F)$.

Nous désignerons comme d'habitude par $(\Omega, \underline{\underline{F}}^\circ, \ldots, (X_t), P^\cdot)$ la réalisation canonique de (P_t). On sait que Ω, ensemble des applications continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans E, est plongeable comme coanalytique dans un espace métrisable compact W de sorte que $\underline{\underline{F}}^\circ = \underline{\underline{B}}(W)_{|\Omega}$. D'autre part, le processus $X = (X_t)$ étant une application mesurable de $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \times \underline{\underline{F}}^\circ)$ dans $(E, \underline{\underline{B}}(E))$, et E étant lusinien, X est la restriction à $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ d'une application borélienne de $Z = \overline{\mathbb{R}}_+ \times W$ dans E : nous choisissons une telle application, que nous noterons encore X. Enfin, Ω étant universellement mesurable dans W, nous identifierons toute mesure sur Ω (en particulier P^λ) à une mesure sur W portée par Ω et toute mesure sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ à une mesure sur Z portée par $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.

Soit D le sous-ensemble de $\underline{\underline{M}}^1(Z)$ constitué par les mesures m admettant, par rapport à P^λ, une désintégration en une mesure aléatoire diffuse. Autrement dit, m appartient à D ssi

il existe un processus croissant $\underline{\underline{B}}(Z)$-mesurable (A_t),
continu, tel que $\forall H \in \underline{\underline{B}}(Z)$ $m(H) = E^\lambda[\int_0^\infty 1_H(t,\omega)\, dA_t(\omega)]$

D'après la caractérisation des ensembles semi-polaires en termes de la théorie générale des processus, on a, pour $B \in \underline{\underline{B}}(E)$,

$$B \in \underline{\underline{N}} \Leftrightarrow \forall m \in D \;\; m(X^{-1}(B)) = 0$$

Nous allons montrer que D est un borélien de $\underline{\underline{M}}^1(Z)$. On pourra alors achever la démonstration en prenant $M = \{X(m)\, ,\, m \in D\}$: M sera analytique dans $\underline{\underline{M}}^1(E)$ comme image directe de D par l'application borélienne

---

1) Mokobodzki, à qui j'ai signalé ce résultat, m'a affirmé, qu'avec ses "outils", il pouvait démontrer que l'ensemble des $m \in \underline{\underline{M}}^1(E)$ ne chargeant pas les semi-polaires est un borélien de $\underline{\underline{M}}^1(E)$. Je démontre moins, avec sans doute une méthode moins élégante.

de $\underline{\underline{M}}^1(Z)$ dans $\underline{\underline{M}}^1(E)$ induite par X.

Nous remarquons d'abord que $m \in \underline{\underline{M}}^1(Z)$ appartient à D ssi m ne charge pas les compacts de Z qui ne diffèrent d'un graphe de fonction continue de W dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ que par un ensemble P^λ-évanescent. La nécessité de cette condition est claire. Démontrons sa suffisance. D'abord, elle entraine que m ne charge pas les ensembles P^λ-évanescents : d'après un argument de capacitabilité classique, un borélien de Z est évanescent ssi tout compact inclus dedans est évanescent, et, si H est un compact évanescent, on a $m(H) \leq m(H \cup (\{0\} \times W)) = 0$. Il existe donc un processus croissant $\underline{\underline{B}}(Z)$-mesurable (B_t), continu à droite, tel que l'on ait $m(H) = E^\lambda[\int_0^\infty 1_H \, dB_t]$ pour tout $H \in \underline{\underline{B}}(Z)$. Si (B_t) n'était pas P^λ-p.s. continu, il existerait une fonction borélienne S de W dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que $E^\lambda(B_S - B_{S-}) > 0$ et m chargerait alors le graphe [S] de S ; mais alors m chargerait aussi un compact K inclus dans [S] . K étant le graphe d'une fonction continue de la projection de K sur W dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, on voit, en appliquant le théorème d'extension de Tietze, que m chargerait le graphe d'une fonction continue de W dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Par conséquent, (B_t) est P^λ-p.s. continu, et peut donc être régularisé en un processus croissant continu (A_t) : ainsi m appartient à D.

Pour tout compact K de Z, posons, pour tout $\omega \in W$,

$$U_K(\omega) = \inf \{t \in \overline{\mathbb{R}}_+ : (t,\omega) \in K\} \qquad \text{avec } \inf \emptyset = +\infty$$

$$V_K(\omega) = \sup \{t \in \overline{\mathbb{R}}_+ : (t,\omega) \in K\} \qquad \text{avec } \sup \emptyset = -\infty$$

$$D_K(\omega) = \exp(-U_K(\omega)) - \exp(-V_K(\omega))$$

Les fonctions U_K, V_K et D_K ainsi définies sur W sont boréliennes, et $D_K(\omega)$ est le diamètre de la coupe $K(\omega)$ quand $\overline{\mathbb{R}}_+$ est muni de la distance $d(u,v) = |e^{-u} - e^{-v}|$, avec la convention habituelle que diamètre de $\emptyset = -\infty$. Et, d'après ce que l'on a vu plus haut, on a l'équivalence, pour $m \in \underline{\underline{M}}^1(Z)$,

$$m \in D \Leftrightarrow \forall K \in \underline{\underline{K}}(Z) \; [E^\lambda(D_K) = 0 \Rightarrow m(K) = 0]$$

Une fonction croissante sur $\underline{\underline{K}}(Z)$ étant s.c.s. ssi elle descend sur $\underline{\underline{K}}(Z)$, la fonction I de $\underline{\underline{K}}(Z)$ dans $\{-\infty\}\cup[0,1]$ définie par $I(K) = E^\lambda(D_K)$ est s.c.s., et la fonction $(m,K) \to m(K)$ de $\underline{\underline{M}}^1(Z) \times \underline{\underline{K}}(Z)$ dans $[0,1]$ est aussi s.c.s. (elle est séparément s.c.s., et croissante en K pour m fixé). Contrairement à ce que nous avions écrit dans une première rédaction, cela ne permet pas encore de conclure que D est borélien : il faut encore travailler un peu. Nous allons montrer que l'on a l'équivalence, pour $m\in\underline{\underline{M}}^1(Z)$, $K\in\underline{\underline{K}}(Z)$ et $p,q\in\mathbb{N}$,

$$\forall K\ [I(K)=0 \Rightarrow m(K)=0] \Leftrightarrow \forall p\ \exists q\ \forall K\ [0\leq I(K)<\frac{1}{q} \Rightarrow m(K)<\frac{1}{p}]$$

Comme, pour p et q fixés, le prédicat $0\leq I(K)<\frac{1}{q}$ définit l'intersection d'un ouvert et d'un fermé et donc un $\underline{\underline{K}}_\sigma$ de $\underline{\underline{K}}(Z)$ et que le prédicat $m(K)<\frac{1}{p}$ définit un ouvert et donc un $\underline{\underline{G}}_\delta$ de $\underline{\underline{M}}^1(Z)\times\underline{\underline{K}}(Z)$, le prédicat $\forall K\ [0\leq I(K)<\frac{1}{q} \Rightarrow m(K)<\frac{1}{p}]$ définit un $\underline{\underline{G}}_\delta$ de $\underline{\underline{M}}^1(Z)$: on aura bien ainsi démontré que D est borélien.

L'implication $\Leftarrow$ est évidente. Démontrons l'implication $\Rightarrow$: il suffit de montrer que, si (K_n) est une suite de compacts de Z telle que $0\leq I(K_n)<2^{-n}$ pour tout n, alors $\lim_n m(K_n)=0$ pour tout $m\in D$. Or, comme $I(K_n) = E^\lambda(D_{K_n})$, la relation $\forall n\ 0\leq I(K_n)<2^{-n}$ entraine que, P^λ-p.s., $\lim_n D_{K_n} = 0$, et donc que l'on a $0 \leq \lim_n U_{K_n} = \lim_n V_{K_n}$ P^λ-p.s. . Par conséquent, si $m\in D$ se désintègre en un processus croissant continu (A_t), on a $m(K_n) \leq E^\lambda(A_{V_{K_n}} - A_{U_{K_n}})$ et donc $\lim_n m(K_n) = 0$ en vertu du théorème de Lebesgue.

UNE APPLICATION DU THEOREME 1

Avant de passer au problème de la régularisation des pseudo-noyaux, nous donnerons une première application du théorème 1 aux noyaux boréliens. On rappelle qu'un espace métrisable est cosouslinien (resp lusinien, souslinien) s'il est homéomorphe à une partie coanalytique (resp borélienne, analytique) d'un espace compact métrisable. Il est alors coanalytique (resp...) dans tout espace compact métrisable dans lequel il est plongé.

