Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Albert Benveniste

# Processus stationnaires et mesures de Palm du flot spécial sous une fonction

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 9 (1975), p. 97-153
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__97_0>

# PROCESSUS STATIONNAIRES ET MESURES DE PALM DU FLOT SPECIAL SOUS UNE FONCTION

par A. BENVENISTE (avec J.JACOD pour le §6)

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,P)$ un flot filtré. Le §2 de ce travail est consacré à l'exposition du théorème de représentation des flots propres, dû à Ambrose et Kakutani (cf. AMBROSE(1), AMBROSE-KAKUTANI(2)), comme flots spéciaux sous une fonction; on sait, depuis HANEN(10), que cette notion est étroitement liée à celle de processus ponctuel discret stationnaire; nous apportons à cette occasion une légère modification à la notion classique de flot sous une fonction, qui permet d'en améliorer les propriétés.

Le §3, à côté d'un ou deux résultats nouveaux (qui figurent d'ailleurs indépendamment dans (9)), est essentiellement consacrée à une exposition raccourcie du chapitre V de LAZARO-MEYER(14), et des résultats obtenus par GEMAN-HOROWITZ(8,9). On montre que les projections prévisible et bien-mesurable d'un processus stationnaire sont stationnaires; on montre de même que les projections duales prévisible et bien-mesurable d'une hélice croissante (on dit aussi "fonctionnelle additive") sont des hélices croissantes; nous rappelons à cette occasion comment LAZARO et MEYER en déduisent que l'on peut considérer le flot $(\theta_t)$ comme processus de Markov à valeurs dans $(\Omega,\underline{\underline{F}}_0)$. Nous utilisons la notion de mesure de Palm d'une hélice croissante (notion dûe à MECKE(15)) telle qu'elle est introduite dans GEMAN-HOROWITZ(8): si $Z$ est une hélice croissante, sa mesure de Palm est définie par $\mu(f)=E\int_0^1 f\circ\theta_u dZ_u$; cette notion est l'analogue des mesures associées aux fonctionnelles additives par AZEMA(3) en théorie des processus de Markov. Nous montrons qu'une mesure positive bornée sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ est la mesure de Palm d'une hélice croissante si et seulement si elle ne charge pas les ensembles polaires (un ensemble est polaire s'il n'est p.s. jamais rencontré par les trajectoires du flot). Ce résultat est prouvé indépendamment dans GEMAN-HOROWITZ(9) à l'aide d'une tout autre méthode que celle exposée ici; Geman et Horowitz introduisent pour cela la notion de fonction excessive: $f$ est excessive sur $\Omega$ si le processus $(e^{-t}f\circ\theta_t)$ est un potentiel sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,P)$; cette notion est évidemment intéressante en soi. Geman et Horowitz associent à toute fonction excessive $f$ sa mesure de Revuz $Q^f$ définie par $Q^f(g) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} E(g;f-e^{-t}f\circ\theta_t)$, où $g$ est $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable sur $\Omega$; ils montrent que la mesure de Revuz de $f$ donne à l'aide d'une formule simple la mesure de Föllmer du potentiel $(e^{-t}f\circ\theta_t)$, et que ce potentiel est de la classe (D) si et seulement si la mesure $Q^f$ ne charge pas les ensembles polaires. Par rapport au travail de Genan et Horowitz, nous apportons une présentation différente, et une

CONStruction directe de la mesure de Revuz qui ne fait pas appel aux résultats difficiles de FÖLLMER(7).

Le reste du travail, qui comporte l'essentiel des résultats nouveaux, est consacré à l'étude des processus ponctuels discrets stationnaires $N=(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,N_t,P)$, où $(\underline{\underline{F}}_t)$ est une filtration dont on exige seulement qu'elle rende le processus ponctuel N adapté; nous utilisons la représentation de N comme flot sous une fonction, comme décrit au §2, voici brièvement de quoi il s'agit. Soit $(X,\underline{\underline{X}},\mu)$ un espace mesuré fini, S un automorphisme de cet espace, et V une fonction $\geq 0$ sur X, telle que $\mu(V)=1$; l'espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est alors défini comme suit: on prend pour $\Omega$: $\Omega=\{ (x,u)\in X\times\mathbb{R}, 0<u\leq V(x) \}$ (on prend d'habitude $0\leq u<V(x)$), $\underline{\underline{F}}$ et P sont les restrictions respectives à $\Omega$ de la tribu $\underline{\underline{X}}\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$ et de la mesure $\mu\otimes dt$ (dt: mesure de Lebesgue). Le flot $(\theta_t)$ est défini de la façon suivante: pour $0\leq t\leq V(x)$, $\theta_t(x,u) =(x,t+u)$, puis $\theta_{V(x)-u+\varepsilon}(x,u)=(Sx,\varepsilon)$, et ainsi de suite; le processus N est alors le processus qui compte les passages de la trajectoire $t \to \theta_t\omega$ sur le graphe $[\![V]\!]$ de V. On munit X de la famille de tribus croissante $(\underline{\underline{X}}_t)$ qui est à peu de choses près la restriction à X de la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ définie sur $\Omega$. Heuristiquement, l'objet des §4 et 5 est de montrer que l'étude des phénomènes stationnaires sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,P)$ se ramène à la théorie générale des processus sur $(X,\underline{\underline{X}}_t,\mu)$, ce qui fait de cet espace une sorte de "générateur infinitésimal" du flot.

Ainsi, à toute fonction f définie sur $\Omega$, on associe le processus $(f_u)$ sur X par la formule $f_u(x) =f(x,u)$ si $0<u\leq V(x)$, $=0$ si $u>V(x)$; on montre alors que le processus stationnaire $(f\circ\theta.)$ est prévisible (resp. bien-mesurable) sur $\Omega$, si et seulement si le processus $(f_u)$ l'est sur X. De la même façon, à toute hélice croissante Z définie sur $\Omega$, on associe un processus croissant $A^Z$ sur X qui"engendre" Z; on a alors les mêmes résultats de mesurabilité que pour les processus stationnaires. Le résultat principal, qui est la clé de toute la suite, est le théorème (4.5), qui affirme que la mesure de Palm de Z n'est autre que la mesure associée au processus croissant $A^Z$.

De ces résultats, et du théorème d'Ambrose-Kakutani, on déduit pour les flots propres un théorème de section des ensembles aléatoires stationnaires par les processus ponctuels. On en déduit ensuite une caractérisation des ensembles polaires pour un flot quelconque: un ensemble est polaire si et seulement s'il n'est chargé par aucune mesure de Palm (ce dernier résultat est obtenu beaucoup plus élégamment par GEMAN-HOROWITZ(9), qui n'obtiennent pas en revanche la section par les processus ponctuels car ils ne s'occupent pas des flots propres).

Le §5 débute par un résultat qui affirme que la projection prévisible (resp. bien-mesurable) du processus stationnaire $(f\circ\theta.)$ est le processus $({}^3f\circ\theta.)$ (resp. $({}^1f\circ\theta.)$), le processus $({}^3f_u)$ (resp. $({}^1f_u)$) étant la projection prévisible (resp. bien-mesurable) du processus $(f_u)$ sur $(X,\underline{\underline{X}}_t,\mu)$; on a un résultat analogue pour les hélices croissantes Z et les processus croissants $A^Z$ qui les engendrent. Le reste du §5 est une variation sur ce thème; on montre les liens qui existent entre les fonctions excessives et leur mesure de Revuz d'une part, et les surmartingales sur X et leur mesure de Föllmer d'autre part; puis, on relie les hélices-martingales sur $\Omega$, et les martingales sur $(X,\underline{\underline{X}}_t,\mu)$ qui sont nulles à l'origine.

Le §6 est une application des résultats précédents à l'étude des processus ponctuels stationnaires munis de la filtration qu'ils engendrent sur $\Omega$. Les résultats de CHOU-MEYER(4) et JACOD(12), joints à l'étude faite aux paragraphes précédents, donnent les résultats suivants: une forme explicite de l'intensité stochastique du processus ponctuel (obtenue pour la première fois, semble-t-il, par PAPANGELOU(19)), et un théorème de représentation des hélices-martingales du processus ponctuel.

Le reste du paragraphe est consacré à l'étude du problème inverse: peut-on reconstruire le processus ponctuel à partir de son intensité stochastique? Contrairement à ce qui se passe pour les processus ponctuels non stationnaires sur $\mathbb{R}_+$ (cf.JACOD(12)) la réponse n'est pas affirmative en général. Les difficultés que l'on rencontre sont de deux types. Le premier est bien connu pour les processus de renouvellement: la loi qui définit le processus doit être de moyenne finie; dans le cas général, on obtient une condition analogue. La "vraie" difficulté est en fait tout autre: à toute intensité stochastique, on associe un noyau markovien sur $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, et l'on montre que cette seconde difficulté peut être surmontée si et seulement si ce noyau admet une mesure invariante. Finalement, il ressort que le problème de la reconstruction d'un processus ponctuel stationnaire à partir de son intensité stochastique est l'analogue de la recherche des mesures invariantes d'une chaîne de Markov à temps discret. Les résultats de ce paragraphe ont été obtenus conjointement avec J.Jacod.

Pour terminer, disons que, malgré la vogue certaine dont jouissent ces espaces, nous nous sommes interdit l'usage des espaces de BLACKWELL, ce qui ne rend pas les démonstrations plus compliquées pour autant.

## §1: Notations et généralités.

Considérons un flot filtré $(\Omega,\underline{\underline{A}},\underline{\underline{A}}_t,\theta_t,P)$, où

(i) $(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe d'automorphismes de l'espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{A}},P)$, tel que l'application $(t,\omega)\to\theta_t\omega$ soit mesurable de $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\otimes\underline{\underline{A}}$ dans $\underline{\underline{A}}$;

(ii) le flot $(\theta_t)$ filtre la famille croissante de tribus $(\underline{\underline{A}}_t)_{t\in\mathbb{R}}$, ce qui signifie que l'on a $\underline{\underline{A}}_{t+s}=\theta_t^{-1}\underline{\underline{A}}_s$.

Malgré ce qu'elles laissent supposer, ces notations désignent des tribus <u>non complétées</u> en général, tandis que la P-complétée de $\underline{\underline{A}}$ sera notée $\overline{\underline{\underline{A}}}$, etc... Les hypothèses faites confèrent au flot considéré les propriétés suivantes:

(iii) le flot est "continu dans $L^1$": pour tout $f\in L^1(P)$, $\|f\circ\theta_t-f\|_{L^1}\to 0$ lorsque $t\to 0$; en conséquence, la famille complétée $(\overline{\underline{\underline{A}}}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est continue à droite;

(iv) le flot satisfait aux théorèmes ergodiques "local" et "global": si $h\in L^1$, $\frac{1}{t}\int_0^t h\circ\theta_u du$ converge p.s. et dans $L^1$ vers $h$ lorsque $t\to 0$, et vers $E(h|\underline{\underline{I}})$ lorsque $t\to+\infty$, où $\underline{\underline{I}}$ désigne la tribu formée des éléments de $\underline{\underline{A}}$ qui sont invariants par le groupe $(\theta_t)$.

