Paul-André Meyer

Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley. Exposé II : l'opérateur carré du champ

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 142-161

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__142_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

DEMONSTRATION PROBABILISTE DE CERTAINES INEGALITES DE LITTLEWOOD-PALEY

(P.A. Meyer)

EXPOSE II : L'OPERATEUR CARRÉ DU CHAMP

Cet exposé est presque indépendant du premier, qui était consacré aux inégalités de LITTLEWOOD-PALEY classiques. Nous y considérons un semi-groupe de Markov (P_t) sur un espace d'états E LCD (par ex.), satisfaisant aux "hypothèses droites" usuelles de la théorie des processus de Markov (voir par exemple WALSH-MEYER [1], GETOOR [1]), avec sa réalisation continue à droite canonique $(\Omega, Y_t, \underline{\underline{F}}_t, \ldots)$, sa résolvante (U_p). La fin de l'exposé seulement contient un résultat lié au premier exposé, où l'on forme un semi-groupe $(\hat{P}_t)$ produit de (P_t) par un mouvement brownien $(P_t^{\rightarrow})$. Un peu partout, nous avons inclus des résultats analytiques faciles et ennuyeux, qui n'ont rien à voir avec le carré du champ, mais serviront plus tard.

I. L'OPERATEUR CARRÉ DU CHAMP

Nous introduisons d'abord le générateur infinitésimal A de (P_t), sur son domaine $\underline{\underline{D}}(A)$, en un sens faible

DEFINITION 1. $f \in \underline{\underline{D}}(A)$ <u>et</u> Af=g <u>signifie que</u>

1) f <u>est universellement mesurable bornée sur</u> E,

2) g <u>est universellement mesurable sur</u> E, <u>et</u> $U_p|g|$ <u>est bornée sur</u> E <u>pour tout</u> p>0,

3) <u>pour tout</u> p>0, $f=U_p(pf-g)$.(1)

On obtient une variante intéressante en remplaçant "bornée" par "finie" dans l'assertion 2) - c'est sous cette forme que figurait la définition dans la rédaction précédente.

Pour tout $x \in E$, l'espérance $E^x[\int_0^\infty e^{-ps}(p|f|+|g|)\circ Y_s\, ds]$ est finie, et le processus

$$(1) \qquad C_t^{p,f} = e^{-pt} f\circ Y_t + \int_0^t e^{-ps}(pf-g)\circ Y_s\, ds = E[\int_0^\infty e^{-ps}(pf-g)\circ Y_s\, ds \,|\underline{\underline{F}}_t]$$

<u>est une martingale uniformément intégrable pour la loi</u> P^x. Faisant

(1) Noter que si l'on modifie g sur un ensemble de potentiel nul, ces propriétés restent satisfaites.

tendre p vers 0, nous obtenons que le processus

(2) $$C_t^f = f\circ Y_t - \int_0^t g\circ Y_s \, ds$$

est une martingale - non uniformément intégrable en général. Notre but consiste à montrer que cette martingale est localement de carré intégrable, et à calculer le processus croissant associé $<C^f,C^f>$.

Nous remarquons d'abord que

(3) $$C_t^{p,f} = \int_{[0}^{t]} e^{-ps} \, dC_s^f \quad \text{(intégrale stochastique)}$$

Dans cette formule, l'intervalle d'intégration contient 0, on convient que $C_{0-}^f = 0$, de sorte qu'il y a une masse en 0 égale à $C_0^f = f\circ Y_0$.

Pour vérifier cela, nous intégrons par parties

$$\int_{[0,t]} e^{-ps} dC_s^f = C_t^f e^{-pt} + \int_0^t pC_s^f e^{-ps} \, ds$$

après quoi le calcul va tout seul, et nous laissons les détails de côté. Nous avons par conséquent

(4) $$d<C^{p,f},C^{p,f}>_t = e^{-2pt} d<C^f,C^f>_t \quad .$$

<u>Nous poserons</u> pf-g=h <u>pour alléger les notations</u>. Notre point de départ est un lemme qui améliore la vieille "formule de l'énergie" - on pourrait l'étendre du cas continu au cas prévisible. Pour tous ces calculs, cf. Probabilités et Potentiels, VII, n^{os} 16,23 et environs.

LEMME 1. <u>Soit</u> (A_t) <u>un processus adapté, à trajectoires continues et à variation intégrable</u>

(5) $$E[\int_0^\infty |dA_s|] < \infty$$

<u>et soit</u> $X_t = E[A_\infty | \underline{\underline{F}}_t] - A_t$ <u>le "potentiel" associé. Si l'on a</u> $|X_t| \leqq c$, <u>on a</u>

(6) $$E[A_\infty^2] = 2E[\int_0^\infty X_s dA_s] \leqq 2cE[\int_0^\infty |dA_s|]$$

DEMONSTRATION. Posons $T = \inf \{t : \int_0^t |dA_s| \geqq n\}$, $\bar{A}_t = A_{t\wedge T}$: c'est un processus continu, adapté, dont la variation totale sur $\mathbb{R}_+$ est bornée par n. Quel est le potentiel engendré ? c'est

$$\bar{X}_t = E[\bar{A}_\infty | \underline{\underline{F}}_t] - \bar{A}_t = X_{t\wedge T} - E[X_T | \underline{\underline{F}}_t]$$

la formule de l'énergie usuelle s'applique à $\bar{A}$ et nous donne

$$E[A_T^2] = E[\bar{A}_\infty^2] = 2E[\int_0^\infty \bar{X}_s d\bar{A}_s] = 2E[\int_0^T X_s dA_s] - 2E[\int_0^\infty E[X_T | \underline{\underline{F}}_t] d\bar{A}_t]$$
$$= 2E[\int_0^T X_s dA_s] - 2E[X_T A_T]$$

Faisons tendre n vers $+\infty$: alors $T \to +\infty$, la première intégrale tend vers $E[\int_0^\infty X_s dA_s]$ (domination par $c\int_0^\infty |dA_s|$), la seconde intégrale tend vers 0 (car $X_T \to 0$ en restant dominé par c), et d'après le lemme de Fatou nous obtenons que $E[A_\infty^2] < \infty$.

Mais alors la martingale $X_t + A_t = E[A_\infty | \underline{\underline{F}}_t]$ est de carré intégrable, donc dominée dans L^2 (inégalité de Doob) et comme $|X_t| \leq c$ le processus (A_t) est dominé dans L^2. Donc $E[A_T^2] \to E[A_\infty^2]$, et nous pouvons conclure.

Nous appliquons ce résultat à $A_t = \int_0^t e^{-ps} h \circ Y_s ds$ ($h = pf - g$), avec les lois P^x. Le potentiel X_t est alors $E[\int_t^\infty e^{-ps} h \circ Y_s ds | \underline{\underline{F}}_t] = e^{-pt} f \circ Y_t$ borné. Il vient, en nous conformant à la définition usuelle de $\langle C^{p,f}, C^{p,f}\rangle$ comme processus croissant prévisible <u>nul en 0</u>[1]

$$E^\cdot[(C_\infty^{p,f})^2] = E^\cdot[A_\infty^2] = 2E^\cdot[\int X_s dA_s] = 2U_{2p}(fh)$$

$$E^\cdot[\langle C^{p,f}, C^{p,f}\rangle_\infty] = E^\cdot[(C_\infty^{p,f})^2 - (C_0^{p,f})^2] = 2U_{2p}(fh) - f^2$$

Nous passons alors à C^f en utilisant (4)

$$E^\cdot[\int_0^\infty e^{-2ps} d\langle C^f, C^f\rangle_s] = 2U_{2p}(fh) - f^2 = E^\cdot[\int_0^\infty 2e^{-2ps}(fh) \circ Y_s ds] - f^2$$

Il est classique (KUNITA-WATANABE) que $\langle C^f, C^f\rangle$ est une fonctionnelle additive. Autrement dit, f^2 est le 2p-potentiel de la fonctionnelle additive $\int_0^t fh \circ Y_s ds - \langle C^f, C^f\rangle_t$, et par conséquent le processus

$$(7) \qquad e^{-2pt} f^2 \circ Y_t + 2\int_0^t e^{-2ps} f \circ Y_s (pf-g) \circ Y_s ds - \int_0^t e^{-2ps} d\langle C^f, C^f\rangle_t$$

est une martingale. Faisons tendre p vers 0, nous obtenons le résultat suivant :

LEMME 2. <u>Si</u> $f \in \underline{\underline{D}}(A)$ <u>et</u> $g = Af$, <u>la martingale</u> (C_t^f) <u>est localement de carré intégrable, et le processus</u>

$$(8) \qquad f^2 \circ Y_t - 2\int_0^t (fg) \circ Y_s ds - \langle C^f, C^f\rangle_t$$

<u>est une martingale pour toute loi</u> P^x.