THEOREME 5.- <u>Soient</u> X <u>un espace métrisable compact</u> (<u>ou</u>, <u>plus généralement</u>, <u>souslinien</u>) , Y <u>un espace métrisable cosouslinien et</u> Q <u>un noyau (sousmarkovien) borélien de</u> X <u>dans</u> Y . <u>Il existe alors un sous-espace lusinien</u> B <u>de</u> Y <u>tel que</u> $Q(B^c) = 0$.[1)]

DEMONSTRATION. Plongeons Y dans un espace compact métrisable Z et identifions toute mesure sur Y à une mesure sur Z portée par Y . L'application $m \rightarrow mQ$ de $\underline{\underline{M}}^1(X)$ dans $\underline{\underline{M}}^1(Z)$ est borélienne, et donc l'image M de $\underline{\underline{M}}^1(X)$ par Q est une partie analytique de $\underline{\underline{M}}^1(Z)$. Comme les éléments de M sont portés par Y qui est coanalytique, il existe d'après le théorème 1 un borélien B de Z contenu dans Y - i.e. un sous-espace lusinien B de Y - les portant tous : donc $Q(B^c) = 0$.

Voici une application de ce théorème aux processus de Markov. Soit (P_t) un semi-groupe <u>borélien</u> vérifiant les hypothèses droites sur un espace d'états lusinien E et soit $(\Omega,\underline{\underline{F}}^{\circ},\ldots,P^{\cdot})$ sa réalisation canonique. On peut munir Ω d'une structure d'espace métrisable cosouslinien telle que $\underline{\underline{F}}^{\circ} = \underline{\underline{B}}(\Omega)$, et définir un noyau borélien Q de E dans Ω en posant $Q(x,f) = E^x[f]$ pour tout $f \in b\underline{\underline{F}}^{\circ}$ et tout $x \in E$. Le théorème 5 nous dit alors que toutes les mesures P^x , $x \in E$, sont portées par un même sous-espace lusinien de Ω .

II. REGULARISATION DES PSEUDO-NOYAUX

Nous nous donnons maintenant deux espaces mesurables $(X,\underline{\underline{X}})$ et $(Y,\underline{\underline{Y}})$, X étant muni d'une classe $\underline{\underline{N}}$ d'ensembles négligeables, et un pseudo-noyau (sous-markovien) P de X dans Y relativement à $\underline{\underline{N}}$. Autrement dit, P est une application de l'ensemble $b\underline{\underline{Y}}$ des fonctions $\underline{\underline{Y}}$-mesurables bornées sur Y dans l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions $\underline{\underline{X}}$-mesurables bornées sur X pour la relation d'égalité $\underline{\underline{N}}$-presque-partout (en abrégé, $\underline{\underline{N}}$-p.p.), et vérifie les conditions

---

1) C'est en général faux si Y est souslinien : prendre X compact, Y souslinien non lusinien, $s : X \rightarrow Y$ borélienne surjective et poser $Qf = s \circ f$ pour toute $f \in b\underline{\underline{B}}(Y)$.

1) $f \in b\underline{\underline{Y}}$ et $0 \leq f \leq 1 \Rightarrow 0 \leq Pf \leq 1$ $\underline{\underline{N}}$-p.p.

2) $f_1, f_2 \in b\underline{\underline{Y}}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 \Rightarrow Pf = a_1 Pf_1 + a_2 Pf_2$ $\underline{\underline{N}}$-p.p.

3) $f_n, f \in b\underline{\underline{Y}}$ et $f_n \uparrow f \Rightarrow Pf_n \uparrow Pf$ $\underline{\underline{N}}$-p.p.

PROBLEME 2.- Existe-t'il un vrai noyau (sousmarkovien) Q de X dans Y tel que, pour tout $f \in b\underline{\underline{Y}}$, Qf soit un représentant de la classe Pf ? Un tel noyau Q est appelé une <u>régularisation</u> de P .

Si l'espace mesurable $(Y, \underline{\underline{Y}})$ est <u>séparable</u>, la méthode classique pour attaquer ce problème est la suivante : l'espace séparable $(Y, \underline{\underline{Y}})$ peut être considéré comme une partie d'un espace métrisable compact Z de sorte que $\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{B}}(Z)_{|Y}$ - à condition bien sûr que les atomes de $\underline{\underline{Y}}$ soient les points de Y , ce qui peut s'obtenir par un passage au quotient anodin.. On définit alors un pseudo-noyau $\tilde{P}$ de X dans Z en posant, pour tout $f \in b\underline{\underline{B}}(Z)$, $\tilde{P}f = P(f_{|Y})$, et, en s'appuyant sur la compacité et la séparabilité de Z , on a la proposition suivante, qui figure dans l'exposé de Getoor

LEMME.- <u>Il existe un vrai noyau</u> $\tilde{Q}$ <u>de</u> X <u>dans</u> Z <u>tel que, pour tout</u> $f \in b\underline{\underline{B}}(Z)$, $\tilde{Q}f$ <u>soit un représentant de la classe</u> $\tilde{P}f = P(f_{|Y})$.

Le problème 2 est alors équivalent au problème suivant

PROBLEME 2'.- Existe-t'il un vrai noyau Q de X dans Y tel que, pour tout $f \in b\underline{\underline{B}}(Z)$, on ait $\tilde{Q}f = Q(f_{|Y})$ $\underline{\underline{N}}$-p.p. ?

La réponse est évidemment affirmative s'il existe un borélien B de Z , contenu dans Y , tel que $\tilde{Q}(Z - B) = 0$ $\underline{\underline{N}}$-p.p. (ce qui s'écrit encore $P(Y - B) = 0$ $\underline{\underline{N}}$-p.p.) : il suffit alors de poser, pour $f \in b\underline{\underline{Y}}$, $Qf = \tilde{Q}(f1_B)$ où $f1_B$ est considérée comme fonction borélienne <u>sur</u> Z . Une conséquence immédiate de cette condition est le fait que, si Y est borélien dans Z , i.e. si Y est un espace lusinien, le problème 2 a une solution, quels que soient X , $\underline{\underline{N}}$ et P , comme dans le cas où Y est métrisable compact : ce n'est pas mystérieux, car, du point de vue mesurable, Y <u>est</u> alors métrisable compact. Par ailleurs, si Y est coanalytique dans Z , i.e. si Y est un espace cosouslinien, alors, d'après le théorème 5, cette condition est aussi nécessaire pour que le problème 2 ait une solution, pour X, $\underline{\underline{N}}$ et P donnés, si X est un espace métrisable compact (plus généralement, souslinien) et $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}(X)$.

Le théorème 1 permet de donner une solution à peu près satisfaisante au problème de la régularisation d'un pseudo-noyau en un noyau borélien.

THEOREME 6.- Soit X un espace métrisable compact, muni d'une classe $\underline{\underline{N}}$ d'ensembles négligeables de la forme

$$\underline{\underline{N}}_M = \{A \in \underline{\underline{P}}(X) : \forall m \in M \; m^*(A) = 0\} \text{ où } M \text{ est analytique dans } \underline{\underline{M}}^1(X)$$

et soit Y un espace métrisable cosouslinien. Tout pseudo-noyau P, relativement à $\underline{\underline{N}}$, de $(X, \underline{\underline{B}}(X))$ dans $(Y, \underline{\underline{B}}(Y))$ peut être régularisé en un vrai noyau borélien Q. Plus généralement, cela est possible si X est métrisable séparable et M est une partie souslinienne de $\underline{\underline{M}}^1(X)$ (muni de la topologie étroite) - en particulier si X est souslinien, M analytique ou borélien.

DEMONSTRATION. Plongeons Y dans un espace métrisable compact Z et construisons le noyau borélien $\hat{Q}$ de X dans Z comme ci-dessus : $\hat{Q}$ définit une application borélienne $m \to m\hat{Q}$ de $\underline{\underline{M}}^1(X)$ dans $\underline{\underline{M}}^1(Z)$. Soit $\hat{M}$ l'image de M par cette application : $\hat{M}$ est analytique dans $\underline{\underline{M}}^1(Z)$, et, si C est une partie universellement mesurable de Z, on a $m(C) = 0$ pour tout $m \in \hat{M}$ ssi, pour tout $D \in \underline{\underline{B}}(Z)$ contenu dans C, on a $\hat{Q}(D) = 0$ m-p.p. pour tout $m \in M$. Ainsi, $Z - Y$, qui est analytique dans Z, est négligeable pour tout $m \in \hat{M}$, et il existe donc, d'après le théorème 1, un borélien B de Z contenu dans Y tel que $Z - B$ soit aussi négligeable pour tout $m \in \hat{M}$. On peut alors régulariser P en un vrai noyau Q en posant, comme ci-dessus, $Qf = \hat{Q}(f1_B)$ pour tout $f \in b\underline{\underline{B}}(Y)$.

Nous continuerons par la suite à désigner par $\underline{\underline{N}}_M$ la classe des ensembles négligeables pour toute mesure m appartenant à un ensemble M de mesures (positives) de masse ≤ 1.

Nous passons maintenant aux résultats négatifs. Voici d'abord un exemple simple qui montre qu'on ne peut avoir un théorème "très général" de régularisation hors le cas lusinien vu plus haut.

THEOREME 7.- *Soit* Y *une partie d'un espace métrisable compact* Z *et munissons* Z *de la classe* $\mathbf{N} = \{A \in \mathbf{P}(Z) : A \subset Y^c\}$, *i.e. de la classe* $\mathbf{N}_M$ *où* $M = \{m \in \mathbf{M}^1(Z) : m = \varepsilon_y\ , y \in Y\}$. *Considérons le pseudo-noyau* R *de* Z *dans* Y *qui, à tout* $f \in b\mathbf{B}(Y)$, *associe l'ensemble des fonctions* $g \in b\mathbf{B}(Z)$ *telles que* $f = g_{|Y}$. *Alors* R *a une régularisation en un noyau borélien* S *ssi* Y *est un borélien de* Z .