Nous dirons qu'un processus $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\otimes\underline{\underline{A}}$-mesurable $Y$ est <u>stationnaire</u> s'il satisfait identiquement à la relation $Y_{t+s}=Y_t\circ\theta_s$ pour tout couple de réels $(s,t)$. Nous dirons qu'un processus $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\otimes\overline{\underline{\underline{A}}}$-mesurable $\overline{Y}$ est <u>grossièrement stationnaire</u> si l'on a, pour tout couple de réels $(s,t)$, $P(\overline{Y}_{t+s}\neq\overline{Y}_t\circ\theta_s)=0$.

On appelle <u>hélice</u> tout processus $Z$, $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\otimes\underline{\underline{A}}$-mesurable, nul en 0, dont les trajectoires sont continues à droite, et qui satisfait identiquement à la relation $Z_{t+u}-Z_{s+u}=(Z_t-Z_s)\circ\theta_u$ pour tous $s,t,u\in\mathbb{R}$. Nous dirons qu'une hélice $N$ est un <u>compteur</u> si elle est croissante, purement discontinue à sauts unité, et si, pour tout $\omega$, l'ensemble des réels $t$ tels que $N_{t-}(\omega)\neq N_t(\omega)$ est sans point d'accumulation sur $\mathbb{R}$. Toutes les hélices croissantes satisfont au théorème ergodique: $\frac{1}{t}Z_t$ converge p.s. vers $E(Z_1|\underline{\underline{I}})$ lorsque $t\to+\infty$; on peut en déduire le résultat suivant:

(v) si $N$ est un compteur, soit $\Omega^N$ l'ensemble des $\omega$ tels que l'on ait $N_{t-}(\omega)\neq N_t(\omega)$ pour des $t$ arbitrairement voisins de $\pm\infty$; $\Omega^N$ est clairement invariant par le flot, et nous verrons plus tard que $\Omega^N\in\underline{\underline{A}}$, d'où $\Omega^N\in\underline{\underline{I}}$; le théorème ergodique permet alors d'affirmer que, pour p.s. tout $\omega\notin\Omega^N$, on a $N_t(\omega)=0$ pour tout $t$.

Enfin, on appelle <u>hélice grossière</u> tout processus $\overline{Z}$, $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\otimes\overline{\underline{\underline{A}}}$-mesurable, p.s. nul en 0 et continu à droite, satisfaisant à $P(\overline{Z}_{t+u}-\overline{Z}_{s+u}\neq(\overline{Z}_t-\overline{Z}_s)\circ\theta_u)=0$ $\forall s,t,u\in\mathbb{R}$.

Voici un premier résultat technique, dû à LAZARO-MEYER(14):

(1.1) LEMME: (a) Toute hélice grossière est indistinguable d'une hélice; de plus, si $\overline{Z}$ est une hélice grossière p.s. croissante et adaptée à la famille complétée $(\overline{\underline{\underline{A}}}_t)$, on peut la remplacer par une hélice croissante $Z$ satisfaisant à: il existe un ensemble $H$, $\underline{\underline{A}}_{\infty}$-mesurable et invariant, tel que la restriction à $H$ de $Z$ satisfasse à $Z_t - Z_{t-u} \in \underline{\underline{A}}_{t+}$ $\forall t, \forall u \geq 0$.

(b) Tout processus grossièrement stationnaire et p.s. continu à droite (ou à gauche) est indistinguable d'un processus stationnaire; si, de plus, le processus grossièrement stationnaire considéré est adapté à la famille complétée $(\overline{\underline{\underline{A}}}_t)$, on peut en choisir une version de la forme $(f \circ \theta.)$, où $f$ appartient à $\underline{\underline{A}}_{0+}$ si le processus initial était continu à droite, et à $\underline{\underline{A}}_0$ s'il était continu à gauche.

DEMONSTRATION: (a) figure explicitement avec une démonstration simple dans LAZARO-MEYER(14); (b) y figure de façon assez cachée, et nous allons donc en donner une démonstration directe; nous traiterons en fait seulement le cas "continu à gauche et adapté", en donnant quelques indications pour les autres cas. L'auteur remercie ici P. A. MEYER de lui avoir signalé une grave erreur dans la première rédaction.

Soit donc $X$ un processus grossièrement stationnaire p.s. continu à gauche, et adapté à la famille $(\overline{\underline{\underline{A}}}_t)$; nous commençons par remplacer $X$ par un processus p.s. continu à gauche, $\underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-mesurable et adapté à la famille non complétée $(\underline{\underline{A}}_{t+})$ (je ne connais pas de moyen simple pour démontrer cela, mais c'est classique: $X$ est prévisible relativement à la famille complétée $(\overline{\underline{\underline{A}}}_t)$, et est donc indistinguable d'un processus "algébriquement" prévisible par rapport à la famille non complétée, qui satisfait par conséquent aux meilleures propriétés de mesurabilité ci-dessus). Nous notons encore $X$ le nouveau processus ainsi obtenu, qui est évidemment encore grossièrement stationnaire. L'ensemble des $\omega$ tels que $t \longrightarrow X_t(\omega)$ ne soit pas continu à gauche est P-plein, il existe donc un ensemble $M \in \underline{\underline{A}}$ tel que $P(M)=1$, et que, pour tout $\omega \in M$, la trajectoire $t \longrightarrow X_t(\omega)$ soit continue à gauche. Posons alors, pour $s > 0$

$$X_t^s(\omega) = \frac{1}{s}\int_{-s}^{0} X_t(\theta_u \omega)\, du \;;$$

le processus $X^s$ ainsi défini est adapté à la famille $(\underline{\underline{A}}_t)$, et l'on a

$$X_{t+v}^s(\omega) = \frac{1}{s}\int_{-s}^{0} X_{t+v}(\theta_u \omega)\, du, \qquad X_t^s(\theta_v \omega) = \frac{1}{s}\int_{-s+v}^{v} X_t(\theta_u \omega)\, du \;.$$

LEMME: $X^s$ est stationnaire en dehors d'un ensemble invariant P-négligeable.

Pour tout couple de réels $(u,v)$, on a $X_{t+u} = X_t \circ \theta_u$ P-p.s.; grâce à la bimesurabilité du flot et du processus $X$, il vient par Fubini que

$\exists\, U \in \underline{\underline{A}}$, $P(U)=1$, tel que $\forall \omega \in U$, $(\, (t,u), X_{t+u}(\omega) \neq X_t \circ \theta_u(\omega)\, )$ soit Lebesgue-négligeable.

Soit donc $\omega \in U$, il existe $T_\omega \in \underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$, plein pour la mesure de Lebesgue, tel que $\forall t \in T_\omega$,

(vi) $X_{t+u}(\omega)=X_t(\theta_u\omega)$ p.p.u, d'où $\int_s^{s'} X_{t+u}(\omega)du = \int_s^{s'} X_t(\theta_u\omega)du \quad \forall s,s'$;

soit donc $\omega\in U$, et soient $t$ et $t+v$ appartenant à $T_\omega$; on a

$$\text{(vii)} \quad X_t^s(\theta_v\omega) = \frac{1}{s}\int_{-s+v}^{v} X_t(\theta_u\omega)du = \frac{1}{s}\int_{-s+v}^{v} X_{t+u}(\omega)du$$
$$= \frac{1}{s}\int_{-s}^{0} X_{t+v+u}(\omega)du = \frac{1}{s}\int_{-s}^{0} X_{t+v}(\theta_u\omega)du = X_{t+v}^s(\omega) \quad ,$$

où les égalités 2 et 4 résultent de (vi). L'ensemble $((v,\omega),\theta_v\omega\in M)$ est $\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-mesurable et plein pour la mesure produit $dt\otimes P$ (dt: mesure de Lebesgue), une application de Fubini donne alors:

soit $V=(\omega,\theta_v\omega\in M$ p.p.v); alors, $P(V)=1$; par ailleurs, $V$ est invariant.

On a alors

$\forall\omega,\forall t$, $v \longrightarrow X_t^s(\theta_v\omega)$ est continu; $\forall\omega\in V,\forall t$, $v \longrightarrow X_{t+v}^s(\omega)$ est continu à gauche.

Soit $\omega\in U\cap V$, $t\in T_\omega$; (vii) donne par continuité à gauche $X_t^s(\theta_v\omega)=X_{t+v}^s(\omega)$ $\forall v$; puis, fixant v, on obtient, toujours par continuité à gauche,

pour tout $\omega\in U\cap V$, $X_t^s(\theta_v\omega)=X_{t+v}^s(\omega)$ $\forall t,v$.

Mais, $U\cap V$ n'est pas invariant, et il nous faut travailler un peu plus. POsons alors $V'=(\omega,\theta_u\omega\in U$ p.p.u), $V'$ est invariant, et $P(V')=1$ par Fubini. Soit $\omega\in V\cap V'$, et soit $u$ tel que $\theta_u\omega\in U\cap V$; appliquons la formule ci-dessus en remplaçant $\omega$ par $\theta_u\omega$, $v$ par $v-u$; il vient $X_t^s(\theta_v\omega)=X_{t+v-u}^s(\theta_u\omega)$ $\forall v,t$; mais, cette relation est vraie p.p. u, et l'on peut faire tendre $u$ vers 0 en décroissant, grâce à la bicontinuité à droite de $(v,v') \longrightarrow X_{t-v}^s(\theta_{v'}\omega)$ pour $\omega\in V$; on obtient finalement

pour tout $\omega\in V\cap V'$, $X_t^s(\theta_v\omega) = X_{t+v}^s(\omega)$ $\forall v,t$ ;

le lemme est donc montré: si nous posons $H^s=V\cap V'$, la restriction de $X^s$ à $H^s$ est stationnaire. Posons $H=\bigcap_{s\in Q_+} H^s$, $H$ est invariant et P-plein, et, pour tout s, la restriction de $X^s$ à $H$ est stationnaire. Posons alors

$$\overline{X}_t(\omega) = \limsup_{s\downarrow 0} X_t^s(\omega) \quad ,$$

le processus $\overline{X}$ est adapté à la famille $(\underline{\underline{A}}_t)$, et sa restriction à $H$ est stationnaire; pour $\omega \in U \cap V \cap M$, on a, par (vi) et continuité à gauche, $X_t^s(\omega) = \frac{1}{s}\int_{-s}^{0} X_{t+u}(\omega)du$ ; grâce à la continuité à gauche de $X$, il vient par passage à la limite en $s$, que les processus $X$ et $\overline{X}$ sont égaux sur $U \cap V \cap M$, donc indistinguables. Il reste à poser $f = \overline{X}_0$, alors $f \in \underline{\underline{A}}_0$, et les processus $(f \circ \theta.)$ et $\overline{X}$ sont indistinguables, puisqu'égaux sur $H$; le théorème est montré.