A partir de là, nous allons pouvoir démontrer un résultat assez intéressant.[2] Disons qu'un ensemble $\underline{\underline{H}}$ de fonctions universellement mesurables bornées est <u>plein</u> si la mesure nulle est la seule mesure bornée (signée) nulle sur $\underline{\underline{H}}$. Alors

THEOREME 1. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u>

1) $\underline{\underline{D}}(A)$ <u>est une algèbre</u> .

1. Ce n'est pas celle du cours sur les intégrales stochastiques.
2. Voir la remarque p.II.18.

2) $\underline{\underline{D}}(A)$ <u>contient une algèbre pleine</u> $\underline{\underline{H}}$.

3) <u>Pour toute loi</u> P^μ, <u>toute martingale</u> (M_t) <u>sur</u> Ω <u>relative à</u> P^μ <u>et de carré intégrable, la mesure aléatoire</u> $d\langle M,M\rangle_t$ <u>est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue</u> dt.

DEMONSTRATION. Montrons que 3)=>1). Supposons que pour $f\in\underline{\underline{D}}(A)$ $d\langle C^f,C^f\rangle_t$ soit absolument continue par rapport à dt. Alors, d'après un théorème célèbre de MOTOO (étendu à tous les semi-groupes droits par MOKOBODZKI et aussi GETOOR : cf. le séminaire de Strasbourg V, p.231) il existe une fonction positive j universellement mesurable sur E telle que $d\langle C^f,C^f\rangle_t = j\circ Y_t dt$. Nous avons alors d'après les calculs antérieurs

(9) $\quad U_{2p}j = E^\bullet[\langle C^{p,f},C^{p,f}\rangle_\infty] \leqq 2U_{2p}(fh)$, fonction bornée

donc si nous posons $k=2fg+j$, $U_{2p}|k|$ est bornée, et l'on a

(10) $\quad f^2 = U_{2p}(2pf^2-k)$ d'après la relation (7).

Cela signifie que $f^2\in\underline{\underline{D}}(A)$ et $Af^2=k=2fg+j$. Pour montrer que $\underline{\underline{D}}(A)$ est une algèbre, on polarise.

Il est clair que 1)=>2). Il reste à montrer que 2)=>3). Ce résultat est dû pour l'essentiel à KUNITA-WATANABE. Nous ne ferons qu'esquisser la démonstration, en renvoyant pour les détails au séminaire de probabilités de Strasbourg I, Lecture Notes n°39, <u>Intégrales stochastiques III</u>, p.131. Le lemme de KUNITA-WATANABE s'énonce ainsi :

LEMME 3.* <u>Si</u> $\underline{\underline{H}}$ <u>est un ensemble plein dans</u> $\underline{\underline{D}}(A)$, <u>et si</u> M <u>est une martingale de carré intégrable pour la mesure</u> P^μ (μ <u>bornée</u>) <u>orthogonale aux martingales</u> C^f, $f\in\underline{\underline{H}}$, <u>nulle en</u> 0 , <u>alors</u> M <u>est nulle</u>.

Ce point étant admis, supposons que $\underline{\underline{D}}(A)$ contienne une algèbre pleine $\underline{\underline{H}}$. Pour toute $f\in\underline{\underline{H}}$ on a $f^2\in\underline{\underline{H}}$, donc $\langle C^f,C^f\rangle_t = \int_0^t (Af^2-2fAf)\circ Y_s ds$ est absolument continue. L'ensemble $\underline{\underline{U}}$ des martingales de carré intégrable U telles que $\langle U,U\rangle$ soit absolument continu est un sous-espace stable, pour vérifier que c'est l'espace de toutes les martingales de carré intégrable il suffit de montrer que toute M orthogonale à $\underline{\underline{U}}$ est nulle, et cela résulte du lemme précédent.

REMARQUES. Les semi-groupes possédant la propriété 3) sont appelés semi-groupes de LEVY dans le séminaire I, p.149 (parce qu'ils admettent un "système de LEVY"). Il est montré p.150 du séminaire I que tout semi-groupe droit dont la famille de tribus est dépourvue de temps de discontinuité peut se ramener à un semi-groupe de LEVY par changement de temps (pour le lecteur qui voudrait regarder, signalons que

---

* v. page 162: Correction aux "Inégalités de Littlewood-Paley"

ces exposés sont rédigés pour des semi-groupes de HUNT, et que cette hypothèse n'intervient en réalité que par l'absence de temps de discontinuité dans la famille ($\underline{\underline{F}}_t$)). Inversement, il est bien connu que la propriété 3) entraîne l'absence de temps de discontinuité.

Le théorème 1 entraîne que tout semi-groupe tel que $\underline{\underline{D}}(A)$ contienne $\underline{\underline{C}}_c^{\infty}$ est un semi-groupe de LEVY . Ce résultat était annoncé dans le séminaire I, p.160, th.7, mais avec une démonstration insuffisante : on n'y prouvait qu'un résultat un peu plus faible , dû à IKEDA-WATANABE, J.Math. Kyoto 1962.

Dans cet exposé-ci, nous ne parlerons pas de semi-groupes de LEVY. Nous emploierons la terminologie suivante, empruntée à la thèse récente de ROTH (Orsay 1975), qui montre l'importance des opérateurs carré du champ en théorie du potentiel.

DEFINITION 2. On dit que (P_t) admet un opérateur carré du champ si les conditions équivalentes du th.1 sont satisfaites. Si f et g sont deux éléments de $\underline{\underline{D}}(A)$, on notera $\Gamma(f,g)$ la densité de $\frac{1}{2}\langle C^f, C^g\rangle$:

(11) $$2\Gamma(f,g) = A(fg) - f.Ag - g.Af \qquad (f,g \in \underline{\underline{D}}(A))$$

Dans le cas du mouvement brownien, par exemple, $\Gamma(f,g)$= gradf.gradg. La valeur de $\Gamma(f,g)$ au point x sera notée $\Gamma_x(f,g)$ en général - mais noter que Af n'est pas, au sens de la définition p.1, une fonction : c'est une classe de fonctions définies aux ensembles de potentiel nul près. Les valeurs de l'opérateur carré du champ Γ sont donc définies p.p..

Lorsque nous travaillerons sur des fonctions complexes, nous poserons

(12) $$2\Gamma(f,g) = A(f\bar{g}) - f.A\bar{g} - \bar{g}.Af$$

Le résultat fondamental concernant l'opérateur carré du champ est la positivité de la classe $\Gamma(f,f)$ pour toute f complexe appartenant à $\underline{\underline{D}}(A)$, tout simplement parce que c'est la densité de $\langle C^f, C^{\bar{f}}\rangle_t/2$ p.r.à dt .

UNE APPLICATION DE LA FORMULE D'ITO

Le théorème suivant[1], dont la démonstration emploie des techniques probabilistes plus raffinées, ne nous servira pas dans la suite. Il exprime que, dès que la fonction $x \mapsto x^2$ opère sur $\underline{\underline{D}}(A)$, toutes les fonctions deux fois différentiables opèrent (je voudrais ici poser une question : quand les fonctions de classe $\underline{\underline{C}}^1$ opèrent elles ? On peut raisonnablement conjecturer, cf. la théorie des espaces de Dirichlet, qu'elles opèrent sur $\underline{\underline{D}}(\sqrt{-A})$, et cela caractérise peut être les générateurs B tels que $-B^2$ soit un générateur).

1.Voir la remarque p.II.18.

THEOREME 2. <u>Supposons que</u> (P_t) <u>admette un opérateur carré du champ</u> Γ. <u>Soient</u> $f^1,\dots,f^n$ n <u>éléments de</u> $\underline{\underline{D}}(A)$, F <u>une application deux fois continûment différentiable de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$. <u>Alors la fonction</u> $F(f^1,\dots,f^n)$ <u>appartient à</u> $\underline{\underline{D}}(A)$.