DEMONSTRATION. La condition suffisante est triviale. Supposons qu'il existe un noyau borélien S régularisant R, et définissons un noyau borélien $\breve{S}$ de Z dans Z en posant $\breve{S}g = S(g_{|Y})$ pour tout $g \in b\mathbf{B}(Z)$. Soit alors $B = \{z \in Z : \varepsilon_z \breve{S} = \varepsilon_z\}$. Si (A_n) est une suite de boréliens de Z engendrant $\mathbf{B}(Z)$, on a $z \in B$ ssi $\breve{S}1_{A_n}(z) = 1_{A_n}(z)$ pour tout n . Donc B est un borélien de Z , qui contient évidemment Y . Supposons $B \neq Y$ et soit $z \in B - Y$: on a alors $\varepsilon_z \breve{S} = \varepsilon_z$ et $\breve{S}(\{z\}) = 0$, ce qui est contradictoire. Donc $Y = B$ est un borélien de Z .

Par conséquent, on ne peut pas, dans le théorème 6 , remplacer le couple "Y coanalytique, M analytique" par "Y analytique, M analytique" ou par "Y coanalytique, M coanalytique" . Nous allons voir bientôt que le couple "Y analytique, M coanalytique" n'est pas meilleur. Nous étendons d'abord un peu notre exemple.

THEOREME 8.- *Soit* Y *une partie d'un espace métrisable compact* Z *et munissons* Z *d'une classe* $\mathbf{N}$ *contenant* Y^c. *Considérons le pseudo-noyau* R *de* Z *dans* Y *qui, à tout* $f \in b\mathbf{B}(Y)$, *associe l'ensemble des fonctions* $g \in b\mathbf{B}(Z)$ *telles que* $f = g$ $\mathbf{N}$-p.p. (*où* f *est considérée comme une fonction sur* Z *définie* $\mathbf{N}$-p.p.). *Alors* R *a une régularisation en un noyau borélien* S *ssi* Y *contient un borélien* B *de* Z *tel que* B^c *appartienne à* $\mathbf{N}$.

DEMONSTRATION. La condition suffisante est toujours la condition triviale habituelle. Supposons qu'il existe un noyau borélien S

régularisant R. Soit alors $Y' = \{y \in Y : \varepsilon_y S = \varepsilon_y\}$. Si (A_n) est une suite de boréliens de Y engendrant $\underline{\underline{B}}(Y)$, on a, pour tout $z \in Z$, $z \in Y'$ ssi $z \in Y$ et $S1_{A_n}(z) = 1_{A_n}(z)$ pour tout n. On en déduit que Y' appartient à $\underline{\underline{B}}(Y)$ et que $Z - Y'$ appartient à $\underline{\underline{N}}$. Définissons un noyau borélien S' de Z dans Y' en posant, pour tout $f \in b\underline{\underline{B}}(Y')$, $S'f = Sf$ où f est identifié à l'élément de $b\underline{\underline{B}}(Y)$ égal à f sur Y' et à 0 sur $Y - Y'$. On a alors, pour tout $g \in b\underline{\underline{B}}(Z)$, $S'(g_{|Y'}) = g$ sur Y', ce qui implique, d'après le théorème 7, que Y' est un borélien de Z.

Maintenant, on sait que, dans tout espace métrisable compact non dénombrable, on peut trouver un couple de coanalytiques disjoints non séparables par des boréliens. Soit alors Y une partie analytique d'un espace métrisable compact Z telle que Y contienne une partie coanalytique Y' non séparable de Y^c, et prenons $\underline{\underline{N}} = \underline{\underline{N}}_M$ où $M = \{\varepsilon_y, y \in Y'\}$: le pseudo-noyau R correspondant ne peut être régularisé. Et donc, le couple "Y analytique, M coanalytique" n'est pas bon.

Mais on a pire : même le couple "Y analytique, M compact" n'est pas "raisonnable". Je ne pense pas qu'il soit possible de trouver un "vrai" contre-exemple dans ce cas, mais nous allons voir, en nous appuyant sur un fameux résultat de Goedel, qu'on ne peut pas démontrer en général l'existence du noyau borélien S à l'aide des seuls axiomes habituels de la théorie des ensembles dans ce cas.

Goedel a montré que, si on ajoute aux axiomes habituels de la théorie des ensembles (sans l'axiome de choix) - supposés consistants - l'axiome de "constructibilité", on obtient une théorie consistante - dans laquelle l'axiome de choix et l'hypothèse généralisée du continu sont des théorèmes - pour laquelle il existe un sous-ensemble PCA (= projection de coanalytique) de [0,1] non mesurable pour la mesure de Lebesgue λ sur [0,1]. L'axiome de constructibilité est un peu compliqué à expliquer à quelqu'un non initié à la logique. Cependant, c'est un théorème simple à comprendre de la théorie qui permet ce type de construction, à savoir qu'il existe une relation de bon

ordre sur $[0,1]$ dont le graphe est PCA dans $[0,1] \times [0,1]$: si on regarde alors comment on construit classiquement un ensemble non mesurable pour λ et si on y remplace l'utilisation de l'axiome de choix par le choix bien meilleur que l'on a ici - le plus petit élément d'une partie (non vide) de $[0,1]$ pour le bon ordre considéré - on s'aperçoit que l'ensemble non mesurable exhibé est un PCA .
Ceci dit, prenons $Z = [0,1] \times [0,1]$ et soit Y une partie analytique de Z telle que la projection $\pi(Y^c)$ de Y^c sur le premier facteur soit un PCA non mesurable pour λ , de mesure intérieure nulle (il n'est pas difficile de trouver un tel Y une fois supposé qu'il existe un PCA non mesurable de $[0,1]$). Prenons enfin pour M l'ensemble des $m \in \underline{\underline{M}}^1(Z)$ tels que $\pi(m) = \lambda$: M est compact ; Y^c est universellement mesurable et $m(Y^c) = 0$ pour tout $m \in M$ puisque $\pi(Y^c)$ est λ-intérieurement négligeable. Cependant, Y^c ne peut être contenu dans un borélien de Z appartenant à $\underline{\underline{N}}_M$ puisque, sinon, $\pi(Y^c)$ serait λ-extérieurement négligeable. Il n'existe donc pas de noyau borélien S dans ce cas.

Terminons ce paragraphe par une remarque qui nous servira de transition.

Soient Z un espace métrisable compact, M une partie de $\underline{\underline{M}}^1(Z)$ et définissons une fonction I_M sur $\underline{P}(Z)$ par

$$I_M(A) = \sup m^*(A) \quad , \quad m \in M$$

On a alors $\underline{\underline{N}}_M = \{A \in \underline{P}(Z) \; : \; I_M(A) = 0\}$.

- si M est compact, on vérifie aisément que I_M est une capacité (pour la descente, utiliser le lemme de Dini-Cartan). En général, I_M n'est pas fortement sous-additive, mais, inversement, si I est une capacité fortement sous-additive sur Z , il existe M compact tel que $I(A) = I_M(A)$ pour tout $A \in \underline{P}(Z)$ analytique. (Pour plus de détails, y compris bibliographiques, voir mon Lecture Notes "Ensemble analytiques..." n°295 - noté [D] par la suite)
- si M est analytique, I_M n'est pas une capacité en général, mais vérifie cependant les propriétés d'approximation d'une capacité :

pour toute partie analytique A de Z , on a

$$I_M(A) = \sup I_M(K)\ ,\ K\epsilon \underline{\underline{K}}(Z)\ ,\ K\subset A$$
$$= \inf I_M(B)\ ,\ B\epsilon \underline{\underline{B}}(Z)\ ,\ B\supset A$$

Cela se démontre comme le théorème 4 à partir du théorème 3 . Nous verrons en fait dans le paragraphe suivant que I_M est un calibre et que tout calibre vérifie ces propriétés.

III. CALIBRES

NOTATIONS ET CONVENTIONS. Désormais, E , F et G (avec ou sans indices) désignent des espaces métrisables compacts, et x , y et z (avec ou sans indices) des points génériques de ces espaces respectifs.
Les notations $\underline{P}(E)$, $\underline{\underline{M}}^1(E)$ et $\underline{\underline{K}}(E)$ gardent leur signification antérieure. Nous notons $\underline{F}(E)$ l'ensemble des fonctions de E dans $[0,+\infty]$ et considérons $\underline{P}(E)$ comme un sous-ensemble de $\underline{F}(E)$ en identifiant $A\epsilon\underline{P}(E)$ avec son indicatrice $1_A \epsilon \underline{F}(E)$.