Lorsque $X$ est continu à droite, on définit $X^s$ par $\frac{1}{s}\int_0^s X_t(\theta_u \omega)du$, puis on remplace la gauche par la droite. Enfin, pour le cas général, on considère la filtration triviale $\underline{\underline{A}}'_t = \underline{\underline{A}}$, à laquelle on applique les résultats précédents.

REMARQUE: nous ne sommes assurés de la continuité à gauche de $(f \circ \theta.)$ que sur $H$, et non pas partout; par ailleurs, le lecteur vérifiera que, dans le cas "continu à droite et adapté", le processus obtenu est en fait "algébriquement" bien-mesurable par rapport à $(\underline{\underline{A}}_t)$ (cette notion sera précisée plus loin).

Donnons maintenant la dernière définition qui nous sera utile par la suite: un ensemble $\underline{\underline{A}}$-mesurable $B$ est dit *polaire* si le processus stationnaire $(1_B \circ \theta.)$ est $P$-évanescent.

Nous munirons par la suite le flot d'une autre filtration, dont les propriétés sont bien meilleures que celles de la filtration originelle dont elle est peu différente; cette filtration a été introduite par LAZARO-MEYER(14):

(viii) On désignera par $\underline{\underline{F}}$ la sous-tribu de $\underline{\underline{A}}$ engendrée par les fonctions $g$, $\underline{\underline{A}}$-mesurables, bornées, et continues sur les trajectoires du flot (cela signifie que le processus $(g \circ \theta.)$ est continu); on désignera par $\underline{\underline{F}}_0$ la tribu engendrée par les fonctions $\underline{\underline{A}}_0$-mesurables bornées et continues sur les trajectoires du flot; enfin, nous poserons $\underline{\underline{F}}_t = \theta_t^{-1}\underline{\underline{F}}_0$, définissant ainsi une nouvelle filtration du flot $(\theta_t)$.

REMARQUES 1): si $h$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable et continue à droite (ou à gauche) sur les trajectoires du flot, alors, $H$ appartient à $\underline{\underline{F}}$; si $h$ est $\underline{\underline{A}}_0$-mesurable et continue à gauche (resp. à droite) sur les trajectoires du flot, $h$ appartient à $\underline{\underline{F}}_0$ (resp. à $\underline{\underline{F}}_{0+}$).

2): la tribu $\underline{\underline{F}}_0$ est également engendrée par une famille de fonctions $h$ satisfaisant à la propriété de continuité uniforme suivante: $\forall \omega, |h(\theta_t\omega) - h(\omega)| \leq (1-e^{-t}) + (1-e^{t})$: il suffit pour cela de remarquer que $\underline{\underline{F}}_0$ est engendrée par les fonctions $h = \int_0^\infty e^{-u} g \circ \theta_{-u} du$, où $g$ est $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable, continue sur les trajectoires du flot, et bornée par 1. La même remarque vaut évidemment pour la tribu $\underline{\underline{F}}$.

Comment peut-on justifier l'introduction de ces tribus autrement que par leurs bonnes propriétés? Je ne vois pas d'autre moyen que de se référer aux travaux d'AZEMA (3) sur le retournement du temps dans les processus de Markov: si $X = (\Omega, \underline{\underline{F}}_t, X_t, \theta_t, P^x)$

désigne un processus de Markov d'espace d'états $(E,\underline{\underline{E}})$, Azema introduit les tribus des ensembles aléatoires coprévisibles et cooptionnels sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$ engendrées respectivement par les processus $Y$, homogènes $(Y_{t+s}=Y_t\circ\theta_s)$ continus à droite, ou continus à gauche et réglés; ces tribus sont respectivement les tribus "duales" des tribus prévisible et bien-mesurable, et jouissent de propriétés intéressantes. Dans notre situation, ces deux tribus se confondent pour donner la tribu des ensembles aléatoires stationnaires engendrée par ceux d'entre eux qui sont continus, autrement dit des ensembles aléatoires de la forme $(f\circ\theta.)$, où $f\in\underline{\underline{F}}$.

Voici, concernant ces tribus, un résultat dû à LAZARO-MEYER(14), qui illustre le fait que celles-ci sont peu différentes des tribus initiales:

(1.2) LEMME: <u>on a</u> $\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{F}}_0=\underline{\underline{A}}_0$; <u>l'application</u> $(t,\omega)\longrightarrow\theta_t\omega$ <u>est mesurable de</u> $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\otimes\underline{\underline{F}}$ <u>dans</u> $\underline{\underline{F}}$; <u>enfin, si</u> $\underline{\underline{A}}$ <u>(resp.</u> $\underline{\underline{A}}_0$) <u>est séparable</u>, $\underline{\underline{F}}$ <u>(resp.</u> $\underline{\underline{F}}_0$) <u>l'est aussi</u>.

En conséquence, le flot $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,P)$ muni de sa nouvelle filtration satisfait aux propriétés (i,ii,iii,iv) du début.

DEMONSTRATION: la famille de fonctions définies par la formule $M_tg=\frac{1}{t}\int_0^t g\circ\theta_{-u}du$, où $g$ parcourt l'ensemble des fonctions $\underline{\underline{A}}$-mesurables bornées, engendre la tribu $\underline{\underline{F}}$; il suffit d'ailleurs de faire parcourir à $g$ un système de générateurs de $\underline{\underline{A}}$. Mais alors si $g$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable et bornée, la fonction $g'=\liminf M_tg$, $t\to 0$, est $\underline{\underline{F}}$-mesurable et p.s. égale à $g$ d'après le théorème ergodique local, d'où la première assertion. Il est par ailleurs clair que $\underline{\underline{F}}$ est séparable si $\underline{\underline{A}}$ l'est. Dans les deux cas, on a les mêmes résultats en remplaçant $\underline{\underline{A}}$ par $\underline{\underline{A}}_0$, $\underline{\underline{F}}$ par $\underline{\underline{F}}_0$. Enfin, la bimesurabilité de $(t,\omega)\longrightarrow\theta_t\omega$ résulte de ce que, pour $s$ fixé, l'application $(t,\omega)\longrightarrow M_sg(\theta_t\omega)$ est $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\otimes\underline{\underline{F}}$-mesurable. Le lemme est montré.

REMARQUE: il ressort de ce lemme que le remplacement des tribus $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{A}}_t$ par $\underline{\underline{F}}$ et $\underline{\underline{F}}_t$ n'affecte pas la structure hilbertienne du flot; en revanche, ce remplacement <u>ne préserve pas les processus stationnaires</u>: un processus $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\otimes\underline{\underline{A}}$-mesurable et stationnaire n'est pas nécessairement indistinguable d'un processus stationnaire $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\otimes\underline{\underline{F}}$-mesurable. Nous verrons néanmoins que cette propriété est réalisée pour les flots non triviaux.

Voici une première pròpriété de cette nouvelle filtration:

(1.3) LEMME: <u>si</u> $H$ <u>est une variable aléatoire</u> $\underline{\underline{F}}_0$<u>-mesurable et</u> $\leq 0$, $\theta_H$ <u>est mesurable de</u> $\underline{\underline{F}}_0$ <u>dans</u> $\underline{\underline{F}}_0$.

DEMONSTRATION: il sufffit de montrer que, pour toute fonction $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable $f$ continue sur les trajectoires du flot, $f\circ\theta_H$ est $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable; mais $H$ est limite croissante d'une suite $(H^n)$, où les $H^n$ sont $\underline{\underline{F}}_0$-mesurables et constantes par morceaux, et il suffit donc de montrer la $\underline{\underline{F}}_0$-mesurabilité de $f\circ\theta_H$ lorsque $H$ est de cette forme; mais alors, on a $f\circ\theta_H=\sum_m 1_{D_m}.f\circ\theta_{t_m}$, $D_m\in\underline{\underline{F}}_0$, $t_m\leq 0$, d'où le résultat.

## §2: Le théorème d'Ambrose-Kakutani.

AMBROSE(1), puis AMBROSE-KAKUTANI(2) ont montré un théorème de représentation des flots "non triviaux" comme flots sous une fonction; on connait plusieurs formes de ce théorème, et nous allons simplement en exposer ici une nouvelle; pour tenter d'excuser cette indélicatesse, disons que c'est de cette forme que dépend la suite. Pour le début, nous nous sommes contenté de recopier très exactement la démonstration donnée dans LAZARO-MEYER(14), ou mieux dans LAZARO(13); les résultats énoncés ici sans démonstration y figurent explicitement, et démontrés.

REMARQUE: considérons la tribu $\underline{\underline{F}}'_t = \underline{\underline{F}}_t \vee (\underline{\underline{I}} \cap \underline{\underline{F}}_{+\infty})$; on définit ainsi une nouvelle filtration du flot satisfaisant à $\underline{\underline{F}}'_{+\infty} = \underline{\underline{F}}_{+\infty}$; par ailleurs, on a $\overline{\underline{\underline{F}}}'_t = \overline{\underline{\underline{F}}}_t$, car il est connu que tout élément de $\underline{\underline{I}} \cap \underline{\underline{F}}_{+\infty}$ appartient à $\overline{\underline{\underline{F}}}_0$, et donc aussi à $\overline{\underline{\underline{F}}}_{-\infty}$. Il nous arrivera d'utiliser la filtration $(\underline{\underline{F}}'_t)$ au lieu de $(\underline{\underline{F}}_t)$.

La démonstration du théorème d'Ambrose se décompose en deux parties: nous allons commencer par partager le flot $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{A}}_t, \theta_t, P)$ en une partie triviale, et une qui ne l'est pas.

(2.1) THEOREME: <u>il existe un ensemble</u> $I$, <u>appartenant à</u> $\underline{\underline{I}} \cap \underline{\underline{F}}_{+\infty}$, <u>tel que</u>
<u>(a) la restriction du flot à</u> $I^c$ <u>soit triviale en ce sens que,</u> $\forall A \in \underline{\underline{A}}_{0|I^c}$, <u>on a</u> $P(A^c \cap \theta_r A) = 0$ <u>pour tout réel r;</u>
<u>(b) la restriction du flot à</u> $I$ <u>soit propre en ce sens qu'il existe</u> $X \subset I$, $X \in \underline{\underline{F}}'_0$, <u>tel que la formule</u> $N_t = \sum_{0<s\leq t} 1_X \circ \theta_s$ <u>pour</u> $t \geq 0$, $= -\sum_{t<s\leq 0} 1_X \circ \theta_s$ <u>pour</u> $t<0$ <u>définisse un compteur avec</u> $\Omega^N = I$.