DEMONSTRATION. Pour simplifier les notations, nous prendrons n=1. Nous considérons donc $f\in\underline{\underline{D}}(A)$, $g=Af$, les processus $f\circ Y_t$,$g\circ Y_t$ notés respectivement f_t et g_t , la martingale $C_t = f_t-\int_0^t g_s ds$, enfin la fonction $j= 2\Gamma(f,f)$: si l'on pose $j_t=j\circ Y_t$, on a $d\langle C,C\rangle_t = j_t dt$.

Nous allons utiliser la théorie du système de LEVY. Comme la famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$ est dépourvue de temps de discontinuité, le processus (Y_t) admet des limites à gauche <u>dans E</u> , notées Y_{t-} , au sens de n'importe quelle topologie induite sur E par une compactification de RAY (voir WALSH-MEYER [1], th. 13). Comme f est un p-potentiel, les processus $(f\circ Y_{t-})$ et f_{t-} sont indistinguables (même réf., théorème 8). D'après KUNITA-WATANABE, débarrassé de l'hypothèse de continuité absolue par BENVENISTE [1] (cf. le séminaire VII, p.27), il existe un noyau N de E dans E, non borné en général, tel que $N(x,\{x\})=0$ pour tout $x\in E$ et que, pour toute fonction h positive sur $E\times E$ <u>nulle sur la diagonale</u> la projection prévisible de la mesure aléatoire

$$\Sigma_s\, h(Y_{s-},Y_s)\varepsilon_s$$

portée par les sauts de Y, soit la mesure aléatoire

$$N(Y_s,h)ds \text{ , où l'on pose } N(.,h)=\int N(.,dy)h(.,y)$$

Considérons la semimartingale $f_t = \int_0^t g_s ds + C_t$, et élevons la au carré. La formule d'ITO nous donne, en désignant par C^c la partie continue de la martingale C, et par γ la fonction positive, densité de la fonctionnelle $d\langle C^c,C^c\rangle_t$ par rapport à dt

$$(13)\qquad f_t^2 = f_0^2 + 2\int_0^t f_s g_s ds +2\int_0^t f_{s-}dC_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\gamma_s ds + \Sigma_{s\leqq t}\, (f_s-f_{s-})^2$$

Considérons la fonction $\rho(x,y)=(f(x)-f(y))^2$ sur $E\times E$, et prenons une espérance, en utilisant la définition du noyau de LEVY. Il vient

$$E^{\bullet}[\, f_t^2-f_0^2 -\int_0^t 2f_s g_s ds] = E^{\bullet}[\int_0^t (\gamma\circ Y_s+N(Y_s,\rho))ds$$

Mais le côté gauche est égal, par définition de l'opérateur carré du champ, à $E^{\bullet}[\int_0^t 2j_s ds\,]$. Ainsi nous avons

$$(14)\qquad 2j = \gamma+N\rho$$

et nous rappelons (cf. (9)) que $U_p j$ est une fonction bornée pour tout

$p>0$. Maintenant, nous appliquons la formule d'ITO à la fonction deux fois dérivable F, et à la semimartingale précédente f_t. Il vient en posant $F(f)=H$

$$
\begin{aligned}
H\circ Y_t = H\circ Y_0 &+ \int_0^t F'(f_s)g_s ds + \int_0^t F'(f_{s-})dC_s \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t F''(f_s)\gamma_s ds \\
&+ \Sigma_{s\leqq t}\,(F(f_s)-F(f_{s-})-F'(f_{s-})(f_s-f_{s-}))
\end{aligned}
$$

Notons $h(x,y)=F(f(y))-F(f(x))-F'(f(x))(f(y)-f(x))$. Comme f est bornée, soit K un nombre positif qui majore $|F'|,|F''|$ sur $[-2\|f\|,2\|f\|]$. Nous avons, d'après la majoration classique du reste de la formule de Taylor

$$|h(x,y)| \leqq \tfrac{1}{2}K\rho(x,y)$$

et par conséquent, nous pouvons prendre une espérance dans la formule ci-dessus, en appliquant la théorie du système de LEVY : il vient

$$P_tH = H + E^{\bullet}[\int_0^t \varphi\circ Y_s ds\ ] \text{ où } \quad \varphi=(F'\circ f)g + \tfrac{1}{2}(F''\circ f)\gamma + Nh$$
$$|\varphi| \leqq K|g|+\tfrac{1}{2}K(\gamma+N\rho)$$

Il résulte de (14) que $U_p|\varphi|$ est une fonction bornée pour tout $p>0$, et cette relation signifie que H appartient à $\underline{\underline{D}}(A)$, avec $AH=\varphi$. Le théorème est établi.

UN EXEMPLE : LES SEMI-GROUPES DE CONVOLUTION SUR $\mathbb{R}^n$

Soit (P_t) un semi-groupe de convolution markovien sur $\mathbb{R}^n$: conformément aux notations généralement employées en probabilités

(15) $\qquad P_tf(x) = \int f(x+y)\mu_t(dy)$ (1)

où (μ_t) est un semi-groupe de convolution ($\mu_s*\mu_t=\mu_{s+t}$). La formule (15) est seulement un peu dangereuse du côté de la transformée de Fourier : on a $(P_tf)\hat{}(u) = \hat{f}(u)\hat{\mu}_t(-u)$. D'une manière générale, et malgré cette irrégularité, nous utiliserons la formule (15) pour définir le "noyau" H associé à une distribution η, en posant

(15') $\qquad Hf(x) = \int f(x+y)\eta(dy)$

comme s'il s'agissait d'une mesure, mais pour $f\in\underline{\underline{C}}_c^{\infty}$.

HUNT a montré (voir COURREGE [1], par exemple, pour un exposé relatif à $\mathbb{R}^n$, et non aux groupes de Lie) que (P_t) est un semi-groupe

---

(1) C'est seulement à cette condition que μ_t est la loi de X_t pour le processus de Markov issu de 0, admettant (P_t) comme semi-groupe de transition : $E^x[f\circ X_t] = P_tf(x)=E^0[f(x+X_t)]=\ldots$

fortement continu sur l'espace de Banach $\underline{\underline{C}}_u$ des fonctions bornées uniformément continues sur $\mathbb{R}^n$, que le domaine du générateur A contient l'algèbre $\underline{\underline{C}}_u^2$ des fonctions deux fois différentiables qui appartiennent à $\underline{\underline{C}}_u$ ainsi que leurs dérivées partielles d'ordre 1 et 2, et que A est continu de $\underline{\underline{C}}_u^2$ (muni de sa norme naturelle) dans $\underline{\underline{C}}_u$.

Nous noterons A_0 la <u>forme linéaire</u> $f \mapsto Af(0)$ sur $\underline{\underline{C}}_u^2$ - considérée comme forme linéaire sur $\underline{\underline{S}} \subset \underline{\underline{C}}_u^2$, c'est une distribution tempérée. Il est clair que Af est la "convolution" $\int f(x+y)A_0(dy)$. De même, nous désignerons par Γ_0 la forme hermitienne sur $\underline{\underline{C}}_u^2 \times \underline{\underline{C}}_u^2$

(16) $\quad 2\Gamma_0(f,g) = A_0(f\bar{g})-f(0)A_0(\bar{g})-A_0(f)\overline{g(0)}$

de sorte qu'au point x nous poserons

$$2\Gamma_x(f,g) = \text{"}\int f(x+y)g(x+z)\Gamma_0(dy,dz)\text{"} = A_x(f\bar{g})-f(x)A_x(\bar{g})-A_x(f)\overline{g(x)}$$

Si f=g, cette fonction - partout définie - est positive hors d'un ensemble de potentiel nul, donc $pU_p(\Gamma_\cdot(f,f))$ est positive partout. Comme $\Gamma_\cdot(f,f)$ est une fonction continue , on voit en faisant tendre p vers $+\infty$ que $\Gamma_\cdot(f,f)$ est positive partout. Autrement dit, <u>la forme hermitienne</u> Γ_0 <u>est positive sur</u> $C_u^2 \times C_u^2$ (mais peut être dégénérée)