Nous dirons qu'une application U de $\underline{F}(F)$ dans $\underline{F}(E)$ est un <u>noyau de</u> E <u>dans</u> F si

1) U est croissante : $f \leq g \Rightarrow Uf \leq Ug$

2) U est sous-markovienne : $\|Uf\| \leq \|f\|$ (norme uniforme)

Un noyau sous-markovien - au sens habituel - , borélien ou non, sera appelé un <u>noyau-mesure</u>, et implicitement étendu comme application de $\underline{F}(F)$ dans $\underline{F}(E)$ à l'aide de l'intégrale supérieure. Par ailleurs, nous utiliserons pour les noyaux généraux les notations habituelles pour les noyaux-mesures : par exemple, U(x,f) désigne la valeur prise par la fonction Uf au point x .

Si une application U de $\underline{P}(F)$ dans $\underline{F}(E)$ est croissante et sous-markovienne, nous dirons aussi que c'est un noyau de E dans F , que nous étendrons d'ailleurs en un "vrai" noyau par la formule

$$U(x,f) = \int_0^\infty U(x,\{y : f(y) > t\})\, dt = \int_0^\infty U(x,\{y : f(y) \geq t\})\, dt$$

Dans les cas que nous considérerons, ce prolongement conservera toujours les propriétés de régularité voulues (par exemple, si U est un noyau-mesure, on obtient bien ainsi le passage de l'intégration des ensembles à celle des fonctions positives).

Enfin, si I est une fonction croissante de $\underline{P}(E)$ dans [0,1] telle que $I(\emptyset)=0$, c'est aussi un noyau de E'(arbitraire) dans E en identifiant tout réel à une fonction constante sur E' , noyau que l'on étend à $\underline{F}(E)$ comme ci-dessus en posant $I(f) = \int_0^\infty I(\{x : f(x) > t\})\, dt$. Cela n'est pas fait "gratuitement" : on a besoin que les noyaux soient définis sur les fonctions pour pouvoir les composer aisément. Ainsi, si I est une capacité sur E et U un noyau-mesure de E dans F , on peut définir une fonction J sur $\underline{P}(F)$ en posant $J(A) = I[V(A)]$ (noter que l'on a alors $J(A)=0$ ssi $V(A)=0$ I-p.p.) ; de plus, J est une capacité si U est fellerien, et, plus généralement, sera un calibre si U est borélien.

Afin de rendre l'exposé plus clair, nous commencerons par reprendre l'étude des capacités et noyaux-capacités avant de passer à celle des calibres et noyaux-calibres. Mais cela nous obligera souvent à réécrire les énoncés des théorèmes sans grande modification.

Capacités et noyaux-capacités

Etant donné ce qui précède, nous définirons les capacités sur les fonctions. Mais souvent, dans les démonstrations, nous nous contenterons de considérer les ensembles - c'est un peu plus simple.

DEFINITION 3.- Une fonction I sur $\underline{F}(E)$ est une capacité sur E si elle vérifie les conditions suivantes

a) $\forall f \; 0 \leq I(f) \leq \|f\|$ (en particulier, $I(\emptyset)=0$)

b) I est croissante : $f \leq g \Rightarrow I(f) \leq I(g)$

c) I monte : $f_n \uparrow f \Rightarrow I(f_n) \uparrow I(f)$

d) I descend sur les fonctions s.c.s. : $f_n \downarrow f$ et f_n s.c.s. (finie) pour tout n $\Rightarrow I(f_n) \downarrow I(f)$.

REMARQUES. 1) Les restrictions a) par rapport à la définition usuelle sont anodines et commodes. Par contre, nous ne demandons pas que la réunion de deux ensembles de capacité nulle soit de capacité nulle : si c'est souvent vrai, le demander aurait compliqué les choses.

2) Si I n'est définie que sur $\underline{P}(E)$, le prolongement à $\underline{F}(E)$ est bien une capacité, comme on le vérifie aisément. Nous ne répèterons plus ce genre de remarque. Signalons cependant une petite difficulté. Si M est un compact de $\underline{\underline{M}}^1(E)$, on a deux méthodes pour lui associer une capacité définie sur $\underline{F}(E)$: soit poser $I_M(A) = \sup_{m\in M} m^*(A)$ pour $A\in\underline{P}(E)$, puis prolonger ; soit poser tout de suite $I_M(f) = \sup_{m\in M} m^*(f)$. Les deux capacités ainsi définies coincident évidemment sur $\underline{P}(E)$, mais pas sur $\underline{F}(E)$ en général - même pour les fonctions continues. Elles coincident sur les fonctions continues ssi I_M est fortement sous-additive sur $\underline{\underline{K}}(E)$ et si M vérifie une propriété de saturation que j'ai oubliée.

DEFINITION 4.- _Un noyau_ U _de_ E _dans_ F _est un_ noyau-capacité _s'il vérifie les conditions suivantes_

a) _pour tout_ $x\in E$, $U(x,.)$ _est une capacité sur_ F

b) _pour tout_ $f\in\underline{F}(F)$ _s.c.s._, $U(.,f)$ _est s.c.s. sur_ E

Cette notion a été introduite par Mokobodzki sous le nom de "capacité fonctionnelle". Nous l'avons appelée "noyau capacitaire régulier" dans [D]. Les exemples abondent. En voici quelques uns.

EXEMPLES. 1) Soit I une capacité sur $E\times F$ et posons, pour tout $x\in E$ et tout $A\in\underline{P}(F)$, $U(x,A) = I(\{x\}\times A)$. On définit ainsi un noyau-capacité, et tout noyau-capacité peut s'obtenir ainsi (voir plus loin).

2) L'application qui, à $A\in\underline{P}(E\times F)$, associe sa projection $\pi(A)$ sur E est un noyau-capacité de E dans $E\times F$ (ce qui explique le lien entre "analytique" et "capacité"). Le prolongement aux fonctions donne ici : $\pi(x,f) = \sup_{y\in F} f(x,y)$.

3) Tout noyau-mesure fellerien définit un noyau-capacité. En particulier, la fonction $(m,f)\to m^*(f)$ sur $\underline{\underline{M}}^1(E)\times\underline{F}(E)$ définit un noyau-capacité de $\underline{\underline{M}}^1(E)$ dans E, que nous avons utilisé au §1.

4) Soit E une partie convexe compacte de $\mathbb{R}^n$. L'application U qui à $A \in \underline{P}(E)$ associe son enveloppe convexe est un noyau-capacité de E dans E tel que $A \subset U(A) = U[U(A)]$. Un tel noyau sera dit <u>enveloppant</u>, et un ensemble A tel que $A = U(A)$ sera dit <u>saturé</u> (pour U).

Nous allons énoncer maintenant les théorèmes fondamentaux sur les noyaux-capacités, sans toujours donner des démonstrations complètes.

THEOREME 9. (Mesurabilité) <u>Si</u> U <u>est un noyau-capacité de</u> E <u>dans</u> F, <u>la fonction</u> $(x,K) \to U(x,K)$ <u>est s.c.s. sur</u> $E \times \underline{\underline{K}}(F)$.

DEMONSTRATION. Cela résulte aisément du fait que cette fonction est séparément s.c.s. en x et en K, et séparément croissante en K.

REMARQUE. On a un théorème analogue avec $\underline{\underline{K}}(F)$ remplacé par $\underline{\underline{S}}(F)$, ensemble des fonctions s.c.s. sur F muni d'une "bonne" topologie. Cette extension serait nécessaire pour démontrer en toute généralité certains des théorèmes qui vont suivre.

THEOREME 10. (Composition) <u>Si</u> U <u>est un noyau-capacité de</u> E <u>dans</u> F <u>et</u> V <u>un noyau-capacité de</u> F <u>dans</u> G, <u>alors</u> $U \circ V$, <u>défini de manière évidente, est un noyau-capacité de</u> E <u>dans</u> G.

DEMONSTRATION. Immédiate.

THEOREME 11. (Extension) <u>Soit</u> U <u>un noyau-capacité de</u> E <u>dans</u> F <u>et, pour tout</u> $(x,z) \in E \times G$ <u>et tout</u> $f \in \underline{F}(F \times G)$, <u>posons</u>

$$\overline{U}[(x,z),f] = U(x,f_z)$$

<u>où</u> f_z <u>désigne la fonction</u> $y \to f(y,z)$. <u>On définit ainsi un noyau-capacité</u> $\overline{U}$ <u>de</u> $E \times G$ <u>dans</u> $F \times G$.

DEMONSTRATION. Le seul point non évident est que $\overline{U}f$ est s.c.s. si f est s.c.s. . Nous nous contenterons de l'établir quand f est l'indicatrice d'un compact K : f_z est alors l'indicatrice de la coupe K(z). On a l'équivalence

$$\overline{U}(x,z,K) \geq t \iff \exists L \in \underline{\underline{K}}(F) \;\; U(x,L) \geq t \text{ et } L \times \{z\} \subset K$$

L'ensemble $\{(L,z) : L \times \{z\} \subset K\}$ étant compact dans $\underline{\underline{K}}(F) \times G$, il résulte alors du théorème 9 que U(K) est bien s.c.s. .

COROLLAIRE. *Soit* U *un noyau-capacité de* E *dans* F *et posons, pour tout* $f \in \underline{F}(E \times F)$ *et tout* $x \in E$, $\bar{U}(x,f) = U(x,f_x)$. *On définit ainsi un noyau-capacité* $\bar{U}$ *de* E *dans* $E \times F$.

