Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Chantha Yoeurp
Paul-André Meyer

Sur la décomposition multiplicative des sousmartingales positives

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 501-504
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__501_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

SUR LA DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE DES SOUSMARTINGALES POSITIVES

par Ch. YOEURP et P.A. MEYER

Nous considérons ici un espace probabilisé filtré $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P\ ;\ (\underline{\underline{F}}_t))$ satisfaisant aux conditions habituelles, et une sousmartingale positive (X_t) continue à droite. Il est impossible en général de représenter X comme produit d'une martingale positive et d'un processus croissant, car toute martingale positive conserve la valeur 0 à partir du premier instant où elle l'atteint, tandis que cette propriété n'est pas vraie pour les sousmartingales (par exemple, la valeur absolue du mouvement brownien est une sousmartingale positive qui s'annule très souvent). Nous allons donc supposer X strictement positive, en un sens que nous préciserons. Notre but dans ce travail consiste à donner une décomposition multiplicative de X, et aussi à étudier les rapports entre cette décomposition multiplicative et une représentation assez bizarre, qui figure dans le Séminaire VIII, p.310-315.

NOTATIONS ET RAPPELS

X est, on l'a dit plus haut, une sousmartingale positive. Nous supposons pour simplifier, dans nos premiers raisonnements, que X est bornée inférieurement par une constante $\varepsilon>0$, et que la sousmartingale X est bornée dans L^1 : elle converge alors p.s. et dans L^1 vers une v.a. intégrable X_∞ $(=X_{\infty-})$, et il est bien connu qu'elle appartient à la classe (D). On peut donc écrire

(1) $$X = M+A$$

où M est une martingale uniformément intégrable - non nécessairement positive - et A est un processus croissant prévisible, continu à droite, nul en 0, intégrable. Le processus X admet une projection prévisible

(2) $$\dot{X} = M_- + A$$

Recopions quelques identités classiques . En un temps prévisible T on a $\Delta A_T = E[\Delta X_T | \underline{\underline{F}}_{T-}] = \dot{X}_T - X_{T-}$. D'où, par le théorème de section prévisible

(3) $$\dot{X} = X_- + \Delta A$$

Il en résulte en particulier que $\dot{X}$, lui aussi, est borné inférieurement par ε . Il en résulte d'autre part que

$$(4)\qquad \begin{array}{ll} \Delta A = \dot{X} - X_- \ , & \Delta M = X - \dot{X} \\ 1 \geqq 1 - \frac{\Delta A}{\dot{X}} = \frac{X_-}{\dot{X}} > 0, & 1 + \frac{\Delta M}{\dot{X}} = \frac{X}{\dot{X}} \geqq 0 \end{array}$$

Nous introduisons maintenant trois nouveaux processus : une sousmartingale

$$(5)\qquad Z_t = \int_{]0,t]} \frac{dX_s}{\dot{X}_s} = N_t + B_t \quad \left(N_t = \int_{]0,t]} \frac{dM_s}{\dot{X}_s}\ ,\ B_t = \int_{]0,t]} \frac{dA_s}{\dot{X}_s} \right)$$

et un processus croissant[1] non adapté ,

$$(6)\qquad C_t = \exp\left(-\int_t^\infty \frac{dA_s^c}{\dot{X}_s} \right) \left(\prod_{t<s<\infty} \left(1 - \frac{\Delta A_s}{\dot{X}_s} \right) \right) X_\infty$$

Il y a une relation entre B et C : si l'on forme l'exponentielle de Catherine Doléans-Dade de $-B$, on a

$$(7)\qquad \begin{aligned} \mathcal{E}(-B)_t &= \exp(-B_t) \prod_{s \leqq t} (1-\Delta B_s) e^{\Delta B_s} = \exp(-B_t^c) \prod_{s\leqq t} (1-\Delta B_s) \\ &= \exp\left(-\int_0^t \frac{dA_s^c}{\dot{X}_s}\right) \prod_{s \leqq t} \left(1 - \frac{\Delta A_s}{\dot{X}_s}\right) = \frac{C_0}{C_t} \quad . \end{aligned}$$

DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE DE X

Nous avons que $X_t = X_0 + \int_{]0,t]} \dot{X}_s dZ_s$. Il a été démontré par le premier auteur (voir dans ce volume) que la solution de cette équation différentielle stochastique est $X = X_0 \eta(Z) = X_0 \mathcal{E}(N)/\mathcal{E}(-B)$. Ainsi

$$(8)\qquad X_t = X_0 \mathcal{E}(N)_t / \mathcal{E}(-B)_t$$

C'est la décomposition multiplicative de X : $X_0\mathcal{E}(N)$ est une martingale locale positive, en fait une vraie martingale de la classe (D), car $X_0\mathcal{E}(N) = X_t \mathcal{E}(-B) \leq X_t$; $1/\mathcal{E}(-B)$ est un processus croissant prévisible, égal à 1 en 0. Nous n'insisterons pas ici sur l'unicité, qui se démontre comme pour les surmartingales.

---

1. A^c et B^c désignent les parties continues des processus croissants A et B (notation un peu dangereuse, car X^c désigne souvent la partie <u>martingale-continue</u> de la semimartingale X).

REPRESENTATION DE X COMME PROJECTION

Nous démontrons maintenant le résultat du séminaire VIII (dans le séminaire VIII, il s'agit d'une <u>sur</u>martingale positive Y majorée par 1, ou plus généralement par une martingale M, et on applique ce qui suit à la sousmartingale 1-Y ou M-Y).