On sait que $\hat{\mu}_t = e^{-t\psi}$, où $\psi(u) = \int e^{iuy}A_0(dy)$ est une fonction de type négatif nulle en 0. Si f et g sont deux éléments de $\underline{\underline{S}}$, leurs représentations de Fourier

$$f(x) = \int e^{-iux}\hat{f}(u)\tilde{d}u \quad , \quad g(y) = \int e^{-ivy}\hat{g}(v)\tilde{d}v$$

sont des intégrales au sens de la topologie forte de $\underline{\underline{C}}_u^2$, et comme la forme Γ_0 est continue, on a

$$\Gamma_0(f,g) = \int \Gamma_0(e^{-iu\cdot},e^{-iv\cdot})\hat{f}(u)\overline{\hat{g}}(v)\tilde{d}u\tilde{d}v$$

tandis que

(17) $\quad 2\Gamma_0(e^{-iu\cdot},e^{-iv\cdot}) = A_0(e^{i(v-u)\cdot})-A_0(e^{-iu\cdot})-A_0(e^{iv\cdot})$

$$= \psi(v)+\psi(-u)-\psi(v-u)$$

(18) $\quad 2\Gamma_0(f,g) = \iint (\psi(v)+\psi(-u)-\psi(v-u))\hat{f}(u)\overline{\hat{g}}(u)du\tilde{d}v$.

Ainsi, la positivité de la forme hermitienne Γ_0 exprime exactement le fait que ψ est de type négatif, mais de manière directe, sans transformée de Fourier. C'est pour cette raison que ROTH a pu obtenir, grâce aux opérateurs carré du champ, une formule de LEVY-KHINTCHINE d'une très grande généralité .

Nous donnons maintenant quelques formules liées, non pas à l'opérateur carré du champ, mais aux calculs de la théorie de LITTLEWOOD-PALEY. Pour commencer, le semi-groupe adjoint de (P_t) par rapport à la mesure de Lebesgue est donné par

(19) $$P_t^* f = (P_t f^\vee)^\vee$$

où l'opération $^\vee$ est la symétrie par rapport à 0 ($f^\vee(x)=f(-x)$).

Ensuite, soit (Q_t) le semi-groupe de Cauchy associé à (P_t), et soient ρ la fonction de type négatif, B le générateur correspondants . Nous avons - les mesures μ_t sur $\mathbb{R}_+$ étant reprises du premier exposé, formules (5),(6),(7), et ne devant pas être confondues avec celles de (15) de cet exposé ci

$$e^{-t\rho(u)} = \int_0^\infty e^{-s\psi(u)}\mu_t(ds)$$

Mais la formule $\int_0^\infty e^{-ps}\mu_t(ds)= e^{-t\sqrt{p}}$ se prolonge analytiquement au demi-plan $\{\Re(p)>0\}$, la racine étant celle dont la partie réelle est positive. Comme on a $|e^{-s\psi(u)}| \leq 1$ pour tout s, $\psi(u)$ appartient à ce demi-plan et on peut écrire $\rho=\sqrt{\psi}$. D'où la formule donnant le prolongement "harmonique" f(x,t) d'une fonction $f\in\underline{\underline{S}}$ donnée sur le "bord"

(20) $$f(x,t) = \int_E \hat{f}(u)e^{-ixu}e^{-t\sqrt{\psi(-u)}}\tilde{d}u$$

Revenons à l'opérateur carré du champ : sur l'espace $\underline{\underline{S}}$, considérons la forme bilinéaire symétrique, positive (éventuellement dégénérée) Γ_0. Soit (η_n) une suite d'éléments de $\underline{\underline{S}}$, totale dans $\underline{\underline{S}}$. En rejetant ceux qui sont de longueur nulle pour Γ_0 , en appliquant le procédé usuel d'orthogonalisation, nous pouvons supposer que

(21) $$\Gamma_0(f,f) = \Sigma_n (\Gamma_0(f,\eta_n))^2 \qquad (f\in\underline{\underline{S}})$$

ou encore, en introduisant les noyaux associés

$$H_nf(x) = \Gamma_0(f(x+.),\eta_n)$$

(22) $$\Gamma(f,f) = \Sigma_n(H_nf)^2 \qquad (f\in\underline{\underline{S}})$$

avec une conséquence intéressante pour nous : reprenons la fonction "harmonique" f(x,t), prolongement de f, et notons f_t la fonction f(.,t). Nous avons $Q_tH_nf=H_nQ_tf$, donc la fonction $(x,t)\mapsto H_nf_t(x)$ est le prolongement harmonique de H_nf. Donc la fonction

(23) $$\gamma_\dagger(x,t) = \Gamma_x(f_t,f_t)$$

est une somme de carrés de fonctions harmoniques : elle est sousharmonique, en ce sens que

(24) $$Q_s(\gamma_\dagger(.,t)) \geqq \gamma_\dagger(.,s+t) \qquad \text{et même} \qquad Q_s(\sqrt{\gamma_\dagger(.,t)}) \geqq \sqrt{\gamma_\dagger(.,s+t)}$$

La fonction $D_{\rightarrow}f(.,.)$ est aussi harmonique, comme on le voit sur (20) : c'est le prolongement de la fonction "dérivée normale de f", de transformée de Fourier $-\sqrt{\psi(-u)}\hat{f}(u)$ (N.B. : il est classique que $|\psi(-u)|\leq C|u|^2$ au voisinage de l'infini). Il en résulte que si l'on pose

(25) $$\gamma = \gamma_t + (D_{\rightarrow}f)^2$$

γ est aussi une somme de carrés de fonctions harmoniques, et γ et $\sqrt{\gamma}$ sont encore sousharmoniques.

Continuons à noter quelques propriétés analytiques des semi-groupes de convolution. La forme exacte du générateur à l'origine, sur $\underline{\underline{C}}_u^2$, nous est donnée par la formule de KHINTCHINE-LEVY

(26) $$A_0 f = L_0 f + \int_{|x|>1} (f(x)-f(0))\nu(dx) + \int_{|x|\leq 1} (f(x)-f(0)-x\cdot\mathrm{grad}_0 f)\nu(dx)$$

où L_0 est un opérateur différentiel du second ordre à l'origine (elliptique, peut être dégénéré), ν une mesure positive telle que $\int(|x|^2\wedge 1)\nu(dx) <+\infty$. Il en résulte que si des fonctions f_n de $\underline{\underline{C}}_u^2$ convergent simplement vers une fonction $f\in\underline{\underline{C}}_b^2$ (bornée ainsi que ses dérivées premières et secondes), avec convergence simple des dérivées d'ordre 1 et 2 vers celles de f , et les dérivées d'ordre 1 et 2 des f_n restant bornées uniformément, alors les fonctions Af_n convergent simplement en restant bornées, vers Af donnée par (26) au point O, et ailleurs par translation. La convergence simple peut d'ailleurs être remplacée ici par la convergence compacte.

Quelques conséquences : D'abord $\underline{\underline{C}}_b^2$ est contenu dans $\underline{\underline{D}}(A)$, au sens où nous l'avons défini, et A applique $\underline{\underline{C}}_b^2$ dans $\underline{\underline{C}}_b$.

Ensuite, $\underline{\underline{S}}$ est dense dans $\underline{\underline{C}}_b^2$ pour la "norme hilbertienne" $\sqrt{\Gamma_0}$, et la formule (22) s'étend à $\underline{\underline{C}}_b^2$.

Un autre point de la théorie des semi-groupes de convolution, qui intéresse la théorie de LITTLEWOOD-PALEY (mais n'a rien à voir avec l'opérateur carré du champ) concerne l'existence de <u>fonctions invariantes</u> dans $L^r(\xi)$, où ξ est la mesure de Lebesgue.

Tout d'abord, si $f\in L^2$ et $f_t=P_tf$ (nous regardons (P_t) plutôt que (Q_t) pour la simplicité des notations, mais les résultats sont les mêmes) nous avons

$$\hat{f}_t(u) = \hat{f}(u)e^{-t\psi(-u)}$$

Comme $\psi(u)$ ne s'annule qu'à l'origine (résultat classique sur les semi-groupes de convolution sur $\mathbb{R}^n$) on ne saurait avoir $f=f_t$ pour tout t, et il n'existe pas de fonction invariante dans L^2 autre que O.