DEMONSTRATION: soit $A \in \underline{\underline{A}}_0$ tel qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ satisfaisant à $P(A^c \cap \theta_r A) > 0$ (s'il n'existe pas de tels ensembles A, on pose $I = \emptyset$, et le théorème est montré); quitte à échanger A et $A^c$, nous pouvons supposer que l'on a $r>0$. Soit alors $\lambda$ un réel $>0$, et posons

$$F_\lambda(\omega) = \lambda \int_{-\frac{1}{\lambda}}^{0} 1_A \circ \theta_u(\omega) du, \quad C_\lambda = (F_\lambda < 1/4), \quad D_\lambda = (F_\lambda > 3/4).$$

La fonction $F_\lambda$ satisfait aux propriétés suivantes:

(i) $\forall \omega \in \Omega$, $\forall s, s'$, $|F_\lambda(\theta_s \omega) - F_\lambda(\theta_{s'} \omega)| \leq \lambda |s - s'|$ :

(ii) $F_\lambda$ est $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable pour tout réel $\lambda$, et $F_\lambda \to 1_A$ p.s. et dans $L^1$ lorsque $\lambda \to +\infty$ (en vertu du théorème ergodique local).

En vertu de (ii) et du choix particulier de A, il existe un réel $\lambda$ assez grand pour que l'on ait $0 < P(C_\lambda \cap \theta_r D_\lambda) < 1$, et nous fixons dorénavant un tel $\lambda$. Posons

(iii) $M_1 = C_\lambda \cap \theta_r D_\lambda$ ;

$X_1' = (\omega \in \Omega;\ F_\lambda(\omega)=1/2,\ F_\lambda(\theta_s\omega) \geq 1/2\ \ \forall s \in ]-1/4\lambda, 0[)$;

$I_1 = (\omega \in \Omega;\ \theta_t\omega \in X_1'$ pour des t arbitrairement voisins de $\pm\infty)$.

Ces ensembles satisfont aux propriétés suivantes:

(iv) – $X_1' \in \underline{\underline{F}}_0$ ;

– pour p.s. tout $\omega \in M_1$, $\theta_t\omega \in M_1$ pour des t arbitrairement voisins de $\pm\infty$;

– pour p.s. tout $\omega \in M_1^c$, $\theta_t\omega \in X_1'$ pour des t arbitrairement voisins de $\pm\infty$;

– $I_1 \in \underline{\underline{I}} \cap \underline{\underline{F}}_{+\infty}$, $I_1$ contient p.s. $M_1$ et $X_1'$ ;

– $\forall\omega$, deux rencontres successives de $X_1'$ par la trajectoire $t \longrightarrow \theta_t\omega$ sont séparées par un intervalle de longueur $\geq 1/4\lambda$.

Ces propriétés sont montrées en détail dans (13); disons rapidement que la première est élémentaire, que les deuxième et troisième sont une application du théorème ergodique global, et que la dernière résulte du caractère lipschitzien de $F_\lambda$. Posons

$$X_1 = X_1' \cap I_1 \in \underline{\underline{F}}_0';\quad N_t^1 = \sum_{0<s\leq t} 1_{X_1} \circ \theta_s \text{ pour } t \geq 0,\quad = -\sum_{t<s\leq 0} 1_{X_1} \circ \theta_s \text{ pour } t<0.$$

Nous définissons ainsi un compteur $N^1$: deux sauts consécutifs de $N^1$ sont séparés par un intervalle de longueur $\geq 1/4\lambda$ grâce à la dernière propriété de (iv); il est par ailleurs montré dans (13) (c'est long, mais relativement aisé à vérifier) que

$N^1$ est adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t')$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall s \geq 0$, $N_t^1 - N_{t-s}^1$ est $\underline{\underline{F}}_t'$-mesurable.

REMARQUE: si le flot considéré est ergodique, $P(I_1) > 0$ entraine $P(I_1)=1$, et le théorème est montré dans ce cas avec $I=\Omega$, $I^c=\emptyset$.

Dans le cas général, soit (I) l'ensemble des ensembles $I \in \underline{\underline{I}} \cap \underline{\underline{F}}_\infty$ satisfaisant à:

$\exists X \in \underline{\underline{F}}_0'$ tel que la formule $N_t^X = \sum (1_X \circ \theta_s, 0<s\leq t)$ pour $t \geq 0$, $= -\sum (1_X \circ \theta_s, t<s\leq 0)$ pour $t<0$, définisse un compteur adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t')$ tel que $I$ contienne $\Omega(N^X)$ et lui soit p.s. égal.

L'ensemble (I) n'est pas vide, puisqu'il contient $I_1$ précédemment défini; (I) est stable par union et intersection finies, et fermé pour les réunions croissantes dénombrables; enfin, si $I \in (I)$, et si $I' \in \underline{\underline{I}} \cap \underline{\underline{F}}_\infty$ est p.s. égal à I, I' appartient aussi à (I): il suffit de considérer $X' = X \cap I'$. Il existe donc un élément I de

(I) qui soit un représentant de ess sup (I), c'est l'ensemble annoncé dans le théorème. En effet, quitte à enlever de $I$ l'ensemble invariant négligeable $I - \Omega^{(N^X)}$, et à noter encore $I$ l'élément de (I) ainsi obtenu, le compteur $N^X$ a bien les propriétés cherchées: $X \in \underline{\underline{F}}'_0$, $N^X$ est adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}'_t)$, et $\Omega^{(N^X)} = I$; le théorème est montré.

Ceci constituait la première partie du théorème d'Ambrose-Kakutani, la seconde donnant une représentation de la partie propre du flot. Nous allons auparavant étudier la partie triviale du flot, et justifier par là même sa dénomination.

(2.2) THEOREME: <u>pour tout élément</u> $A$ <u>de</u> $\underline{\underline{F}}_{\infty}$ <u>contenu dans</u> $I^c$, <u>il existe un ensemble invariant négligeable</u> $U^c$ <u>tel que</u> $A \cap U$ <u>soit invariant; en particulier, l'implication</u> (A <u>négligeable</u>) $\Longrightarrow$ (A <u>polaire</u>) <u>est vraie sur la restriction à</u> $I^c$ <u>de</u> $\underline{\underline{F}}_{\infty}$.

DEMONSTRATION: d'après Fubini et la bimesurabilité de $\theta$, il vient que, pour tout $A$ appartenant à la restriction à $I^c$ de la tribu $\underline{\underline{A}}_0$, il existe H négligeable appartenant à $\underline{\underline{A}}$ tel que, $\forall \omega \notin H$, $1_A(\omega) = 1_A(\theta_r\omega)$ p.p.r, soit encore

$$\forall \omega \notin H, \quad 1_A(\omega) = \int_t^{t+1} 1_A(\theta_u\omega)\, du \quad \text{pour } \underline{\text{tout}}\ t \in \mathbb{R}.$$

Posons alors

$$g_A = \int_{-1}^{0} 1_A \circ \theta_u \, du \ , \quad U = (\omega \in \Omega ;\ g_A(\omega) = g_A(\theta_t\omega) \quad \forall t \in \mathbb{R}) \ ;$$

l'ensemble U appartient à $\underline{\underline{F}}$, contient $H^c$, d'où $P(U)=1$. Par ailleurs, U est invariant: soit $\theta_u\omega \in U$, on a $g_A(\theta_u\omega) = g_A(\theta_{u+t}\omega)$ $\forall t$, et, prenant $t=-u$, il vient $g_A(\omega) = g_A(\theta_u\omega)$ $= g_A(\theta_v\omega)$ $\forall v$, ce qui donne bien $\omega \in U$. Finalement, il existe U, invariant et P-plein tel que $g_A$ soit invariante sur U. Mais, cette propriété est vraie pour tout $A$ appartenant à $\underline{\underline{A}}_t$ (sinon, on aurait considéré $\theta_t^{-1}A$), et la tribu engendrée par les $g_A$, où $A$ parcourt la réunion des tribus $\underline{\underline{A}}_t$, n'est autre que $\underline{\underline{F}}_{+\infty}$; un raisonnement de classes monotones permet alors de conclure.

REMARQUE: dans le cas où la tribu $\underline{\underline{F}}_0$ est de type dénombrable, quitte à jeter un ensemble invariant P-négligeable, on peut supposer que l'on a $A = \theta_t A$ pour tout $A \in \underline{\underline{F}}_{\infty}$ ce qui justifie amplement le terme de "trivial".

Nous allons consacrer la reste de ce paragraphe à l'étude de la partie propre du flot. Plus précisément, <u>nous jetons</u> $I^c$, <u>et conservons les mêmes notations pour le flot ainsi restreint.</u> Quitte à remplacer la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ par $(\underline{\underline{F}}'_t)$ , et à continuer à noter $(\underline{\underline{F}}_t)$ la nouvelle filtration ainsi obtenue, cela revient à faire l'hypothèse suivante:

(2.3) HYPOTHESE: <u>il existe un compteur</u> N <u>adapté à la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_{t+})$, <u>tel que</u> $\Omega^N = \Omega$.

COMMENTAIRE: nous avons remplacé $(\underline{\underline{F}}_t)$ par $(\underline{\underline{F}}_{t+})$ parce que nous avons en vue des applications de ce qui vient, non seulement au flot obtenu par Ambrose-Kakutani, mais aussi au flot canonique des processus ponctuels stationnaires, où le compteur fondamental N est imposé, et seulement adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+})$.

Dans la suite de ce paragraphe, nous considérons le compteur N comme fixé, et nous l'appellerons <u>compteur fondamental</u>. Voici maintenant quelques résultats supplémentaires de mesurabilité. Posons

(v) $X = (N_{0-} = -1) \in \underline{\underline{F}}_0$ ;

$V_0(\omega) = \sup(t<0,\ \theta_t\omega \in X)$, $\quad V_n(\omega) = \sup(t<V_{n+1}(\omega),\ \theta_t\omega \in X)$ pour $n<0$;

$V_1(\omega) = \inf(t\geq 0,\ \theta_t\omega \in X)$, $\quad V_n(\omega) = \inf(t>V_{n-1}(\omega),\ \theta_t\omega \in X)$ pour $n>1$.

La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est partout définie, et l'on a $\lim V_n = \pm\infty$ lorsque $n \to \pm\infty$. On a de plus les résultats de mesurabilité suivants:

(2.4) LEMME: (a): $\forall n\geq 1$, $V_n$ <u>est un temps d'arrêt de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_{t+})_{t\geq 0}$;
(b): $\forall n\leq 0$, $V_n$ <u>est</u> $\underline{\underline{F}}_0$<u>-mesurable</u>.

DEMONSTRATION (a): on a $(V_1>t) = X^c \cap (N_t=0) \in \underline{\underline{F}}_{t+}$, ce qui montre déjà que $V_1$ est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_{t+})$. Pour $n\geq 1$, on a $V_{n+1}(\omega) = \inf(t>V_n(\omega), \theta_t\omega\in X) = V_n(\omega) + \inf(t>0,\ \theta_t(\theta_{V_n}\omega) \in X) = V_n(\omega) + V'_1\circ\theta_{V_n}(\omega)$, avec $V'_1(\omega) = \inf(t>0, \theta_t\omega\in X)$; il suffit donc de montrer que $V'_1$ est un temps d'arrêt pour obtenir (a) par récurrence: on a $(V'_1>t) = (N_t=0) \in \underline{\underline{F}}_{t+}$.