Nous écrivons (8) sous la forme

(9) $$C_0 X_t = X_0 \mathcal{E}(N)_t C_t$$

et nous faisons d'abord tendre t vers $+\infty$. Comme $C_\infty = X_\infty$ d'après (6), et X_∞ ne s'annule pas, nous obtenons

$$C_0 X_\infty = X_0 \mathcal{E}(N)_\infty X_\infty \Rightarrow C_0 = X_0 \mathcal{E}(N)_\infty \quad .$$

D'autre part, nous avons vu que $X_0 \mathcal{E}(N)$ est une vraie martingale de la classe (D). Donc en conditionnant par rapport à $\underline{\underline{F}}_t$ il vient

(10) $$E[C_0 | \underline{\underline{F}}_t] = E[X_0 \mathcal{E}(N)_\infty | \underline{\underline{F}}_t] = X_0 \mathcal{E}(N)_t \; .$$

Conditionnons aussi (9) par rapport à $\underline{\underline{F}}_t$; il vient

$$E[C_0 | \underline{\underline{F}}_t] X_t = X_0 \mathcal{E}(N)_t E[C_t | \underline{\underline{F}}_t]$$

et comme la martingale (10) ne s'annule jamais, il vient simplement

(11) $$X_t = E[C_t | \underline{\underline{F}}_t]$$

Voici l'intérêt de cette relation : la projection optionnelle d'un processus croissant intégrable (non nécessairement adapté) est toujours une sousmartingale de la classe (D). Inversement, la décomposition additive nous dit que toute sousmartingale de la classe (D) est projection optionnelle d'un processus croissant intégrable , à savoir $A_t + X_\infty - A_\infty$, mais celui-ci n'est ni positif lorsque X est positive, ni borné lorsque X est bornée. La formule (11) nous représente X comme <u>projection optionnelle d'un processus croissant intégrable</u> C, <u>non adapté</u>, <u>tel que</u> $0 \leq C_t \leq X_\infty$ (formule (6)). Ainsi la théorie de l'exponentielle η permet de mieux comprendre l'exposé du séminaire VIII, et d'en simplifier la démonstration.

LE CAS OU X N'EST PAS BORNEE INFERIEUREMENT

Pour effectuer les passages à la limite, nous introduisons des notations un peu différentes : nous posons

(12) $D = \mathcal{E}(-B)$, processus décroissant prévisible, $D_0 = 1$

(13) $Q = X_0 \mathcal{E}(N)$, martingale positive

Nous avons alors $XD = Q$ (formule (8)). Si X est une sousmartingale positive appartenant à la classe (D), admettant la décomposition $X = M + A$, la sousmartingale $X^\varepsilon = X + \varepsilon$ est bornée inférieurement, et nous pouvons lui appliquer la théorie précédente. Les quantités correspondantes seront affectées d'un ε. Recopions en particulier

$$(14) \qquad C_t^\varepsilon = \exp\left(-\int_t^\infty \frac{dA_s^c}{\dot{X}_s+\varepsilon}\right)\left(\prod_{t<s<\infty} \left(1 - \frac{\Delta A_s}{\dot{X}_s+\varepsilon} \right)\right) (X_\infty + \varepsilon)$$

$$(15) \qquad D_t^\varepsilon = \exp\left(- \int_0^t \frac{dA_s^c}{\dot{X}_s+\varepsilon} \right) \prod_{s\leqq t} \left(1 - \frac{\Delta A_s}{\dot{X}_s+\varepsilon} \right)$$

Lorsque ε décroît, D_t^ε et C_t^ε décroissent tous deux.

THEOREME 1. <u>Soit</u> X <u>une sousmartingale positive de la classe</u> (D). <u>Il existe alors un processus croissant non adapté</u> C <u>tel que</u>

$$(16) \qquad X_t = E[C_t|\underline{\underline{F}}_t] \quad , \quad 0\leqq C_t \leqq X_\infty \ .$$

DEMONSTRATION. Immédiate : on écrit que $X_t+\varepsilon=E[C_t^\varepsilon|\underline{\underline{F}}_t]$, $C_t^\varepsilon \leqq X_\infty+\varepsilon$. Les C_t^ε décroissent, soit C_t^0 leur limite. On a $X_t= E[C_t^0|\underline{\underline{F}}_t]$, $C_t^0 \leqq X_\infty$. Enfin, on pose $C_t=C_{t+}^0$.

THEOREME 2. <u>Soit</u> X <u>une sousmartingale positive</u>, <u>telle que les processus</u> X <u>et</u> X_- <u>ne s'annulent jamais</u>. <u>Il existe alors un processus décroissant prévisible</u> D, <u>tel que</u> $D_0=1$, <u>ne s'annulant jamais</u>, <u>et une martingale</u> Q, <u>tels que</u>

$$(17) \qquad X_tD_t = Q_t \ .$$

DEMONSTRATION. Nous partons de $(X_t+\varepsilon)D_t^\varepsilon = Q_t^\varepsilon$; D_t^ε décroît vers D_t^0, Q_t^ε vers Q_t^0 , et D_t^0 est décroissant prévisible, Q_t^0 une martingale. Nous avons donc toujours $X_tD_t=Q_t$ avec $D_t=D_{t+}^0$, $Q_t=Q_{t+}^0$ - mais ici il faut nous assurer que $D_{t+}^0=D_t^0$, car nous exigeons la <u>prévisibilité</u> de D, et le fait que $D_0=1$. La condition de l'énoncé entraîne que pour tout ω et tout a fini, les fonctions $\dot{X}(\omega)$ et $\dot{X}_-(\omega)$ sont bornées inférieurement sur [0,a] par un h>0. Il en est alors de même pour $\dot{X}(\omega) \geqq \dot{X}_-(\omega)$ (formule (3)), et alors il n'y a aucune difficulté dans le passage à la limite.