D'autre part, le théorème ergodique pour les moyennes d'Abel (conséquence du théorème ergodique usuel pour les moyennes de Cesaro) dit que pU_pf converge dans L^2 , lorsque $p \to 0$, vers une fonction invariante. Celle-ci est donc nulle, et il existe des $p_n \downarrow 0$ tels que $p_n U_{p_n} f \to 0$ p.p..

Mais alors, soit f continue à support compact ; f appartient à L^r pour tout $r \geq 1$, et le théorème ergodique (abélien) nous dit que pU_pf converge dans L^r ($p \to 0$) . Comme $p_n U_{p_n} f \to 0$ p.p. pour une suite p_n la limite de pU_pf dans L^r ne peut être que 0. Mais alors, l'espace des $f \in L^r$ telles que $pU_pf \to 0$ dans L^r contient $\underline{\underline{C}}_c$, il est donc dense dans L^r ; comme il est fermé , c'est tout L^r, et on voit qu'il n'existe dans L^r aucune fonction invariante.

Une autre conséquence, qui sera développée plus en détail dans l'exposé IV : soit $f \in \underline{\underline{C}}_c^\infty$. Comme $f \in L^r$, et pU_pf tend vers 0 dans L^r lorsque $p \to 0$, les fonctions $f - pU_pf$ forment un ensemble dense dans L^r. Or $f - pU_pf = A(U_p(-f))$ appartient à <u>l'image</u> de A . Ainsi, non seulement le domaine de A , mais l'image de A, est dense dans L^r. Cela devra être repris (exposé IV, dém. du th.2), aussi est il inutile d'insister ici.

II. PASSAGE AU SEMI-GROUPE PRODUIT

Nous revenons maintenant à la situation du premier exposé, mais en la généralisant : nous supposons que (P_t) est un <u>semi-groupe markovien</u>[1] <u>sur</u> E (E sera $\mathbb{R}^n$ dans les applications, mais peut être un espace polonais, par exemple, dans la théorie générale), <u>admettant une mesure invariante σ-finie</u> ξ . Nous allons noter un certain nombre de faits analytiques concernant les "prolongements harmoniques" , mais notre but principal consiste ici, <u>en supposant que</u> (P_t) <u>admet un opérateur carré du champ</u> , à écrire explicitement les fonctions figurant dans les expressions de LITTLEWOOD-PALEY. Les résultats obtenus à cet égard ne laissent rien à désirer.

1. (P_t) satisfait aux hypothèses droites, comme au paragraphe I.

Reprenons d'abord les notations de l'exposé I, en les étendant à la situation générale.

Nous désignons par $\hat{E}$ le produit $E\times\mathbb{R}$ (coordonnées souvent notées (x,t)), $\hat{E}^+$ le "demi-espace" $E\times\mathbb{R}_+$, et nous identifions E au " bord " $E\times\{0\}$. Nous notons encore ξ_a la mesure $\xi\otimes\varepsilon_a$.

Soit $(P_t^{\rightarrow})$ le semi-groupe du mouvement brownien "horizontal" . Nous désignons par $(\hat{P}_t)$ le semi-groupe produit sur $\hat{E}$

si $\hat{x}=(x,u)\in\hat{E}$, $\hat{P}_t(\hat{x},.) = P_t(x,.)\otimes P_t^{\rightarrow}(u,.)$

Nous désignons par $\hat{\Omega}$ l'espace produit de l'espace Ω des applications continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans E, par l'espace W des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Les applications coordonnées sur Ω sont notées (Y_t) (applications à valeurs dans E) et (Z_t) (applications à valeurs dans $\mathbb{R}$). $\hat{\Omega}$ est muni de sa famille de tribus naturelle, des mesures $\mathbb{P}^{x,u}=\mathbb{P}^x\otimes\mathbb{P}^u$ faisant du processus (Y_t,Z_t) un processus de Markov admettant $(\hat{P}_t)$ comme semi-groupe de transition.
Comme dans le premier exposé, on désigne par T_0 le temps de rencontre de 0 par le processus (Z_t), ou encore de $E\times\{0\}$ par (Y_t,Z_t).
Une fonction f, positive ou bornée, donnée sur E, admet le "prolongement harmonique" à $\hat{E}^+$

(27) $$f(x,t) = \int Q_t(x,dy)f(y)$$

où l'on a posé, comme dans le premier exposé , formules (6) et (7)

$$Q_t = \int P_s\,\mu_t(ds) \quad , \quad \mu_t(ds)=\text{cte}\,e^{-t^2/4s}\,s^{-3/2}ds \;=\; m_t(s)ds$$

(Q_t) est le "semi-groupe de Cauchy" associé à (P_t) . Nous désignerons par A le générateur de (P_t), par B celui de (Q_t) , par $\hat{A}$ celui de $(\hat{P}_t)$.
Notre première remarque est la suivante :

LEMME 4. Supposons f bornée. Le processus $f(Y_{t\wedge T_0},Z_{t\wedge T_0})=M_t$ est une martingale pour toute mesure $\hat{P}^{\hat{x}}$ ($\hat{x}\in\hat{E}$).

En effet, on vérifie comme dans l'exposé I que $M_t=E[f(Y_{T_0})|\underline{\underline{F}}_t]$.

Nous démontrons maintenant quelques résultats analytiques.

LEMME 5. Supposons f bornée, et posons $f_t=f(.,t)=Q_tf$.

a) Pour tout x, la fonction f(x,.) est $\underline{\underline{C}}^\infty$ sur $]0,\infty[$, la fonction $D_{\rightarrow}^n f(.,.)$ est uniformément bornée sur $E\times[a,\infty[$, pour tout n et tout a>0, et l'application $t\longmapsto D_{\rightarrow}^n f(.,t)$ est continue pour la convergence uniforme.

b) Pour tout t>0, f_t appartient à $\underline{\underline{D}}(B)$ et à $\underline{\underline{D}}(A)$, et on a

$$Bf_t = D_{\rightarrow}f(.,t) \qquad , \quad Af_t = -D_{\rightarrow}^2 f(.,t)$$

c) Supposons que f appartienne à $\underline{\underline{D}}(A)$, avec $Af=g$ bornée. Alors $f\in \underline{\underline{D}}(B)$, et il existe $h\in\underline{\underline{D}}(B)$ telle que $Bf=h$, $Bh=-g$.

DEMONSTRATION. Nous partons de la formule $Q_t = \int P_s m_t(s)ds$, que nous dérivons en t ; il vient $D_t^n Q_t f = \int_0^\infty P_s f\, m_t^{(n)}(s)ds$, où $\int |m_t^{(n)}(s)|ds$ est borné pour $t\geq a$. La partie a) ne demande que des vérifications de calculs.

Pour la partie b), on remarque que $m_t(.)$ est une bonne fonction $\underline{\underline{C}}^\infty$, infiniment plate à l'origine, d'où l'on déduit sans peine que

$$AQ_t f = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(P_h - I)Q_t f = \int_0^\infty -P_s f . D_s m_t(s)ds$$

Mais $D_s m_t(s) = D_t^2 m_t(s)$, d'où l'on déduit que $AQ_t f = -D_{\to}^2 Q_t f$. L'assertion relative à B est encore plus facile.

Passons à c). Pour tout x, la fonction $f(x,.)$ est deux fois dérivable sur $]0,\infty[$, avec une dérivée seconde égale à $-Af_t(x) = -Q_t g(x)$. La dérivée première vaut alors

$$h(x,t) = D_{\to} f(x,t) = D_{\to} f(x,1) + \int_1^t Q_s g\, ds$$

Comme g est bornée , $\int_0^1 Q_s |g| ds$ est bornée, et $h(x,.)$ a une limite bornée $h(x,0)=h(x)$ lorsque $t\to 0$ [il faut remarquer à cet égard que la condition que $U_p|g|$ soit bornée, dans la définition 1, ne joue pas un rôle naturel ici]. La relation $h_{s+t} = Q_t h_s$ passe à la limite lorsque $s\to 0$, par convergence dominée, et nous donne $h_s = Q_s h$. Pour chaque x, nous avons $f(x,t) = f(x,\varepsilon) + \int_\varepsilon^t h(x,s)ds$; lorsque $\varepsilon\to 0$, nous avons $f(x,t) = f(x) + \int_0^t h(x,s)ds = f(x) + \int_0^t Q_s h(x)ds$, exprimant que $f\in\underline{\underline{D}}(B)$ et $Bf=h$, tandis que la relation $D_t h(x,t) = -Q_t g(x)$ exprime que $h\in\underline{\underline{D}}(B)$ et $Bh=-g$.