DEMONSTRATION. Faire $G = E$ dans le théorème et composer $\bar{U}$ avec le noyau de E dans $E \times E$ défini par $V(x,f) = f(x,x)$.

Malgré son air barbare, le théorème d'extension est d'un usage courant. Par exemple, si U est un noyau-capacité de E dans F, on a évidemment, pour tout $A \in \underline{P}(F)$,

$$U(x,A) = I[\{x\} \times A] \quad \text{où} \quad I(H) = \sup_{x \in E} \bar{U}(H) \text{ pour tout } H \in \underline{P}(E \times F)$$

et le corollaire nous permet d'affirmer que I est une capacité sur $E \times F$, puisque c'est la composée du noyau-capacité $\bar{U}$ de E dans $E \times F$ avec la capacité J sur E définie par $J(f) = \sup_{x \in E} f(x)$.

THEOREME 12. (Capacitabilité) *Soit* U *un noyau-capacité de* E *dans* F *et soit* f *une fonction positive analytique sur* F (*i.e. telle que* $\{y : f(y) > t\}$ *soit analytique pour tout* t). *On a alors*

$$Uf = \sup Ug\,,\ g \text{ s.c.s.}\,,\ g \leq f$$

DEMONSTRATION. Comme, pour x fixé, $U(x,.)$ est une capacité, c'est tout simplement le théorème de capacitabilité de Choquet - écrit pour les fonctions.

THEOREME 13. (Image) *Soient* U *un noyau-capacité de* E *dans* F *et* f *une fonction positive analytique sur* F . *Alors* Uf *est une fonction analytique sur* E .

DEMONSTRATION. Nous nous bornerons au cas où f est l'indicatrice d'un ensemble analytique A . Tout ensemble analytique étant la projection d'un $\underline{\underline{G}}_\delta$ pris dans un espace produit, et la composition de U avec une projection étant encore un noyau-capacité, on se ramène aisément au cas où A est lui-même un $\underline{\underline{G}}_\delta$. On a alors

$$U(x,A) > t \iff \exists K \in \underline{\underline{K}}(F) \ K \subset A \text{ et } U(x,K) > t$$

L'ensemble des compacts contenus dans un $\underline{\underline{G}}_\delta$ étant un $\underline{\underline{G}}_\delta$, et $U(.,.)$ étant s.c.s., on en déduit que $U(A)$ est une fonction analytique.

REMARQUES. 1) Soit I une capacité sur F et, pour tout $A \in \underline{P}(E \times F)$, posons $U(x,A) = I[A(x)]$. Le théorème d'extension nous dit que U est un noyau-capacité, et donc la fonction $x \to I[A(x)]$ est analytique si A est analytique.

2) Le théorème d'image est dû à Mokobodzki, qui a en fait établi un résultat beaucoup plus précis contenant aussi le théorème de capacitabilité : tout ensemble analytique A est noyau d'un schéma de Souslin particulier, soit $A = \bigcup_\sigma \bigcap_n K_{\sigma|n}$ avec des notations classiques, tel que l'on ait $U1_A = \sup_\sigma \inf_n U1_{K_{\sigma|n}}$ pour tout noyau-capacité (cf [D] p 58). Le résultat de Mokobodzki permet par exemple de dire que tout ensemble analytique saturé pour un noyau-capacité enveloppant est noyau d'un schéma de Souslin sur les compacts saturés.

THEOREME 14.(Capacitabilité extérieure) *Soit U un noyau-capacité de E dans F et soit $f \in \underline{F}(F)$ analytique. On a alors*

$$Uf = \inf Ug\ ,\ g \text{ borélienne}\ ,\ g \geq f$$

DEMONSTRATION. Si on pose, pour tout $f \in \underline{F}(f)$,

$$Vf = \inf Ug\ ,\ g \text{ borélienne}\ ,\ g \geq f$$

on définit un noyau-capacité V de E dans F qui coincide avec U sur les fonctions s.c.s., et donc sur les fonctions analytiques d'après le théorème de capacitabilité.

REMARQUE. On a une approximation extérieure par des fonctions s.c.i. si U est fortement sous-additif, mais pas dans le cas général - même pas pour une capacité du type I_M, M compact dans $\underline{\underline{M}}^1(E)$ (cf [D] p 106) alors qu'une telle capacité est dénombrablement sous-additive.

THEOREME 15.(Séparation) *Soient U un noyau-capacité de E dans F, A une partie analytique de E et f une fonction positive analytique sur F. Si on a $U(x,f) = 0$ pour tout $x \in A$, alors il existe une fonction borélienne $g \geq f$ sur F et un borélien $B \supset A$ de E tels que l'on ait encore $U(x,g) = 0$ pour tout $x \in B$.*

DEMONSTRATION. C'est le théorème 4 du §1 . Nous en rappelons la démonstration pour proposer une variante - en nous contentant encore du cas où f est une indicatrice. Si on pose, pour tout $H\in\underline{P}(E\times F)$, $I(H) = \sup_{x\in E} U(x,H(x))$, on définit ainsi une capacité I sur $E\times F$ telle que $U(x,A') = I(\{x\}\times A')$ pour tout $A'\in\underline{P}(F)$, et l'on a $U(x,A') = 0$ pour tout $x\in A$ ssi $I(A\times A') = 0$. Par conséquent, il nous suffit de démontrer que la capacité d'un rectangle analytique est approchée par l'extérieur par celle d'un rectangle borélien. Et cela résulte du théorème 3 sur les bicapacités. Mais, comme l'application qui à $H\in\underline{P}(E\times F)$ associe $\pi_E(H)\times\pi_F(H)$ est un noyau-capacité enveloppant, cela résulte aussi de l'un des points du théorème suivant.

Rappelons qu'un noyau U de E dans E (défini sur $\underline{P}(E)$ et à valeurs dans $\underline{P}(E)$ pour simplifier) est dit <u>enveloppant</u> si, pour tout $A\in\underline{P}(E)$, on a $A\subset U(A) = U[U(A)]$. Nous dirons que $U(A)$ est le <u>saturé</u> de A , et A est <u>saturé</u> si $A = U(A)$.

<u>THEOREME</u> 16.- <u>Soit</u> U <u>un noyau-capacité enveloppant sur</u> E . <u>Alors</u>

1) <u>La classe des parties saturées est stable pour les lim.inf de suites</u>.

2) <u>Pour toute capacité</u> I <u>sur</u> E <u>et tout analytique saturé</u> A <u>de</u> E , <u>on a</u>

$$I(A) = \sup I(K)\ ,\ K \text{ compact saturé}\ ,\ K\subset A$$
$$= \inf I(B)\ ,\ B \text{ borélien saturé}\ ,\ B\supset A$$

(<u>l'inf est atteint d'après</u> 1))

3) <u>Si</u> A <u>et</u> A' <u>sont deux analytiques disjoints de</u> E , <u>et si</u> A <u>est saturé, il existe un borélien saturé</u> B <u>contenant</u> A <u>et disjoint de</u> A' .

4) <u>La classe des boréliens saturés est égale au stabilisé pour les lim.inf de suites de la classe des compacts saturés</u>.

DEMONSTRATION. Soit (A_n) une suite de parties saturées. Comme tout noyau montant sur $\underline{P}(E)$ vérifie le "lemme de Fatou" , on a

$$\liminf A_n \leq V(\liminf A_n) \leq \liminf V(A_n) = \liminf A_n$$

D'où le point 1). Nous désignerons pour l'instant par $\underline{\underline{C}}(U)$ le stabilisé de la classe des compacts saturés pour les lim.inf de suites : c'est une classe de boréliens saturés.

Soit maintenant I une capacité sur E. D'après le théorème de capacitabilité, il est clair que l'on a la première formule de 2) pour tout analytique saturé, le saturé d'un compact étant compact. Posons alors, pour tout $A \in \underline{P}(E)$,

$$J(A) = \inf I(B) , B \in \underline{\underline{C}}(U) , B \supset A$$

On vérifie aisément que l'on définit ainsi une capacité J sur E. Les capacités I et J coincident sur les compacts saturés, donc sur les analytiques saturés. D'où la deuxième formule de 2) - avec $B \in \underline{\underline{C}}(U)$ - , ce qui est important tant que 4) n'est pas établi.

Passons au point 3). On se donne A et A' analytiques disjoints, A étant saturé. Nous allons montrer qu'il existe $B \in \underline{\underline{C}}(U)$ contenant A et disjoint de A' ; cela démontrera aussi 4) (cas où $A' = A^c$). On peut évidemment supposer que A et A' ne sont pas vides. Définissons un noyau-capacité enveloppant V sur $E \times E$ en posant, pour $H \in \underline{P}(E \times E)$,

$$V(H) = \pi_1(H) \times U[\pi_2(H)]$$

où π_1 et π_2 sont les projections. Un compact R de $E \times E$ est saturé pour V ssi c'est un rectangle dont le côté $\pi_2(R)$ est saturé pour U. Par conséquent, la classe $\underline{\underline{C}}(V)$ associée à V est constituée par les rectangles dont le premier côté est borélien et le deuxième côté appartient à $\underline{\underline{C}}(U)$. Définissons d'autre part une capacité I sur $E \times E$ par la formule $I(f) = \sup_{x \in E} f(x,x)$, $f \in \underline{F}(E \times E)$. Appliquons enfin la deuxième formule de 2) à la capacité I, le noyau V et la partie analytique $A' \times A$ saturée pour V : comme $A' \times A$ est disjoint de la diagonale de $E \times E$, on obtient le théorème de séparation voulu.