(b): commençons par montrer que $V_0$ est $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable. On a $V_0 = \lim V_\varepsilon$ lorsque $\varepsilon\downarrow 0$, avec $V_\varepsilon(\omega) = \sup(t\leq -\varepsilon, \theta_t\omega\in X)$, et il suffit de montrer que $V_\varepsilon$ est $\underline{\underline{F}}_{-\varepsilon+}$-mesurable pour tout $\varepsilon>0$. Or, on a $(V_\varepsilon\leq t) = (N_{-\varepsilon}-N_t=0) \in \underline{\underline{F}}_{-\varepsilon+}$ avec $t\leq -\varepsilon$, et finalement, V est bien $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable. Par ailleurs, on a, pour $n\leq 0$,

$V_{n-1}(\omega) = \sup(t<V_n(\omega), \theta_t\omega \in X) = V_n(\omega) + \sup(s<0, \theta_s(\theta_{V_n}\omega) \in X) = V_n(\omega) + V_0 \circ \theta_{V_n}(\omega)$,

et le résultat provient alors par récurrence du lemme (1.3).

Commençons à introduire le flot spécial qui a été annoncé; encore une fois, il s'agit d'une modifications très mineure de la méthode de HANEN(10) qui montre l'équivalence entre processus ponctuel stationnaire et flot sous une fonction; nous reprenons succintement les démonstrations par acquit de conscience, et, pour cela, nous recopions à peu de choses près l'exposé fait dans LAZARO-MEYER(14) aux chapîtres I et II, auxquels nous renvoyons le lecteur pour de plus amples détails. Posons

(vi) $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}|_X$, $V = V_2|_X$, $W = ((x,u) \in X \times \mathbb{R}, 0 < u \leq V(x))$ .

REMARQUE: d'habitude, on pose $W=((x,u) \in X \times \mathbb{R}, 0 \leq u < V(x))$, c'est d'ailleurs ce que nous avions fait dans une première rédaction, mais cette méthode nous empêchait d'obtenir des résultats intéressants pour les processus ponctuels, cas où X n'appartient pas à $\underline{\underline{F}}_0$. Si l'on excepte la modification qui vient d'être expliquée, ce qui suit est tout à fait classique, ce qui justifie peut-être la rapidité de la rédaction.

Munissons $(X, \underline{\underline{X}})$ de l'automorphisme S défini par $Sx = \theta_V x$, on a $S^n x = \theta_{V_{n+1}}(x)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ (on rappelle que x est un point de $\Omega$, ces écritures ont donc un sens). Posons également

$\overline{W} = X \times \mathbb{R}$; $\overline{W}_n = ((x,u) \in X \times \mathbb{R}, V_{n+1}(x) < u \leq V_{n+2}(x))$;

on a en particulier $W = \overline{W}_0$; nous munissons W de la tribu $\hat{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{X}} \otimes \underline{\underline{B}}(\mathbb{R})|_W$. Nous introduisons sur $\overline{W}$

$\overline{\theta}_t(x,u) = (x,u+t)$; $\overline{S}(x,u) = (Sx, u-V(x))$;

on a $\overline{S}^k(x,u) = (S^k x, u-V_{k+1}(x))$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Introduisons la relation d'équivalence $(\mathcal{R})$ sur $\overline{W}$ définie par

$(x,u) \sim (x',u') \mod(\mathcal{R}) \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $(x',u') = \overline{S}^k(x,u)$;

on montre alors que toute classe d'équivalence de la relation $(\mathcal{R})$ admet un et un seul représentant dans W, que l'on peut par conséquent identifier à $\overline{W}/\mathcal{R}$. De la même façon, les applications $\overline{\theta}_t$ sont compatibles avec la relation $(\mathcal{R})$, d'où par passage au quotient un groupe d'automorphismes $(\hat{\theta}_t)$ de W donné par la formule

(vii) $\hat{\theta}_t(x,u) = \sum_{k\in Z} (S^{k-1}x, t+u-V_k(x)).1_{(V_k(x)<t+u\leq V_{k+1}(x))}$ .

Définissons une application $\overline{\Phi}$ de $\overline{W}$ sur $\Omega$ par la formule $\overline{\Phi}(x,u)=\theta_u x$, application mesurable de $(\overline{W},\underline{X}\otimes\underline{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\Omega,\underline{A})$; cette application satisfait à $\overline{\Phi}\circ\overline{\theta}_t=\theta_t\circ\overline{\Phi}$, et la relation d'équivalence $\overline{\Phi}(x,u)=\overline{\Phi}(x',u')$ n'est autre que $(\mathcal{R})$, de sorte que $\Phi = \overline{\Phi}_{|W}$ est une bijection de $W$ sur $\Omega$, qui commute avec $\theta_t$ et $\hat{\theta}_t$ par passage au quotient. Nous avons donc un isomorphisme entre $(\Omega,\underline{A},\theta_t)$ et $(W,\hat{\underline{A}},\hat{\theta}_t)$ par

(viii) $\Phi$: $(x,u) \longrightarrow \theta_u x$, mesurable de $(W,\hat{\underline{A}})$ dans $(\Omega,\underline{A})$;

$\Phi^{-1}$: $\omega \longrightarrow (\theta_{V_0}\omega, -V_0(\omega))$, mesurable de $(\Omega,\underline{A})$ dans $(W,\hat{\underline{A}})$.

Notons $\hat{P}$ la mesure obtenue en transportant sur $W$ la loi $P$; cette loi est invariante par les $\hat{\theta}_t$, et nous allons montrer que

(ix) $\hat{P} = \mu\otimes dt|_W$, où $\mu$ est une mesure positive $\sigma$-finie sur $W$, et S-invariante.

Nous dirons que $\mu$ est la <u>mesure fondamentale</u>. En effet, soit $\overline{P}$ la mesure positive définie sur $\overline{W}$ par la formule $\overline{P}(B) = \sum \hat{P}(\overline{S}^k(B\cap\overline{W}_k))$, $k\in\mathbb{Z}$; on vérifie que $\overline{P}$ est invariante par $\overline{\theta}_t$ si et seulement si $\hat{P}$ est invariante par $\hat{\theta}_t$; définissons alors la mesure $\mu$ par $\mu(A) = \overline{P}(A\times[0,1])$, la mesure $\hat{P}$ étant bornée, il vient que $\mu$ est $\sigma$-finie, et l'on voit aisément que $\overline{P}=\mu\otimes dt$, soit encore $\hat{P}=\mu\otimes dt|_W$. Il nous reste à montrer que $\mu$ est S-invariante: d'après la construction même de $\overline{P}$, cette mesure est invariante par $\overline{S}$; si nous appliquons cette propriété avec une fonction de la forme $f = g\otimes 1_{[0,1]}$, il vient $\mu(g)=\overline{P}(f)=\overline{P}(f\circ\overline{S})=\mu(g\circ S)$, ce qui achève la démonstration de (ix)

Toujours suivant LAZARO-MEYER(14), donnons une caractérisation de la mesure fondamentale $\mu$, qui exprime que celle-ci est la mesure de Palm du compteur $N$ (nous reviendrons ultérieurement sur cette notion, dont nous donnerons la définition):

(2.5) LEMME: <u>nous considérons</u> $\mu$ <u>comme une mesure sur</u> $(\Omega,\underline{A})$ <u>portée par</u> $X$; <u>soit</u> $f$ <u>une fonction</u> $\underline{A}\otimes\underline{B}(\mathbb{R})$<u>-mesurable et positive sur</u> $\Omega\times\mathbb{R}$, <u>on a</u>

$$E\int_{\mathbb{R}} f(\theta_t\cdot,u)\, dN_u = \mu\otimes du(f) .$$

DEMONSTRATION: le premier membre de l'égalité est égal à $\sum E(f(\theta_{V_n}\omega, V_n(\omega)))$, $n\in\mathbb{Z}$; mais, si l'on pose $\overline{f}(\omega,u)=f(\omega,-u)$, l'isomorphisme entre $\Omega$ et $W$ dit que la somme est égale à $\sum \hat{E}((\overline{f}.1_{\overline{W}_n})\circ\overline{S}^{-n}) = \overline{P}(\overline{f}) = \overline{P}(f)$ qui est bien le membre de droite.

REMARQUE: dans notre situation, on ne peut pas considérer $\mu$ comme la mesure de Palm du compteur fondamental transporté sur W, puisque cette mesure n'est pas portée par W; nous reviendrons ultérieurement sur ce point, en calculant la mesure de Palm de ce compteur.

La fin du paragraphe sera consacrée à quelques questions de mesurabilité. Voici une notation qui sera très importante par la suite:

(2.6) NOTATION: <u>à toute fonction</u> $\hat{f}$ <u>définie sur</u> $(W,\hat{\underline{\underline{A}}})$, <u>nous associons le processus</u> $(f_u)_{u\geq 0}$ <u>défini sur</u> $(X,\underline{\underline{X}})$ <u>par la formule</u> $f_u(x) = \hat{f}(x,u)$ <u>si</u> $u\leq V(x)$, $=0$ <u>sinon. Réciproquement, tout processus</u> $(f_u)_{u\geq 0}$ <u>sur</u> $(X,\underline{\underline{X}})$, <u>à support dans</u> $]\!]0,V]\!]$, <u>définit évidemment une fonction</u> $\hat{f}$, $\hat{\underline{\underline{A}}}$<u>-mesurable sur</u> W.

Ces conventions étant faites, on a le résultat suivant:

(2.7) LEMME: ( $(f_u)$ <u>continu à gauche</u> ) $\Longleftrightarrow$ ( $(\hat{f}\circ\hat{\theta}.)$ <u>continu à gauche</u> );
( $(f_u)$ <u>réglé</u> ) $\Longleftrightarrow$ ( $(\hat{f}\circ\hat{\theta}.)$ <u>réglé</u> ).

DEMONSTRATION: d'après (vii), on a, pour $-u<t\leq V(x)-u$, $\hat{f}\circ\hat{\theta}_t(x,u)=\hat{f}(x,t+u)$. Les deux implications de la droite vers le gauche en résultent déjà. Réciproquement, si le processus $(f_u)$ est continu à gauche, il vient que $t\longrightarrow\hat{f}\circ\hat{\theta}_t$ est continu à gauche en $t=0$, donc partout puisque $(\hat{\theta}_t)$ est un groupe. Le même raisonnement est valide si l'on remplace "continu à gauche" par "réglé". Mais, attention, on n'a <u>aucun renseignement</u> concernant la continuité à droite!

Notons $\underline{\underline{H}}$ l'algèbre de Boole sur W engendrée par les ensembles B de la forme $B = (A\times]s,t])\cap W$, où $A\in\underline{\underline{X}}$.