La partie c) du lemme précédent est une manière d'exprimer la relation "$B=\sqrt{-A}$" que nous avons déjà rencontrée à propos des semi-groupes de convolution.

Il nous faut maintenant calculer le générateur $\hat{A}$, et donner un sens à la relation formelle " $\hat{A} = A_x + D_t^2$ " . Faute d'une formulation agréable, nous allons avoir à démontrer cette relation dans trois situations différentes ! La première :

LEMME 6. Si u appartient à $\underline{\underline{D}}(A)$, v à $\underline{\underline{D}}(\Delta)$, le générateur du mouvement brownien horizontal, la fonction $u\otimes v$: $(x,t)\mapsto u(x)v(t)$ appartient à $\underline{\underline{D}}(\hat{A})$, et l'on a

(28) $$\hat{A}(u\otimes v) = u\otimes\Delta v + Au\otimes v$$

(si v est dans $\underline{\underline{C}}_b^2(\mathbb{R})$, on peut bien entendu écrire explicitement le générateur Δv comme la dérivée seconde).

DEMONSTRATION. Posons $Au=f$, $\Delta v=g$, $u\otimes g+f\otimes v = h$. Comme u et v sont bornées par hypothèse (cf. définition 1), nous avons $|h| \leq K(1\otimes|g| + |f|\otimes 1)$, où K est une constante, donc $\hat{U}_p h(x,t) \leq K(U_p|f|(x)+U_p^{\rightarrow}|g|(t))$ est bornée. Montrons que, si l'on pose $U_t=u\circ Y_t$, $V_t=v\circ Z_t$, le processus

$$U_tV_t - \int_0^t h(Y_s,Z_s)ds$$

est une martingale , ce qui équivaut à la relation $\hat{A}(u\otimes v)=h$. Pour prouver cela, posons $F_t=\int_0^t f\circ X_s ds$, $G_t=\int_0^t g\circ Z_s ds$, $M_t=U_t-F_t$, $N_t=V_t-G_t$. Alors

$$U_tV_t = (M_t+F_t)(N_t+G_t) = M_tN_t + M_tG_t+F_tN_t+F_tG_t$$

M,N sont des martingales <u>indépendantes</u> pour toute mesure $\mathbb{P}^{\hat{x}}$, leur produit est une martingale. F et G sont des processus à variation finie continus. Nous appliquons la formule d'intégration par parties

$$d(UV) =\{d(MN)+G_-dM+F_-dN\} +\{M_-dG+F_-dG+N_-dF+G_-dF\} +\{d[M,G]+d[F,N]+d[G,F]\}$$

comme F et G sont continus, on peut enlever les - partout, les [ ] sont tous nuls, et il reste seulement

$$d(UV) = \{d(MN)+GdM+FdN\} + \{UdG+VdF\}$$

le premier { } est une martingale, et le second vaut $u(Y_t)g(Z_t)dt+v(Z_t)f(Y_t)dt = h(Y_t,Z_t)dt$. C'est ce qu'on cherchait.

COROLLAIRE. <u>Si (P_t) admet un opérateur carré du champ, il en est de même de $(\hat{P}_t)$.</u>

En effet, l'algèbre formée par les combinaisons linéaires finies de fonctions de la forme $u\otimes v$, où u parcourt $\underline{\underline{D}}(A)$ et v parcourt $\underline{\underline{C}}_c^\infty(\mathbb{R})$, est une algèbre pleine contenue dans $\underline{\underline{D}}(\hat{A})$. On applique alors le th.1.

Le théorème 1 entraîne alors que le processus croissant $\langle M,M\rangle_t$ est absolument continu par rapport au processus croissant t. Nous pouvons préciser un peu.

THEOREME 3. <u>Si (P_t) admet un opérateur carré du champ, il existe une fonction positive</u> g <u>telle que</u> (notations du lemme 1, f bornée)

$$\langle M,M\rangle_t = \int_0^{t\wedge T_0} 2g(Y_s,Z_s)ds \tag{29}$$

<u>Même si (P_t) n'admet pas d'opérateur carré du champ, on peut affirmer que</u>

$$\langle M,M\rangle_t \geqq 2\int_0^{t\wedge T_0} (D_{\rightarrow}f(Y_s,Z_s))^2 ds \tag{30}$$

DEMONSTRATION. Le processus arrêté $W_t=(Y_{t\wedge T_0},Z_{t\wedge T_0})$ est un processus de Markov, pour lequel f est une fonction invariante. La martingale $(f(W_t)-f(W_0))$ est une fonctionnelle additive, le processus croissant associé $\langle M,M\rangle_t$ est une fonctionnelle additive, d'après le théorème de MOTOO déjà utilisé dans la démonstration du théorème 1, la continuité absolue de $d\langle M,M\rangle_t$ par rapport à dt entraîne alors l'existence d'une densité que l'on peut noter $2g(W_t)$. Comme $\langle M,M\rangle$ ne croît plus après T_0 , g est nulle au bord, et on a (29).

Pour établir (30), tout revient à prouver

$$(31) \qquad \langle M,Z\rangle_t = \int_0^{t\wedge T_0} 2D_\rightarrow f(Y_s,Z_s)ds$$

En effet, la projection de M sur Z est l'intégrale stochastique $L = \int_0^t H_s dZ_s$, où H est une densité de $d\langle M,Z\rangle_t$ par rapport à $d\langle Z,Z\rangle_t=2dt$. (31) nous dit que $H_s=D_\rightarrow f(Y_s,Z_s)I_{\{s\leq T_0\}}$. Comme L est une projection de M, on a $d\langle M,M\rangle_t \geqq d\langle L,L\rangle_t = H_t^2 d\langle Z,Z\rangle_t = 2H_t^2 dt$, c'est à dire (30).

Mais nous n'allons pas tout de suite établir (31) : nous allons avoir besoin d'un second lemme du type du lemme 6, avec des hypothèses d'ailleurs peu naturelles - et même, en vue de la suite, d'un troisième lemme du même type (énoncé comme seconde partie du lemme 7).

LEMME 7. <u>Soit</u> $u(x,t)$ <u>une fonction bornée sur</u> $E\times\mathbb{R}$. <u>On suppose que pour</u> t <u>fixé</u> $u_t = u(.,t)$ <u>appartient à</u> $\underline{\underline{D}}(A)$, <u>et que pour</u> x <u>fixé</u> $u_x=u(x,.)$ <u>appartient à</u> $\underline{\underline{C}}_b^2(\mathbb{R})$, <u>et on pose</u>

$$A_x u(x,t) = a(x,t) \qquad , \quad D_t^2 u(x,t) = b(x,t)$$

<u>Faisons les hypothèses suivantes</u> :

1) b <u>est uniformément bornée</u>, b_t <u>est finement continue pour tout</u> t, <u>et l'application</u> $t \mapsto b_t$ <u>est continue pour la convergence uniforme</u>.

2) a <u>est uniformément bornée</u>, <u>et pour tout</u> t a_t <u>est finement continue sur</u> E .

<u>Alors</u> u <u>appartient à</u> $\underline{\underline{D}}(\hat{A})$ <u>et l'on a</u> $\hat{A}u = a+b$.

<u>Si l'on sait que</u> $u\in D(\hat{A})$, <u>l'hypothèse</u> 1) <u>suffit à elle seule à entraîner que</u> $\hat{A}u = a+b$ <u>presque partout pour la mesure</u> $\xi\otimes dt$.