REMARQUES. 1) Si on applique ce théorème au cas où E est un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ et où U est l'enveloppe convexe, on retrouve en 3) et 4) un résultat de Preiss (Mathematika, 20, 1973) - dont nous nous sommes d'ailleurs inspiré.

2) Si on applique au noyau U le résultat de Mokobodzki sur les schémas de Souslin cité plus haut, on peut ramener 3) et 4) au théorème classique de séparation pour un pavage compact abstrait - constitué ici par les compacts saturés.

Calibres et noyaux-calibres

Le mot "calibre" a été introduit dans [D] pour qualifier une notion plus faible que celle présentée ici.

DEFINITION 5.- 1) <u>Une fonction</u> J <u>sur</u> $\underline{\underline{F}}(F)$, <u>croissante et sous-markovienne, est un</u> calibre <u>s'il existe un espace auxiliaire</u> G , <u>un noyau-capacité</u> U <u>de</u> G <u>dans</u> F <u>et une partie analytique</u> H <u>de</u> G <u>tels que</u>

$$\forall f \in \underline{\underline{F}}(F) \text{ analytique } \quad J(f) = \sup_{z \in H} U(z,f)$$

2) <u>Plus généralement, un noyau</u> V <u>de</u> E <u>dans</u> F <u>est un</u> noyau-calibre <u>s'il existe un espace auxiliaire</u> G , <u>un noyau-capacité</u> U <u>de</u> $E \times G$ <u>dans</u> F <u>et une partie analytique</u> H <u>de</u> G <u>tels que</u>

$$\forall x \in E \quad \forall f \in \underline{\underline{F}}(F) \text{ analytique } \quad V(x,f) = \sup_{z \in H} U(x,z,f)$$

Nous verrons plus loin une autre propriété caractéristique des noyaux-calibres.

EXEMPLES. 1) Si M est une partie analytique de $\underline{\underline{M}}^1(E)$, la fonction J_M définie par $J_M(f) = \sup_{m \in M} m^*(f)$ est un calibre.

2) Supposons E non dénombrable, et posons $J(A) = 0$ si $A \in \underline{\underline{P}}(E)$ est dénombrable et $J(A) = 1$ sinon. Comme toute partie analytique non dénombrable contient un parfait non vide (cf [D] p 70) et que tout parfait non vide est le support d'une mesure diffuse, on a, pour tout A analytique, $J(A) = \sup_{m \in D} m(A)$ où D est le sous-ensemble de $\underline{\underline{M}}^1(E)$ constitué par les mesures diffuses. Comme D est un $\underline{\underline{G}}_\delta$ (on a $m \in D \Leftrightarrow \forall x \; m(\{x\}) = 0$) , on en déduit que J est un calibre. Faisons deux remarques à l'occasion de cet exemple. D'abord, on définit "plus" de classes négligeables avec les calibres qu'avec les capacités : l'ensemble des compacts négligeables pour une capacité sur E est un $\underline{\underline{G}}_\delta$ de $\underline{\underline{K}}(E)$ tandis que l'ensemble des compacts négligeables pour un calibre sur E peut être coanalytique, non borélien, dans $\underline{\underline{K}}(E)$ - c'est le cas de l'ensemble des compacts dénombrables de [0,1] . Ensuite, dans la définition d'un calibre, la condition ne porte que sur les éléments analytiques pour gagner un peu de souplesse : si

l'hypothèse du continu est vraie, il est faux que l'on ait dans notre exemple $J(A) = \sup_{m\in D} m(A)$ pour toute partie universellement mesurable A

3) Nous allons montrer qu'un noyau-mesure borélien de E dans F est un noyau-calibre. La démonstration est rédigée de sorte à obtenir un peu plus. Identifions V à l'application $x \to \varepsilon_x V$ de E dans $\underline{\underline{M}}^1(F)$ et considérons le "sous-graphe" $A = \{(x,m) : m \leq \varepsilon_x V\}$. On a, si (f_n) est une suite de fonctions continues positives sur F séparant les points de F, $(x,m)\in A \Leftrightarrow \forall n\ m(f_n) \leq V(x,f_n)$. On en déduit que A est borélien dans $E\times\underline{\underline{M}}^1(F)$ et l'on a, pour toute fonction f positive universellement mesurable sur F,

$$V(x,f) = \sup_{(m,x',m')\in\underline{\underline{M}}^1(F)\times A} m(f).1_{\{x',m'\}}(x,m)$$

Comme la formule $U(x,m,x',m',f) = m(f).1_{\{x',m'\}}(x,m)$ définit un noyau-capacité U de $E\times\underline{\underline{M}}^1(F)\times E\times\underline{\underline{M}}^1(F)$ dans F et que $\underline{\underline{M}}^1(F)\times A$ est analytique dans $\underline{\underline{M}}^1(F)\times E\times\underline{\underline{M}}^1(F)$, on en déduit que V est un noyau-calibre. Le résultat est encore vrai si on suppose seulement que V est un noyau-mesure non nécessairement borélien mais tel que Vf soit analytique pour tout $f\in\underline{F}(F)$ continue : le sous-graphe A est alors analytique. Cette extension n'est pas gratuite : elle permet d'étendre aisément certains résultats au cas où on ne travaille pas sur des espaces métrisables compacts. Ainsi, supposons donné un noyau-mesure borélien W d'un espace souslinien métrisable S dans un espace métrisable séparable T. Plongeons S et T respectivement dans des espaces compacts métrisables E et F et définissons un noyau-mesure V de E dans F en posant $Vf = W(f_{|T})$ en identifiant une fonction sur S à une fonction sur E nulle hors de S : le noyau-mesure V n'est pas borélien en général, mais transforme bien toute fonction continue et positive sur F en une fonction analytique sur E.

Nous passons maintenant aux propriétés des noyaux-calibres, en suivant à peu près le même ordre que pour les noyaux-capacités.

THEOREME 17.(Mesurabilité) Si V est un noyau-calibre de E dans F, la fonction $(x,K) \to V(x,K)$ sur $E\times K(F)$ est analytique.

DEMONSTRATION. Immédiate à partir du théorème 9 et de la définition

Le théorème de composition n'est pas évident. Nous allons donner d'abord une autre définition des noyaux-calibres, que nous utiliserons dans sa démonstration (et ailleurs).

THEOREME 18. <u>Un noyau</u> V <u>de</u> E <u>dans</u> F <u>est un noyau-calibre ssi il existe un espace auxiliaire</u> G, <u>un noyau-capacité</u> U <u>de</u> E <u>dans</u> $F \times G$ <u>et une partie analytique</u> H <u>de</u> G <u>tels que</u>

$$\forall x \varepsilon E \quad \forall f \varepsilon \underline{F}(F) \text{ analytique} \quad V(x,f) = U(x, f \times 1_H)$$

<u>où</u> $(f \times 1_H)(y,z) = f(y).1_H(z)$.

DEMONSTRATION. a) Condition nécessaire : on suppose qu'il existe un espace auxiliaire G', un noyau-capacité U' de $E \times G'$ dans F et une partie analytique H' de G' tels que, pour $f \varepsilon \underline{F}(F)$ analytique,

$$V(x,f) = \sup_{z' \varepsilon H'} U'(x,z',f)$$

Prenons $G = G'$, $H = H'$ et posons, pour tout $g \varepsilon \underline{F}(F \times G)$,

$$U(x,g) = \sup_{z \varepsilon G} U'(x,z,g_z)$$

Le noyau U ainsi défini est un noyau-capacité de E dans $F \times G$: il est obtenu en étendant U' en un noyau de $E \times G \times G$ dans $F \times G$ et en composant ce dernier avec le noyau $W(x,z,h) = h(x,z,z)$ de $E \times G$ dans $E \times G \times G$, puis avec le noyau de E dans $E \times G$ associé à la projection de $E \times G$ sur E. Et l'on a bien alors, pour $f \varepsilon \underline{F}(F)$ analytique,

$$V(x,f) = U(x, f \times 1_H)$$

b) Condition suffisante : nous nous limiterons au cas où f est une indicatrice d'ensemble. La condition de l'énoncé s'écrit alors

$$\forall x \varepsilon E \quad \forall A \varepsilon \underline{P}(F) \text{ analytique} \quad V(x,A) = U(x, A \times H)$$

et il faut trouver un espace auxiliaire G' , un noyau-capacité U' de $E \times G'$ dans F et une partie analytique H' de G' tels que

$$\forall x \varepsilon E \quad \forall A \varepsilon \underline{P}(F) \text{ analytique} \quad V(x,A) = \sup_{z' \varepsilon H'} U'(x,z',A)$$