(2.8) LEMME: <u>tout élément de</u> $\underline{\underline{H}}$ <u>est continu à gauche; en conséquence</u>, $\underline{\underline{H}}$ <u>engendrant la tribu</u> $\hat{\underline{\underline{A}}}$, <u>il vient</u> $\hat{\underline{\underline{F}}}=\hat{\underline{\underline{A}}}$, <u>et par isomorphisme</u> $\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{A}}$.

DEMONSTRATION: $\underline{\underline{H}}$ est aussi constituée par les réunions finies d'ensembles de la forme B, disjoints deux à deux:

$$B^c = (\, A^c\times\mathbb{R} + A\times]0,s] + A\times]t,\infty] \,)\cap W\ ,$$
$$B_1\cup B_2 = (A_1\setminus A_2\times]s_1,t_1] + A_2\setminus A_1\times]s_2,t_2] + A_1\cap A_2\times]s_1\wedge s_2,t_1\vee t_2] \,)\cap W.$$

Par ailleurs, tout ensemble de la forme B est fermé à gauche, il en est donc de même pour $B^c$; autrement dit, la fonction $1_B$ est continue à gauche, ce qui montre le lemme grâce à (2.7).

REMARQUE: ce résultat précise le lemme (1.2) et la remarque qui la suit: si l'on a affaire à un flot propre, on peut, quitte à jeter un ensemble invariant négligeable, supposer que $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{F}}$; nous n'avons pas de résultat analogue pour les tribus $\underline{\underline{A}}_0$ et $\underline{\underline{F}}_0$, mais nous verrons par la suite que l'étude des phénomènes stationnaires est inchangée si l'on remplace la filtration $(\underline{\underline{A}}_t)$ par $(\underline{\underline{F}}_t)$. Vu, enfin, le peu d'intérêt des flots triviaux, nous espérons avoir justifié l'introductimn de l'hypothèse supplémentaire que voici, laquelle sera en vigueur dans tout le reste de ce travail:

(2.9) HYPOTHESE: nous oublions la filtration $(\underline{\underline{A}}_t)$, en travaillant donc dorénavant sur le flot $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,P)$.

S'il est vrai que quelques uns des résultats à venir ne nécessitent pas cette hypothèse, ce sera le cas pour les plus importants d'entre eux; nous avons donc renoncé à distinguer les cas où (2.9) est nécessaire de ceux où elle ne l'est pas.

§3: <u>Quelques résultats de théorie générale des processus sur</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,P)$.

Nous commençons par quelques rappels concernant la théorie générale des processus Outre la théorie générale "classique", telle qu'on peut la trouver exposée dans DELLACHERIE(6), nous aurons à utiliser: 1/ les notions de prévisibilité etc... sur des espaces non probabilisés, 2/ une théorie générale des processus admettant non plus $\mathbb{R}_+$, mais $\mathbb{R}$ comme ensemble des temps. Ce sont là des modifications mineures, et nous nous contenterons de préciser quelques points.

Dans les quelques lignes qui suivent, $\underline{T}$ désignera l'ensemble des temps qui sera soit $\mathbb{R}_+$, soit $\mathbb{R}$ (<u>dans tout ce travail</u>, $\mathbb{R}_+$ <u>désignera</u> $]0,+\infty[$). Soit donc $(E,\underline{\underline{E}}_t)_{t\in\underline{T}}$ un espace muni d'une famille croissante de tribus. Nous appellerons tribus des ensembles aléatoires <u>algébriquement prévisibles</u> sur $(E,\underline{\underline{E}}_t)_{t\in\underline{T}}$ (notée $\underline{\underline{P}}(E,\underline{\underline{E}}_t)_{t\in\underline{T}}$, ou $\underline{\underline{P}}$ s'il n'y a pas d'ambigüité possible), la tribu sur $E\times\underline{T}$ engendrée par les processus Y définis sur E, continus, et adaptés à la famille $(\underline{\underline{E}}_{t+})_{t\in\underline{T}}$; cette tribu est également engendrée par les ensembles de la forme $B^t\times]t,\infty[$, avec $B^t\in\underline{\underline{E}}_t$. Nous appelerons tribu des ensembles aléatoires <u>algébriquement optionnels</u> (ou <u>bien-mesurables</u>) sur $(E,\underline{\underline{E}}_t)$ (notée $\underline{\underline{O}}(E,\underline{\underline{E}}_t)_{t\in\underline{T}}$, ou $\underline{\underline{O}}$) la tribu sur $E\times\underline{T}$ engendrée par les processus Y continus à droite et réglés, adaptés à la famille $(\underline{\underline{E}}_{t+})_{t\in\underline{T}}$. Ainsi, une v.a. T à valeurs dans $]-\infty,+\infty]$ est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{E}}_{t+})$ si et seulement si $[\![T,\infty[\![$ est un ensemble aléatoire algébriquement optionnel; si, de plus, cet ensemble aléatoire est algébriquement prévisible, nous dirons que T est un <u>temps algébriquement prévisible.</u>

Si, dans le cas où $\underline{T}=\mathbb{R}_+$, il n'y a pas lieu de donner de définition particulière pour les processus croissants, nous devons le faire dans le cas où $\underline{T}=\mathbb{R}$; dans ce cas, nous dirons qu'un processus croissant A est un processus croissant algébriquement prévisible sur $(E,\underline{\underline{E}}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ si, pour tout $s\in\mathbb{R}$, le processus $(A_{t+s}-A_s)_{t\geq 0}$ appartient à $\underline{\underline{P}}(E,\underline{\underline{E}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$; on a évidemment une définition analogue pour les processus croissants algébriquement optionnels.

Revenant à $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,\theta_t)$, nous traiterons les hélices comme des processus croissants pour ce qui concerne les questions de mesurabilité; grâce à la propriété d'additivité des hélices, il vient que Z est algébriquement prévisible sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ si et seulement si le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ appartient à $\underline{\underline{P}}(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$, et qu'elle est algébriquement optionnelle si et seulement si $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un processus adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+})_{t\geq 0}$.

L'introduction de ces notions se justifie par le fait que, si l'on munit $(E,\underline{\underline{E}}_t)$ d'une loi P, et que l'on complète dûment la famille $(\underline{\underline{E}}_{t+})$, tout processus prévisible au sens habituel est indistinguable d'un processus algébriquement prévisible, etc... (voir COURREGE-PRIOURET(5)). De plus, tout temps algébriquement prévisible est indistinguable d'un temps d'arrêt prévisible au sens habituel (c'est-à-dire annoncé par une suite de temps d'arrêts), et, réciproquement, tout temps d'arrêt prévisible est indistinguable d'un temps algébriquement prévisible.

QUESTION DE VOCABULAIRE: lorsque nous dirons d'un processus qu'il est "prévisible" , etc..., cela s'entendra relativement à une famille de tribus complétée, tandis que nous réserverons la notation "algébriquement prévisible" etc... lorsqu'il s'agira d'une notion définie sur une famille de tribus non complétée.

Voici une caractérisation de la tribu $\underline{\underline{P}}(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)$, dûe à HOROWITZ-GEMAN(9); nous en donnons une démonstration débarassée des espaces de BLACKWELL: définissons sur $\Omega\times\mathbb{R}$ les applications suivantes, mesurables de $\underline{\underline{F}}\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$ dans elle-même:

(i) $\theta^+(\omega,s) = (\theta_s\omega,s)$ , $\theta^-(\omega,s) = (\theta_{-s}\omega,s)$ ;

on a $\theta^+\circ\theta^-=\theta^-\circ\theta^+=$ identité; voici la caractérisation de Geman et Horowitz:

(3.1) THEOREME: $\underline{\underline{P}}(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}} = \theta^-(\underline{\underline{F}}_0\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}))$; $\underline{\underline{P}}(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0} = \theta^-(\underline{\underline{F}}_0\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+))$.

DEMONSTRATION: bien entendu, $\theta^-(\ldots)$ signifie $(\theta^+)^{-1}(\ldots)$.
$\supset$: soit $f = 1_A\otimes 1_{]t,\infty[}$, $A\in\underline{\underline{F}}_0$; on a $f\circ\theta^+(\omega,u)=1_A(\theta_u\omega).1_{(u>t)}$, d'où $f\circ\theta^+\in\underline{\underline{P}}$.
$\subset$ : la tribu $\underline{\underline{P}}$ est engendrée par les processus de la forme $Y = 1_A\circ\theta_t\otimes 1_{]t,\infty[}$, $A\in\underline{\underline{F}}_0$, $t\in\mathbb{R}$; on a donc $Y\circ\theta^-(\omega,u) = 1_A(\theta_{t-u}\omega).1_{(t-u<0)}$, et il nous faut montrer que ce processus est $\underline{\underline{F}}_0\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-mesurable; mais il suffit pour cela de vérifier que, si $g$ est $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable sur $\Omega$, la formule $f(\omega,u)=g(\theta_u\omega),u<0$, définit un processus $\underline{\underline{F}}_0\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_-)$-mesurable; mais cette propriété est satisfaite si $g$ est continue sur les trajectoires du flot, la $\underline{\underline{F}}_0$-mesurabilité de $g\circ\theta_u$ pour $u<0$ suffisant à assurer la bimesurabilité dans ce cas. La première assertion du théorème est montrée, la seconde se montrant de la même façon.

Nous reprenons maintenant les résultats du §5 de LAZARO-MEYER(14) avec une autre méthode, sans doute plus directe: il s'agit de calculer les projections bien-mesurable et prévisible des processus stationnaires et des hélices croissantes.

(3.2) THEOREME: la projection duale prévisible (resp. bien-mesurable) d'une hélice croissante est une hélice croissante.

DEMONSTRATION: nous traitons le cas prévisible. Soit Z une hélice croissante, et soit $Z^3$ une version de la projection duale prévisible de Z; désignons par C et B les processus croissants définis par $C_u=Z^3_{t+u}-Z^3_t$, $B_u=Z^3_u\circ\theta_t$, t réel fixé; ces deux processus croissants sont prévisibles relativement à la famille complétée $(\theta_t^{-1}\underline{\underline{F}}_u)=(\underline{\underline{F}}_{t+u})$, et nous allons montrer qu'ils ont même projection duale prévisible sur cette famille de tribus; cela montrera que $Z^3$ est une hélice grossière, et il restera à invoquer le théorème (1.1) pour obtenir le résultat. Soient donc U et V deux temps d'arrêt prévisibles de la famille considérée, tels que $U\leq V$; il existe alors deux temps d'arrêt de la famille originelle $(\underline{\underline{F}}_t)$, soient S et T, tels que $S\leq T$, $U=S\circ\theta_t$, $V=T\circ\theta_t$. On a alors

$$E\int_{[U,V[} dC_u = E\int_{[t+S\circ\theta_t,\,t+T\circ\theta_t[} dZ^3_u = E\int_{[t+S\circ\theta_t,\,t+T\circ\theta_t[} dZ_u = E(\int_{[S,T[} dZ_u)\circ\theta_t$$
$$= E\int_{[S,T[} dZ_u = E\int_{[S,T[} dZ^3_u = E(\int_{[S,T[} dZ^3_u)\circ\theta_t = E\int_{[U,V[} dB_u\ ,$$

où les égalités 2 et 5 résultent des propriétés des projections duales, les égalités 4 et 6 de l'invariance de P par $\theta_t$, et l'égalité 3 du fait que Z est une hélice. Le théorème est montré dans le cas prévisible; le cas bien-mesurable se traite en considérant tous les temps d'arrêt.