DEMONSTRATION. Nous utiliserons deux résultats "classiques" :

a) Si $\frac{1}{t}(\hat{P}_t u-u)$ converge partout vers une fonction ℓ, en restant bornée, alors $u\in\underline{\underline{D}}(\hat{A})$ et $\hat{A}u=\ell$.

b) Inversement, si $u\in\underline{\underline{D}}(\hat{A})$ et $\hat{A}u=\ell$, $\frac{1}{t}(\hat{P}_t u-u)= \frac{1}{t}\int_0^t \hat{P}_s \ell ds$ converge vers ℓ hors d'un ensemble de potentiel nul , donc négligeable pour la mesure invariante $\xi\otimes dt$. Ce dernier résultat est un théorème ergodique local, dû à Mokobodzki (séminaire IV, Lecture notes n°124). Je pense qu'on peut le remplacer par des résultats mieux connus, en vue de l' application que nous en ferons.

Nous écrivons maintenant au point (x,r)

$$\hat{P}_t((x,r),.) = P_t(x,.)\otimes P_t^{\rightarrow}(r,.)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}(\hat{P}_t u-u) &= \frac{1}{t}\int (u(y,s)-u(x,r))P_t(x,dy)P_t^{\rightarrow}(r,ds)\\ &= \frac{1}{t}\int [(u(y,r)-u(x,r))+(u(y,s)-u(y,r))]P_t(x,dy)P_t^{\rightarrow}(r,ds)\\ &= \frac{1}{t}\int_0^t P_h(x,dy)a(x,r) + \int P_t(x,dy)\,\frac{1}{t}\int_0^t P_h^{\rightarrow}(r,ds)b(y,s)\end{aligned}$$

Dans la dernière expression, en raison de la continuité de $s\longmapsto b_s$ pour la convergence uniforme, nous ne changeons pas les limites inf ou sup en remplaçant $b(y,s)$ par $b(y,r)$, et il nous reste donc

$$\lim {}^{\inf}_{\sup} \frac{1}{t}(\hat{P}_t u-u) = \lim {}^{\inf}_{\sup} \left[\frac{1}{t}\int_0^t P_h(x,dy)a(x,r) + \int P_t(x,dy)b(y,r) \right]$$

En raison de l'hypothèse 1), b_r est finement continue, et le dernier terme converge vers $b(x,r)$, en restant borné par la norme de b. Si a_r est finement continue, on a le même résultat pour le premier terme du second membre, $(\hat{P}_t u-u)/t$ converge partout vers $a+b$ en restant borné, et on a la première conclusion du lemme.

Si l'**hypothèse** 2) n'est pas satisfaite, on peut seulement affirmer que pour tout r fixé, le premier terme au second membre converge vers a_r hors d'un ensemble de potentiel nul pour (P_t), donc ξ-p.p.. Par le théorème de Fubini, on a alors convergence p.p. pour $\xi\otimes dt$, et la seconde conclusion.

REMARQUE. Il y a une pathologie des produits de semi-groupes, dont l'étude est délicate : par exemple, dans le produit de deux semi-groupes de translation uniforme sur $\mathbb{R}$, la diagonale n'est pas de potentiel nul pour le produit, mais toutes ses coupes sont de potentiel nul pour les facteurs.

Du lemme 7, nous déduisons d'abord (31). Soit f bornée sur le "bord" et soit

$$u(x,t)=f(x,t)\varphi(t)$$

où φ appartient à $\underline{\underline{C}}_b^3(\mathbb{R})$, avec un support contenu dans $[c,\infty[$, $c>0$. Il est facile de déduire du lemme 5 que u satisfait aux hypothèses 1) et 2) du lemme 7. Si nous posons $\hat{A}h=r$, nous avons

$$(32)\quad r(x,t) = A_x f(x,t)\varphi(t) + (D_t^2 f(x,t)\varphi(t)+2D_t f(x,t)D_t\varphi(t)+f(x,t)D_t^2\varphi(t))$$

Mais on a $A_x f(x,t)+D_t^2 f(x,t)=0$, et il ne reste que les deux derniers termes. Le processus $h(Y_t,Z_t)-\int_0^t r(Y_s,Z_s)ds$ est une martingale. Prenant

$\varphi(t)=t$ pour $t\in[2c,1/c]$, on voit que le processus

$$M_tZ_t - \int_0^t 2D_{\rightarrow}f(Y_s,Z_s)ds$$

arrêté au temps $T_{2c}\wedge T_{1/c}$, est une martingale, donc $\langle M,Z\rangle_t = \int_0^t 2D_{\rightarrow}f()ds$ jusqu'à cet instant. Après quoi on fait tendre c vers 0 et on a (31).

Voici le résultat final de cet exposé. Nous supposons que (P_t) admet un opérateur carré du champ Γ ; la fonction $f_t=f(.,t)$ appartient à $\underline{\underline{D}}(A)$ d'après le lemme 5, donc nous pouvons définir $\Gamma(f_t,f_t)$. D'après le lemme 5 aussi , $D_{\rightarrow}f(x,t)$ est une brave fonction pour $t>0$.

THEOREME 4. <u>Supposons que</u> (P_t) <u>admette un opérateur carré du champ</u> Γ . <u>Soit</u> M_t <u>la martingale</u> $f(Y_{t\wedge T_0},Z_{t\wedge T_0})$, <u>où</u> f <u>est le prolongement harmonique d'une fonction bornée sur le bord</u>. <u>Alors pour tout</u> $N>0$ <u>le processus croissant</u> $\langle M,M\rangle_t$ <u>est</u> P^{ξ_N} <u>indistinguable du processus</u>

$$2\int_0^{t\wedge T_0} g(Y_s,Z_s)ds \tag{33}$$

<u>où</u> g <u>est la fonction</u>

$$g(x,t) = \Gamma_x(f_t,f_t) + (D_{\rightarrow}f(x,t))^2 \tag{34}$$

DEMONSTRATION. Soit φ une fonction de $\underline{\underline{C}}_b^3(\mathbb{R})$, à support dans $[c,\infty[$, égale à 1 sur $[2c,+\infty[$ ($c>0$), et soit u la fonction

$$u(x,t) = f(x,t)\varphi(t)$$

Nous avons déjà vu que $u\in\underline{\underline{D}}(\hat{A})$, et nous avons calculé $\hat{A}u$ dans la formule (32). Dans $E\times[2c,\infty[$, nous avons

$$\hat{A}u(x,t) = D_t^2f(x,t) \tag{35}$$

D'autre part, nous savons que $u^2\in\underline{\underline{D}}(\hat{A})$ (corollaire du lemme 6), et les hypothèses du lemme 7, seconde partie, s'appliquent à u^2. Nous avons donc, <u>cette fois p.p. pour la mesure</u> $\xi\otimes dt$

$$\hat{A}(u^2) = A_{\uparrow}(u^2) + D_{\rightarrow}^2(u^2) = 2uA_{\uparrow}u + 2\Gamma_{\uparrow}(u,u) + 2uD_{\rightarrow}^2u + 2(D_{\rightarrow}u)^2$$

Dans $E\times[2c,\infty[$, cela se réduit (compte tenu de $A_{\uparrow}f+D_{\rightarrow}^2f=0$) à

$$\hat{A}u^2(x,t) = -2f(x,t)D_{\rightarrow}^2f(x,t) + 2\Gamma_x(f_t,f_t) + \tag{36}$$
$$+ 2f(x,t)D_{\rightarrow}^2f(x,t) + 2(D_{\rightarrow}f(x,t)) \quad p.p.$$

Ainsi, $\hat{A}u^2$ coïncide avec la fonction 2g (34) presque partout dans $E\times[2c,+\infty[$. Comme la mesure potentiel de ξ_N est absolument continue par rapport à $\xi\otimes dt$, les processus

$$u^2(Y_t,Z_t)-\int_0^t A\hat{u}^2(Y_s,Z_s)ds \quad , \quad u^2(Y_t,Z_t)-\int_0^t 2g(Y_s,Z_s)ds$$

sont indistinguables jusqu'à l'instant T_{2c} , et $u^2(Y_t,Z_t)$ peut aussi être remplacé par M_t^2 jusqu'à cet instant. D'autre part, le premier d'entre eux est une martingale, de sorte que

$$M_t^2 - 2\int_0^t g(Y_s,Z_s)ds \quad \text{arrêté à } T_{2c}$$

est une martingale pour P^{ξ_N} (plus correctement, il aurait fallu considérer P^μ, μ bornée $\leq \xi_N$, et passer à la limite). D'où (33) en faisant tendre c vers 0.