Nous prendrons $G' = \underline{\underline{K}}(G)$ et poserons, pour $x \varepsilon E$, $z' \varepsilon \underline{\underline{K}}(G)$, $A \varepsilon \underline{P}(F)$,

$$U'(x,z',A) = U(x, A \times z')$$

(ne pas oublier que z' est un compact !) . Il est clair que l'on définit bien ainsi un noyau-capacité U' de $E \times G'$ dans F . Il reste à définir H'. L'idée est simple : d'après le théorème de capacitabilité, si $H^\circ = \{z'\in \underline{\underline{K}}(G) : z'\subset H\}$, on a $V(x,A) = \sup\limits_{z'\in H^\circ} U'(x,z',A)$ pour tout $A\in \underline{P}(F)$ analytique. Malheureusement, l'ensemble des compacts contenus dans un analytique est rarement analytique (l'ensemble des compacts contenus dans un $\underline{\underline{G}}_\delta$ est un $\underline{\underline{G}}_\delta$, et Christensen et St-Raymond ont montré que l'ensemble des compacts contenus dans un borélien est analytique seulement si ce borélien est un $\underline{\underline{G}}_\delta$). On résoud cette difficulté en considérant H comme projection $\pi(L)$ d'un $\underline{\underline{G}}_\delta$ L d'un espace produit $G\times F'$ et en posant

$$H' = \{z'\in \underline{\underline{K}}(G) : \exists K\in \underline{\underline{K}}(G\times F')\ K\subset L \text{ et } z' = \pi(K)\}$$

Cet ensemble est bien analytique dans $\underline{\underline{K}}(G)$ et comme, pour tout compact C de F, le noyau W_C de E dans $G\times F'$ défini par

$$\forall D\in \underline{P}(G\times F')\quad W_C(x,D) = U(x, C\times \pi(D))$$

est un noyau-capacité, on conclut, en appliquant le théorème de capacitabilité à U - ce qui, pour x fixé, permet d'approcher $U(x,A\times H)$ par $U(x,C\times H)$ avec $C\in\underline{\underline{K}}(F)$ contenu dans A - et aux W_C, que G', U' et H' ont les propriétés requises.

THEOREME 19. (Composition) <u>Si</u> V_1 <u>est un noyau-calibre de</u> E_1 <u>dans</u> E_2 <u>et</u> V_2 <u>est un noyau-calibre de</u> E_2 <u>dans</u> E_3, <u>alors</u> $V = V_1\circ V_2$ <u>est un noyau-calibre de</u> E_1 <u>dans</u> E_3.

DEMONSTRATION. Remarquons d'abord que l'image d'une fonction positive analytique par un noyau-calibre est analytique : cela résulte immédiatement du théorème d'image pour les noyaux-capacités et de l'une ou l'autre des définitions d'un noyau-calibre. Cela nous assure que l'on ne sortira pas du "cadre analytique" en composant. Ceci dit, il existe des espaces auxiliaires G_1 et G_3, un noyau-capacité U_1 de $E_1\times G_1$ dans E_2, un noyau-capacité U_2 de E_2 dans $E_3\times G_3$ et des parties analytiques H_1 et H_3 de G_1 et G_3 respectivement tels que l'on ait

$$\forall f\in \underline{F}(E_2) \text{ analytique } V_1(x_1,f) = \sup_{z_1\in H_1} U_1(x_1,z_1,f)$$

$$\forall f\in \underline{F}(E_3) \text{ analytique } V_2(x_2,f) = U_2(x_2, f\times 1_{H_3})$$

Comme $U_1 \circ U_2$ est un noyau-capacité de $E_1 \times G_1$ dans $E_3 \times G_3$, on en déduit d'abord que $U_1 \circ V_2$ est un noyau-calibre de $E_1 \times G_1$ dans E_3. Il existe donc un espace auxiliaire G, un noyau-capacité W de $E_1 \times G_1 \times G$ dans E_3 et une partie analytique H de G tels que

$$\forall f \in \underline{F}(E_3) \text{ analytique } U_1 \circ V_2(x_1, z_1, f) = \sup_{z \in H} W(x, z_1, z, f)$$

et on a alors

$$\forall f \in \underline{F}(E_3) \text{ analytique } V(x_1, f) = \sup_{(z_1, z) \in H_1 \times H} W(x, z_1, z, f)$$

On en conclut que V est bien un noyau-calibre.

APPLICATIONS. 1) Soient X, Z des espaces métrisables compacts, $\underline{\underline{N}}$ une classe d'ensembles négligeables sur X, et V un noyau-mesure borélien de X dans Z. Posons $\underline{\underline{N}}^\circ = \{A \in \underline{P}(Z) : V(A) = 0\ \underline{\underline{N}}\text{-p.p.}\}$. Si $\underline{\underline{N}}$ est la classe des ensembles négligeables pour un calibre I sur X, alors $\underline{\underline{N}}^\circ$ est la classe des ensembles négligeables pour le calibre $J = I \circ V$ sur Z.

2) Voici un nouvel exemple de noyau-calibre. Soit H une partie analytique de $E \times F$ et désignons par π la projection de $E \times F$ sur E. A tout $A \in \underline{P}(F)$ associons $V(A) \in \underline{P}(E)$ défini comme suit

$$V(A) = \pi[H \cap (E \times A)]$$

Le noyau V ainsi défini est obtenu par composition d'un noyau-capacité $(A \to E \times A)$, d'un noyau-calibre $(B \to H \cap B)$ et d'un noyau-capacité $(C \to \pi(C))$: c'est donc un noyau-calibre. Si H est le graphe d'une relation d'équivalence, V est un noyau-calibre enveloppant, et $V(A)$ est le saturé de A pour cette relation d'équivalence.

Nous nous contentons maintenant de signaler le théorème d'extension (énoncé analogue à celui du théorème 11), qui est immédiat avec l'une ou l'autre des définitions d'un noyau-calibre.

THEOREME 20. (Extension) ...

COROLLAIRE. ...

Nous rassemblons en un seul énoncé les théorèmes de capacitabilité, d'image et de capacitabilité extérieure.

THEOREME 21. (Approximation) Soient V un noyau-calibre de E dans F et f une fonction positive analytique sur F. Alors

1) Vf est analytique sur E

2) $Vf = \sup Vg$, g s.c.s., $g \leq f$

3) $Vf = \inf Vh$, h borélienne, $h \geq f$

DEMONSTRATION. Le point 1) (que l'on a déjà vu) et le point 2) sont immédiats. Nous nous contenterons de démontrer 3) lorsque f est une indicatrice. Il existe un espace auxiliaire G, un noyau-capacité U de E dans $F \times G$ et une partie analytique H de G tels que

$$\forall x \in E \quad \forall A \in \underline{P}(F) \text{ analytique } V(x,A) = U(x, A \times H)$$

L'ensemble $A \times H$ est un rectangle analytique, et $U(x,.)$ est une capacité : d'après le théorème 3 ou le théorème 16, il existe un borélien B de F (dépendant de x) contenant A tel que $V(x,A) = V(x,B)$.

REMARQUES. 1) L'inf étant atteint dans 3) pour un calibre, on retrouve une partie du théorème 15 de séparation en considérant (avec les notations de ce théorème) le calibre $V(f) = \sup\limits_{x \in A} U(x,f)$.

2) Le résultat de Mokobodzki signalé dans la remarque suivant le théorème 13 est encore valable si V descend sur les fonctions s.c.s. - et est alors plus fort que 1) et 2). Il est en particulier applicable à un noyau-mesure borélien, ou au noyau-calibre de saturation d'une relation d'équivalence à graphe analytique telle que le saturé de tout point soit compact. Dans ce dernier cas, il entraine que tout analytique saturé est noyau d'un schéma de Souslin sur les saturés des compacts (ce que l'on peut démontrer plus élémentairement).

APPLICATION. Nous sommes maintenant en mesure d'étendre les théorèmes 1 et 6 au cas où $\underline{\underline{N}}$ est la classe des ensembles négligeables pour un calibre I. Gardons les notations du théorème 6 et de sa démonstration. D'après le théorème de composition $I \circ \hat{Q} = J$ est un calibre sur Z, et l'ensemble analytique $Z - Y$ est J-négligeable. Et le théorème d'approximation entraine l'existence d'un borélien B de Z contenu dans Y tel que $J(Z - B) = 0$. On peut alors poser $Qf = \hat{Q}(f 1_B)$.

THEOREME 22. (Séparation) <u>Soient</u> V <u>un noyau-calibre de</u> E <u>dans</u> F, A <u>une partie analytique de</u> E <u>et</u> f <u>une fonctions positive analytique sur</u> F. <u>Si on a</u> $V(x,f) = 0$ <u>pour tout</u> $x \in A$, <u>alors il existe une fonction borélienne</u> $g \geq f$ <u>sur</u> F <u>et un borélien</u> $B \supset A$ <u>de</u> E <u>tels que l'on ait encore</u> $V(x,g) = 0$ <u>pour tout</u> $x \in B$.