Un raisonnement en tous points analogue permet de montrer que la projection (prévisible ou optionnelle) d'un processus stationnaire est grossièrement stationnaire. Mais, grâce à la propriété particulière de la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ et de la tribu $\underline{\underline{F}}$, il nous suffit d'étudier ces projections pour un processus stationnaire continu. Or, les projections prévisible et optionnelle d'un processus continu sont respectivement p.s. continues à gauche et à droite (cf. DELLACHERIE(6)). Une application du théorème (1.1) donne alors:

(3.3) THEOREME: soit f une fonction $\underline{\underline{F}}$-mesurable et positive; il existe une fonction ${}^3f$, $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable, (resp. ${}^1f$, $\underline{\underline{F}}_{0+}$-mesurable) telle que le processus stationnaire $({}^3f\circ\theta.)$ (resp. $({}^1f\circ\theta.)$) soit une version de la projection prévisible (resp. optionnelle) de $(f\circ\theta.)$.

REMARQUE: voici la remarque annoncée au § précédent: dans un flot propre, tout processus stationnaire est $\underline{\underline{F}}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-mesurable, et, pour de tels processus, les $(\underline{\underline{A}}_t)$-projections coïncident avec les $(\underline{\underline{F}}_t)$-projections; ceci était la justification annoncée du remplacement de la filtration $(\underline{\underline{A}}_t)$ (que nous oublions définitivement, cette fois!) par la filtration$(\underline{\underline{F}}_t)$.

Toujours suivant le §V de LAZARO-MEYER(14), nous allons expliquer (succintement) comment le théorème (3.3) permet de considérer le flot comme un processus de Markov.

(3.4) COROLLAIRE: supposons que $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ soit Lusinien métrisable (c'est-à-dire isomorphe à un borélien d'un espace métrique compact). Il existe alors un noyau positif $\mathbb{E}$ sur $\Omega$ transformant les fonctions $\underline{\underline{F}}$-mesurables en fonctions $\underline{\underline{F}}_0$-mesurables, et tel que, pour toute fonction $\underline{\underline{F}}$-mesurable positive f, le processus stationnaire $(\mathbb{E}(\theta_t\cdot,f))_{t\in\mathbb{R}}$ soit une version de la projection prévisible de $(f\circ\theta.)$. On a le même résultat concernant les projections bien-mesurables à l'aide d'un noyau positif $\mathbb{E}_+$ de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ dans $(\Omega,\underline{\underline{F}}_{0+})$.

DEMONSTRATION: si $(f_n)$ est une suite de fonctions $\underline{\underline{F}}$-mesurables convergeant simplement vers une fonction f, on a $\lim {}^3f_n = {}^3f$ sauf sur un ensemble polaire; de même, on a ${}^3(f+f') = {}^3f+{}^3f'$ sauf sur un ensemble polaire; enfin, si $|f|\leq K$ (K constante $\geq 0$), on a $|{}^3f|\leq K$ sauf sur un ensemble polaire, et nous pouvons commencer par choisir pour toute fonction f une version de ${}^3f$ qui satisfasse à cette inégalité partout. Soit alors $(E,\underline{\underline{E}})$ l'espace métrique compact muni de sa tribu borélienne dans lequel est plongé $(\Omega,\underline{\underline{F}})$. Soit $(\bar{f}_n)$ un ensemble dénombrable linéairement indépendant de fonctions de $\mathcal{C}(E)$, total dans $\mathcal{C}(E)$, et soit $f_n$ la restriction $\underline{\underline{F}}$-mesurable à $\Omega$ de $\bar{f}_n$. Pour chaque n, choisissons une version ${}^3f_n$ donnée par le théorème (3.3), et posons $\mathbb{E}\bar{f}_n = {}^3f_n.1_\Omega$, formule qui permet d'étendre la définition de l'opérateur $\mathbb{E}$ à l'espace vectoriel $\underline{\underline{\mathcal{L}}}$ engendré par la suite $(\bar{f}_n)$. On vérifie que, pour tout point $e\in E$, l'application $\bar{f} \rightarrow \mathbb{E}\bar{f}(e)$ de $\underline{\underline{\mathcal{L}}}$ dans $\mathbb{R}$ est une intégrale de Daniell; comme $\underline{\underline{\mathcal{L}}}$ engendre la tribu borélienne de E, il vient que, pour tout $e\in E$, cette application se prolonge de façon unique en une probablilité (qui est en fait nulle pour $e\notin\Omega$) portée par $\Omega$. Un raisonnement de classes monotones permet d'obtenir la $\underline{\underline{F}}_0$-mesurabilité de $\mathbb{E}f$ pour toute fonction $\underline{\underline{F}}$-mesurable positive f, ce qui achève la démonstration.

Pour être complet, rappelons comment ce résultat, dû à LAZARO-MEYER(14), leur permet d'interpréter le flot filtré comme processus de Markov: disons ce qui se passe par exemple dans le cas prévisible. Nous notons X l'application mesurable de $(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\otimes\underline{\underline{F}})$ dans $(\Omega,\underline{\underline{F}}_0)$ définie par $(t,\omega) \rightarrow \theta_t\omega$; nous disons que

(3.5) COROLLAIRE: <u>le terme</u> $X = (\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,X_t,P)_{t\geq 0}$ <u>est un processus modérément Markovien</u> (au sens de DOOB, cf. J.B.WALSH(22)) <u>à valeurs dans</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}}_0)$, <u>dont une fonction de transition est donnée par la formule</u> $P_t(.,f) = \mathbb{E}(.,f\circ\theta_t)$ <u>pour</u> $t\geq 0$.

DEMONSTRATION: il s'agit de vérifier que, pour tout temps d'arrêt $T\geq 0$ prévisible, on a $E(f\circ X_{T+t}|\underline{\underline{F}}_{T-})=P_t(X_T,f)$, ce qui est une simple interprétation du fait que le processus stationnaire $(f\circ\theta_t\circ\theta.)$ a pour projection prévisible $\mathbb{E}(\theta.,f\circ\theta_t)$; le résultat est montré.

Il reste alors à appliquer un théorème difficile de J.B.WALSH(22) qui modifie les choses de façon à obtenir un "vrai" processus modérément Markovien "au sens de DYNKIN"; LAZARO et MEYER font explicitement ce travail au §5 de (14) dans le cas bien-mesurable où ils obtiennent un processus droit; il est probable que leur méthode directe préserve un peu plus $\Omega$ que la méthode générale de WALSH.

REMARQUE: concernant l'hypothèse "$(\Omega,\underline{\underline{F}})$ lusinien métrisable", disons qu'elle est réalisée pour les versions canoniques des flots les plus habituels.

Nous allons consacrer la fin de ce paragraphe à l'étude de notions ayant un rapport avec les hélices croissantes. Voici un théorème emprunté à GEMAN-HOROWITZ(8):

(3.6) THEOREME: *soit* Z *une hélice croissante; la formule* $\mu^Z(f) = E\int_0^1 f\circ\theta_u \, dZ_u$, *où* f *est* $\underline{\underline{F}}$*-mesurable et positive, définit une mesure positive* $\sigma$*-finie sur* $(\Omega,\underline{\underline{F}})$, *qui ne charge pas les ensembles polaires; pour tout processus* Y, $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\otimes\underline{\underline{F}}$*-mesurable et positif,*

$$\mu^Z\otimes du(Y) = E\int_{\mathbb{R}} Y(\theta_u\cdot,u) \, dZ_u$$

(du: mesure de Lebesgue); *de plus, si* Z *est bien-mesurable (resp. prévisible), elle est entièrement déterminée par la restriction à* $\underline{\underline{F}}_{0+}$ *(resp.* $\underline{\underline{F}}_0$*) de la mesure* $\mu^Z$. *Nous dirons que* $\mu^Z$ *est la* ***mesure de Palm*** *de l'hélice croissante* Z.

REMARQUE: ce théorème et le lemme (2.5) montrent qu'il y a identité entre la mesure de Palm d'un processus ponctuel stationnaire telle qu'elle est définie en (2.5), et la mesure de Palm du compteur qui compte les apparitions du processus, suivant la définition ci-dessus; cette définition, dûe à MECKE(15), constitue donc une extension de la notion de mesure de Palm d'un processus ponctuel stationnaire.

De ce théorème, et du théorème (3.2) (qu'ils montrent indépendamment dans (9)), GEMAN et HOROWITZ déduisent le corollaire suivant, dont la démonstration est si simple que nous la reproduisons:

(3.7) COROLLAIRE: *soit* Z *une hélice croissante de mesure de Palm* $\mu^Z$; *les formules*

$$\mu^{Z^3}(f) = \mu^Z({}^3f), \quad \mu^{Z^1}(f) = \mu^Z({}^1f), \quad f \geq 0 \text{ et } \underline{\underline{F}}\text{-mesurable},$$

*caractérisent respectivement les projections duales prévisible et bien-mesurable de* Z.

DEMONSTRATION: prenons le cas prévisible; d'après (3.2), la projection duale prévisible de Z est une hélice croissante $Z^3$ qui satisfait à la première relation du corollaire d'après les propriétés des projections duales prévisibles; si Z' est une hélice croissante prévisible satisfaisant à $\mu^{Z'}(f)=\mu^Z({}^3f)$, les mesures de Palm de $Z^3$ et de Z' coïncident, ce qui assure l'égalité de ces deux hélices croissantes.

CONSEQUENCE IMPORTANTE: soit Z une hélice croissante bien-mesurable, et soit $(A_n)$ une suite d'éléments de $\underline{\underline{F}}$ croissant vers $\Omega$, telle que $\mu^Z(A_n)<\infty$ pour tout n; posons $f_n = 1_{A_n}$, on a $\mu^Z({}^3f_n)= \mu^Z(A_n)<\infty$, et $\lim({}^3f_n)=1_\Omega$; autrement dit, *la mesure de Palm* $\mu^Z$ *est en fait* $\sigma$*-finie sur* $(\Omega,\underline{\underline{F}}_{0+})$. De même, si Z est prévisible, sa mesure de Palm est $\sigma$-finie sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_0)$.

Voici maintenant une caractérisation des mesures de Palm bornées, qui est montrée indépendamment dans (9) d'une autre façon:

(3.8) THEOREME: soit $\mu$ une mesure positive bornée sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ qui ne charge pas les ensembles polaires; alors, $\mu$ est la mesure de Palm d'une hélice croissante Z.