REMARQUE. M.YOR m'a signalé qu'une forme du théorème 1 figure dans l'article de H.KUNITA : absolute continuity of Markov processes and generators, Nagoya Math.J., 36, 1969, p.1-26. En fait, cet article contient aussi une version du théorème 2 (mais les deux théorèmes y sont appliqués à des problèmes très différents).

BIBLIOGRAPHIE

BENVENISTE (A.). Application de deux théorèmes de Mokobodzki à l'étude du noyau de Lévy d'un processus de Hunt sans hypothèse (L). p.1-24 . Séminaire de Strasbourg VII Lecture Notes n°321, Springer 1973

MEYER (P.A.). Une mise au point sur les systèmes de Lévy. Remarques sur l'exposé de A.Benveniste. Même réf. p.25-32.

WALSH (J.B.) et MEYER (P.A.). Quelques applications des résolvantes de Ray. Invent. Math. 14, 1971, p.143-166.

COURREGE (Ph.). Générateur infinitésimal d'un semi-groupe de convolution sur $\mathbb{R}^n$ et formule de Lévy-Khintchine. Bull.Sc.Math. 2e série, 88, 1964, p.3-30.

MEYER (P.A.). Intégrales stochastiques. Séminaire de Strasbourg I, Lecture Notes in M. n°37, Springer 1967.

KUNITA (H.) et WATANABE (S.). On square integrable martingales. Nagoya Math.J., 30, 1967, p.209-245.

HUNT (G.A.). Semigroups of measures on Lie groups. Trans. Amer.Math. Soc. 81, 1956, p.264-293.

GETOOR (R.K.). Markov processes : Ray processes and right processes. Lecture Notes in M. 440, 1975.

APPENDICE : CALCULS DANS L'ESPACE L^2

Nous supposons ici que E est localement compact, que ξ est une mesure (de Radon) invariante par le semi-groupe (P_t), et <u>que</u> (P_t) <u>admet un opérateur carré du champ</u> Γ . Nous nous proposons de reprendre certains calculs faits plus haut pour des fonctions bornées, mais cette fois dans L^2 : cela servira dans l'exposé IV.

Nous commençons par remarquer que les opérateurs P_t ou pU_p , qui sont de norme ≤ 1 dans L^1 et L^∞ , sont aussi de norme ≤ 1 dans L^2 par le théorème d'interpolation usuel (il y a aussi des démonstrations directes très simples). Si f appartient à $\underline{\underline{C}}_c$ (continue à support compact), $pU_pf \to f$ simplement lorsque $p\to\infty$, en restant dominé dans L^2 d'après le théorème ergodique maximal. Donc $pU_pf \to f$ dans L^2 , l'image de la résolvante est dense, et le semi-groupe est fortement continu sur L^2.

DEFINITION. <u>La phrase</u> " $f\in\underline{\underline{D}}_{L^2}(A)$ et $Af=g$ " <u>signifie que</u> $f\in L^2$, $g\in L^2$, <u>et que</u> $f=U_p(pf-g)$ ξ-<u>p.p. pour tout</u> $p>0$.

C'est la définition habituelle du générateur d'un semi-groupe fortement continu - ou du moins, il est classique qu'elle équivaut à la définition par la dérivation à l'origine.

Si f appartient à $\underline{\underline{D}}_{L^2}(A)$, la fonction $U_p|pf-g|$ est p-excessive, et appartient à L^2 puisque U_p applique L^2 dans lui même. Elle est donc finie ξ-p.p.. Mais une fonction p-excessive finie ξ-p.p. est finie hors d'un ensemble <u>ξ-polaire</u> , i.e. que le processus de Markov (Y_t) ne rencontre P^ξ-p.s. pas. La fonction f peut donc être définie, non seulement ξ-p.p. , mais ξ-<u>quasi-partout</u> (ξ-q.p.), ce qui permet de parler sans ambiguïté du processus $(f\circ Y_t)$, par exemple.

Soit k une fonction positive. Nous avons d'après une formule classique (cf. le lemme 1)

(37) $$E^\cdot\left[\left(\int_0^\infty e^{-ps} k\circ Y_s ds\right)^2\right] = 2U_{2p}(k.U_pk)$$

et par conséquent , comme $\xi U_{2p} = \frac{1}{2p}\xi$, et $\|U_pk\|_{L^2} \leq \frac{1}{p}\|k\|_2$

(38) $$E^\xi[\ ..] \leq \frac{1}{p^2}\|k\|_2^2$$

Nous allons maintenant faire des calculs sur les martingales. Pour se ramener au cas d'espaces de mesure finie, il sera bon de raisonner sur P^μ ($\mu\leq\xi$, bornée), puis de faire croître μ vers ξ. Mais nous négligerons cette étape dans la rédaction.

Tout d'abord, si $f\in\underline{\underline{D}}_{L^2}(A), Af=g$, nous introduirons la martingale de carré intégrable correspondant à (1) :

(39) $$C_t^{p,f}=E[\int_0^{\infty} e^{-ps}(pf-g)\circ Y_s ds\,|\,\underline{\underline{F}}_t]=e^{-pt}f\circ Y_t-\int_0^t e^{-ps}\ pf-g)\circ Y_s ds$$

dont l'existence est justifiée par (38) avec $k=|pf-g|$. Le même calcul justifie la formule

(40) $$E^{\xi}[(C_{\infty}^{p,f})^2] = 2<\xi,U_{2p}((pf-g)U_p(pf-g))> = \frac{1}{p}<\xi,(pf-g)U_p(pf-g)>$$
$$= \frac{1}{p}<\xi,(pf-g)f> = <f,f>_{\xi} - \frac{1}{p}<f,g>_{\xi}$$

ou encore

(41) $$E^{\xi}[<C^{p,f},C^{p,f}>_{\infty}] = E^{\xi}[(C_{\infty}^{p,f})^2-(C_0^{p,f})^2] = -\frac{1}{p}<f,Af>_{\xi}$$

Lorsque $p\to 0$, les variables aléatoires $C_t^{p,f}$ convergent dans L^2 vers

(42) $$C_t^f = f\circ Y_t - \int_0^t g\circ Y_s ds$$

et on a sans changement les formules (3),(4) : la martingale C^f est localement de carré intégrable, et d'après l'hypothèse d'existence d'un opérateur carré du champ nous pouvons écrire

(43) $$<C^f,C^f>_t = 2\int_0^t \Gamma_{Y_s}(f,f)ds \qquad P^{\xi}\text{-p.s.}$$

Cette formule <u>étend</u> la définition de Γ à $\underline{\underline{D}}_{L^2}(A)$, mais il faut remarquer toutefois quelques nuances : par exemple , la fonction $\Gamma_{\bullet}$ est définie aux ensembles ξ-négligeables près, non aux ensembles de potentiel nul près. Nous avons, comme précédemment

(44) $$2\Gamma(f,f) = Af^2 - 2fg \qquad (g=Af)$$

Revenons à la formule (41) : elle s'écrit compte tenu de (4)

$$< \xi,2U_{2p}\Gamma(f,f) > \quad = -\frac{1}{p} <f,Af>_{\xi}$$

ou encore

(45) $$< \xi,\ \Gamma(f,f)> = -<Af,f>_{\xi}$$

Cette formule est vraie en toute généralité, sans symétrie. De même, il est vrai en toute généralité que si f appartient à $\underline{\underline{D}}_{L^2}(A)$, alors f appartient à $\underline{\underline{D}}_{L^2}(B)$, où B est le générateur de (Q_t), Bf appartient à $\underline{\underline{D}}_{L^2}(B)$, et $B^2f=-Af$: pour voir cela on peut adapter la démonstration donnée plus haut ou - dans le cas symétrique - utiliser la décomposition spectrale. Ainsi , $-<Af,f> = <B^2f,f>$. <u>Dans le cas symétrique</u> , cela peut s'écrire

(46) $$< \xi,\ \Gamma(f,f)> = <Bf,Bf>_{\xi}$$

où $\|\Gamma(f,f)\|_1 = \|Bf\|_2^2$. Cette formule est étroitement liée à la théorie de l'espace de Dirichlet, pour laquelle on consultera les travaux de DENY, FUKUSHIMA, ou l'ouvrage récent de SILVERSTEIN (Symmetric Markov Processes, Lecture Notes n° 426).