DEMONSTRATION. Nous nous contentons encore une fois de traiter le cas où f est une indicatrice. Nous reprendrons ici la méthode des multicapacités. Il existe un espace auxiliaire G, un noyau-capacité U de E dans $F \times G$ et une partie analytique H de G tels que

$$\forall M \in \underline{P}(F) \text{ analytique } V(x,M) = U(x, M \times H)$$

Posons, pour tout $L \in \underline{P}(E)$, $M \in \underline{P}(F)$ et $N \in \underline{P}(G)$,

$$J(L,M,N) = \sup_{x \in L} U(x, M \times N)$$

On vérifie aisément que l'on définit ainsi une tricapacité (pour la descente sur les compacts, utiliser le théorème 9 et le lemme de Dini-Cartan). Et, si f est l'indicatrice de l'ensemble analytique A', on a $J(A,A',H) = 0$. Le théorème 3 (écrit pour une tricapacité) nous permet alors de conclure.

Nous n'avons pas su étendre complètement le théorème 16 aux noyaux-calibres enveloppants : le point 4) fait défaut (voir cependant la remarque plus loin). Il reste quand même un théorème intéressant, dont la démonstration repose sur une vieille idée de Mokobodzki.

THEOREME 23.- <u>Soit</u> V <u>un noyau-calibre enveloppant sur</u> E. <u>Alors</u>

1) <u>La classe des parties saturées est stable pour les lim.inf de suites.</u>

2) <u>Pour tout calibre</u> J <u>sur</u> E <u>et tout analytique saturé</u> A <u>de</u> E, <u>on a</u>

$$\begin{aligned} J(A) &= \sup J(L), \text{ L saturé de compact}, L \subset A \\ &= \inf J(B), \text{ B borélien saturé}, B \supset A \end{aligned}$$

(<u>l'inf est atteint d'après</u> 1))

3) <u>Si</u> A <u>et</u> A' <u>sont deux analytiques disjoints de</u> E, <u>et si</u> A <u>est saturé, il existe un borélien saturé</u> B <u>contenant</u> A <u>et disjoint de</u> A'.

DEMONSTRATION. Le point 1) résulte toujours du lemme de Fatou. La première formule de 2) est une conséquence immédiate du théorème de capacitabilité. Le point 3) résultera de la deuxième formule de 2) appliquée au calibre $J(f) = \sup_{x \in A'} f(x)$. Démontrons enfin cette formule. Si A est un analytique saturé et J est un calibre, il existe, d'après le théorème d'approximation appliqué au calibre $J \circ V$, un borélien B_1 A tel que $J(A) = J \circ V(B_1)$. Posons $A_1 = A$ et $A_2 = V(B_1)$: A_2 est un analytique saturé, auquel on peut réappliquer le procédé. En procédant par récurrence, on construit ainsi une suite (A_n) d'analytiques saturés et suite (B_n) de boréliens telles que

$$A_1 \subset B_1 \subset A_2 \subset B_2 \quad \ldots \qquad J(A_1) = J(B_1) = J(A_2) = J(B_2) = \ldots$$

Posons $B = \lim \uparrow B_n = \lim \uparrow A_n$: B est un borélien, saturé puisque V monte, et $J(A) = J(B)$ puisque J monte.

REMARQUES. 1) Si V est le noyau de saturation d'une relation d'équivalence à graphe analytique, on retrouve en 3) un résultat (non publié ?) de Mokobodzki.

2) Soit R une relation d'équivalence sur un espace souslinien métrisable X telle que le saturé de tout point soit fermé et celui de tout ouvert borélien. On montre facilement que le noyau de saturation monte sur $\underline{P}(X)$, descend sur $\underline{\underline{K}}(X)$, et que le saturé de tout compact est borélien. D'autre part, la tribu engendrée par les saturés des ouverts est séparable, et ses atomes sont les saturés des points. Le théorème de Blackwell entraine alors que cette tribu est égale à la tribu des boréliens saturés. Il est donc raisonnable de conjecturer que le point 4) du théorème 16 s'étend au moins au cas d'un noyau-calibre enveloppant V sur E, descendant sur $\underline{\underline{K}}(E)$, tel que le saturé de tout compact soit borélien.

APPENDICE

Nous apportons ici quelques précisions et commentaires sur les définitions de capacités , calibres , et des noyaux correspondants. Nous serons surtout amenés à poser quelques problèmes à la fois difficiles et d'un intérêt limité.

Voici d'abord une notion plus faible de noyau-capacité, introduite également par Mokobodzki (et appelée noyau capacitaire dans [D])

DEFINITION <u>Un noyau</u> U <u>de</u> F <u>dans</u> E <u>est un</u> noyau-capacité faible <u>s'il vérifie les conditions suivantes</u>

a) <u>pour tout</u> $y \in F$, $U(y,.)$ <u>est une capacité sur</u> E

b) <u>pour tout</u> $f \in \underline{\underline{F}}(E)$ <u>s.c.s.</u>, $U(.,f)$ <u>est analytique sur</u> F

Ainsi un noyau-mesure borélien est un noyau-capacité faible, sans être en général un noyau-capacité. Autre exemple : considérons dans E une relation d'équivalence dont le graphe dans $E \times E$ soit analytique et telle que les classes d'équivalence soient compactes ; le noyau qui à $A \in P(E)$ associe son saturé $\hat{A}$ est un noyau-capacité faible.

Les noyaux-capacités faibles ont de bonnes propriétés . Ils vérifient par exemple le théorème d'approximation et d'extension. Ils ne sont cependant pas stables par composition, et nous ne savons pas s'ils vérifient le théorème de séparation. Plus généralement, nous ne savons pas si tout noyau-capacité faible est un noyau-calibre (les exemples précités le sont). On a cependant le résultat partiel suivant, dont nous esquisserons la démonstration.

THEOREME <u>Soit</u> U <u>un noyau-capacité faible de</u> F <u>dans</u> E . <u>Si, pour tout</u> $y \in F$, <u>la capacité</u> $U(y,.)$ <u>est du type</u> I_M , M <u>compact de</u> $\underline{\underline{M}}^1(E)$, <u>(c'est le cas si elle est fortement sous-additive)</u>, <u>alors</u> U <u>est un noyau-calibre</u> .

<u>D/</u> On identifie U à l'application $y \to U(y)$ de F dans $\underline{\underline{K}}[\underline{\underline{M}}^1(E)]$ qui

à y associe $\{m : \forall K \in \underline{\underline{K}}(E) \quad m(K) \leq U(y,K)\}$ et l'on montre que le "sous-graphe" $A = \{(y,L) \in F \times \underline{\underline{K}}(\underline{\underline{M}}^1(E)) : L \subset U(y)\}$ est analytique. On conclut en écrivant que, pour toute partie analytique B de E,

$$U(y,B) = \sup_{(L,y',L') \in \underline{\underline{K}}[\underline{\underline{M}}^1(E)] \times A} I_L(B) \cdot 1_{\{(y',L')\}}(y,L)$$

où I_L est la capacité associée au compact L.

Ce qui fait marcher le théorème, c'est que l'on peut coder les capacités considérées par les compacts de $\underline{\underline{M}}^1(E)$, donc par les éléments du "bon" espace $\underline{\underline{K}}[\underline{\underline{M}}^1(E)]$. Nous ne connaissons pas de tel codage dans le cas général. On peut en fait caractériser les capacités sur E de la manière suivante : une fonction I sur $\underline{\underline{K}}(E)$ est la restriction à $\underline{\underline{K}}(E)$ d'une capacité définie sur $\underline{\underline{P}}(E)$ ssi

1) $I(\emptyset) = 0$ et $I(E) \leq 1$

2) I est s.c.s.

3) si $K \in \underline{\underline{K}}(E)$ est la projection $\pi(H)$ de H, $\underline{\underline{G}}_\delta$ dans un produit $E \times G$, alors $I(K) = \sup I(\pi(L))$, $L \in \underline{\underline{K}}(E \times G)$, $L \subset H$

(Si I vérifie ces propriétés, on l'étend en une capacité en posant $I(A) = \sup I(K)$, $K \in \underline{\underline{K}}(E)$, $K \subset A$ pour A analytique et finalement $I(B) = \inf I(A)$, A analytique, $A \supset B$ pour B quelconque). Mais cette caractérisation permet seulement de dire que l'ensemble des capacités est identifiable à un CPCPCA de l'ensemble des fonctions s.c.s. sur $\underline{\underline{K}}(E)$

Passons aux définitions élargies de noyaux-calibres et calibres. On peut généraliser la définition 5 en disant qu'un noyau U de F dans E est un noyau-calibre faible si $U(y,.)$ est un calibre pour y fixé et si $U(.,f)$ est analytique pour f s.c.s. fixée. Nous ne savons même pas démontrer dans ce cas l'analogue du théorème 19 - avec M analytique dans $\underline{\underline{M}}^1(E)$. Enfin, on peut aussi affaiblir la notion de calibre en disant qu'une fonction J sur $\underline{\underline{P}}(E)$ est un calibre faible si $J(A) = \sup J(K)$, $K \in \underline{\underline{K}}(E)$, $K \subset A$ pour A analytique et si la restriction de J à $\underline{\underline{K}}(E)$ est analytique et vérifie les conditions 1) et 3) précitées (c'est la définition adoptée dans [D]). Nous ne savons pas non plus si un calibre faible J est un calibre, même dans le cas où J est de la forme J_M, M partie de $\underline{\underline{M}}^1(E)$.