DEMONSTRATION: elle va reposer sur la formule que voici, qui s'obtient à partir de celle du théorème (3.6) avec $Y(\omega,u) = f(\theta_{-u}\omega).1_{]0,t]}(u)$:

(ii) $$E(f.Z_t) = \mu^Z\int_0^t f\circ\theta_{-u}\,du ,$$

où $t\in\mathbb{R}$, et où Z est une hélice croissante de mesure de Palm $\mu^Z$. Soit alors f une fonction $\underline{\underline{F}}$-mesurable et P-négligeable; la loi P étant invariante, $f\circ\theta_u$ est également négligeable pour tout $u\in\mathbb{R}$; Fubini nous apprend alors que

pour P-presque tout $\omega$ , la fonction $u \longrightarrow f(\theta_u\omega)$ est Lebesgue-négligeable.

Donc, en dehors d'un ensemble P-négligeable, on a $\int_s^t f\circ\theta_{-u}du=0$ $\forall s,t\in\mathbb{R}$; donc,

$\forall t\in\mathbb{R}$, la fonction $\int_0^t f\circ\theta_{-u}\,du$ est polaire sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$.

En conséquence, si $\mu$ est une mesure positive bornée ne chargeant pas les ensembles polaires, le formule $\mu^t(f) = \mu\int_0^t f\circ\theta_{-u}du$ définit une mesure positive bornée absolument continue par rapport à P; pour $t\in\mathbb{Q}$, soit $Z''_t$ une version de la densité $d\mu^t/dP$; si l'on pose $Z'_t=\inf(Z''_s;s\geq t,s\in\mathbb{Q})$, on obtient une hélice grossière que l'on peut remplacer par une hélice croissante Z grâce à (1.1). La formule (ii) montre alors que Z admet comme mesure de Palm, le théorème est montré.

REMARQUES 1/ il y a donc identité entre les mesures bornées ne chargeant pas les ensembles polaires, et les hélices croissantes intégrables Z (c'est-à-dire telles que $E(Z_1)<\infty$). En revanche, il n'est pas possible d'obtenir les mêmes résultats pour les mesures qui sont seulement $\sigma$-finies: si $\mu$ est une telle mesure, $\mu=\sum\mu_n$, où les $\mu_n$ sont deux à deux étrangères et bornées, donc associées à une hélice croissante $Z^n$; il se peut alors (les contrexemples sont aisés à construire) que l'on ait $\sum Z_1^n=+\infty$, auquel cas il n'existe pas d'hélice croissante associée à $\mu$ !

2/ finalement, pour les hélices croissantes intégrables, les formules du théorème (3.7) permettent de construire leurs projections duales.

Nous dirons qu'une hélice H est une hélice à accroissements orthogonaux (nous dirons aussi HAO) si elle satisfait à

(iii) $H_t\in L^1(P)$ $\forall t\in\mathbb{R}$; $E(H_{t+s}|\underline{\underline{F}}_t) = H_t$ $\forall t\in\mathbb{R},\forall s\geq 0.$

Nous dirons que H <u>appartient à</u> $L^2_{loc}$ si elle satisfait en outre à $E(H_t^2)<\infty$ $\forall t\in\mathbb{R}$. Autrement dit, toute HAO appartenant à $L^2_{loc}$ définit sur $\mathbb{R}_+$ une martingale localement de carré intégrable sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,P)_{t\geq 0}$. On montre dans LAZARO-MEYER(14) que

(3.9) THEOREME: <u>si H est une HAO appartenant à $L^2_{loc}$, il existe une hélice croissante intégrable unique notée $\langle H,H\rangle$, prévisible sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,P)_{t\in\mathbb{R}}$, telle que</u> $E(H^2_{t+s}-H^2_t|\underline{\underline{F}}_t)$ = $E(\langle H,H\rangle_{t+s}-\langle H,H\rangle_t|\underline{\underline{F}}_t)$ $\forall t\in\mathbb{R},\forall s\geq 0$.

Les notions dont nous allons parler maintenant sont introduites dans GEMAN-HOROWITZ(9) afin de montrer le théorème (3.8), mais elles ont leur intérêt propre. Nous dirons qu'une fonction $\underline{\underline{F}}_{0+}$-mesurable et positive f est <u>excessive</u> (il faudrait plutôt dire 1-excessive) si le processus $(e^{-t}f\circ\theta_t)_{t\geq 0}$ est une surmartingale, et, par voie de conséquence un potentiel. Nous dirons que f est excessive <u>de la classe (D)</u> si ce potentiel est de la classe (D). Donnons un premier résultat élémentaire:

(3.10) THEOREME; <u>soit f une fonction excessive de la classe (D); il existe une hélice croissante intégrable $Z^f$ unique, telle que $dA_u = e^{-u}dZ^f_u$ soit le processus croissant associé au potentiel $(e^{-t}f\circ\theta_t)$. Réciproquement, toute hélice croissante intégrable engendre de cette manière une fonction excessive de la classe (D), unique à un ensemble polaire près</u>.

DEMONSTRATION: nous commençons par la seconde assertion, qui est la plus aisée. Soit Z une hélice croissante intégrable; le processus croissant défini par $dA_u=e^{-u}dZ_u$ satisfait à $E(A_\infty)<\infty$, nous pouvons donc considérer le potentiel qu'il engendre, soit $Y_t=E(A_\infty-A_t|\underline{\underline{F}}_t)$ ce potentiel. Le processus $(e^tY_t)$ est donc une version de la projection bien-mesurable du processus $(e^t\int_t^\infty dA_u)_{t\geq 0} = (e^t\int_t^\infty e^{-u}dZ_u) = (\int_0^\infty dA_u\circ\theta_t)$; autrement dit, ce processus est la projection bien-mesurable d'un processus stationnaire et est de la forme $(f\circ\theta.)$, f $\underline{\underline{F}}_{0+}$-mesurable, d'après le théorème (3.3).

Voyons la réciproque, qui est un peu plus délicate. Soit f une fonction excessive de la classe (D), et soit A le processus croissant intégrable associé au potentiel $(e^{-t}f\circ\theta_t)$. La formule

$$\text{(iv)} \quad \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} Y(\omega,s)\, e^{-s}\, d\hat{Q}(\omega,s) = E\int_0^\infty Y(\theta_s\cdot,s)\, dA_s \ ,$$

où Y est $\underline{\underline{F}}_0\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$-mesurable et positif, définit, en vertu de (3.1), une mesure positive bornée sur $(\Omega\times\mathbb{R}_+,\underline{\underline{F}}_0\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+))$. La loi $\hat{Q}$ satisfait à

$$\text{(v)} \quad \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} Y(\omega,s)\, e^{-s}\, d\hat{Q}(\omega,s) = \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} Y(\omega,s)\, e^{-s}\, d\hat{Q}(\omega,s+t) \ , \ \forall t\geq 0.$$

Montrons cette formule; prenant $Y(\omega,s) = g(\theta_{-s}\omega)\cdot 1_{]v,\infty]}(s)$, où g est une fonction

$\underline{\underline{F}}_v$-mesurable, le premier membre est égal à $E(g;A_\infty - A_v) = E(g;e^{-v}f\circ\theta_v)$, tandis que le second est égal à $E(g\circ\theta_t;e^t(A_\infty - A_{v+t})) = e^t E(g\circ\theta_t;e^{-v-t}f\circ\theta_{v+t}) = E(g;f\circ\theta_v)$, ce qui montre l'égalité lorsque Y est de cette forme; mais les processus de la forme $g \otimes 1_{]v,\infty]}$, où g est $\underline{\underline{F}}_v$-mesurable, constituent une semi-algèbre de Boole qui engendre la tribu $\underline{\underline{F}}_0 \otimes \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$, la formule (v) est donc montrée. Mais cette formule, jointe à un raisonnement classique, permet d'affirmer que la mesure $\hat{Q}$ est en fait une mesure produit de la forme $Q^f \otimes du$, où $Q^f$ est une mesure sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_0)$; d'après (iv), cette mesure ne charge pas les ensembles polaires (prendre $Y=g\circ\theta.$). Les théorèmes (3.8) et (3.7) permettent alors d'affirmer l'existence d'une hélice croissante prévisible $Z^f$ dont la mesure de Palm restreinte à $\underline{\underline{F}}_0$ coïncide avec $Q^f$. Le fait que $e^{-u}dZ^f_u$ engendre le potentiel $(e^{-t}f\circ\theta_t)$ provient alors de la formule (iv) et de la formule du théorème (3.6), le théorème est démontré.

En fait, toujours suivant (9), on peut aller plus loin, en utilisant les mesures de Föllmer lorsque la fonction excessive f n'est plus de la classe (D); rappelons ce qu'est la mesure de Föllmer d'un potentiel Y défini sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,P)$: c'est (lorsqu'elle existe) l'unique mesure définie sur $\underline{\underline{P}}(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant à $Q^Y(B^v \times ]v,\infty[) = E(B^v;Y_v)$, pour $B^v \in \underline{\underline{F}}_v$; lorsque Y est de la classe (D), cette mesure existe toujours: c'est la mesure engendrée par le processus croissant associé à Y; lorsque Y n'est pas de la classe (D), cette mesure n'existe que si l'espace $\Omega$ est suffisamment "gros", elle peut alors charger des ensembles évanescents (cf. FÖLLMER(7)). Dans le cas qui nous occupe, il est possible, partant de la mesure de Föllmer associée au potentiel $(e^{-t}f\circ\theta_t)$, de recopier la démonstration précédente jusqu'à l'obtention de la mesure $Q^f$ qui n'est plus alors une mesure de Palm; c'est donc vers la caractérisation de $Q^f$ que va se tourner notre généralisation. Mais, plutôt que d'utiliser cette méthode, comme le font Geman et Horowitz dans (9), nous allons remplacer la référence aux résultats difficiles de Föllmer par une construction simple et directe de la mesure $Q^f$.

(3.11) THEOREME (GEMAN-HOROWITZ(9)): <u>soit</u> f <u>une fonction excessive quelconque, et soit</u> $\tilde{Q}^f$ <u>la mesure de Föllmer du potentiel</u> $(e^{-t}f\circ\theta_t)$; <u>on a</u>

$$\tilde{Q}^f(Y\circ\theta^+) = \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} Y(\omega,s)\, e^{-s}ds\; Q^f(d\omega),\quad Y \in \underline{\underline{F}}_0 \otimes \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\ ,$$

<u>où</u> $Q^f$ <u>est une mesure positive bornée sur</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}}_0)$, <u>que nous appellerons *mesure de Revuz* associée à</u> f. <u>Réciproquement, si</u> Q <u>est une mesure positive bornée sur</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}}_0)$ <u>telle que la mesure sur</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}}_0)$ <u>définie par</u> $B \rightarrow Q\int_0^\infty B\circ\theta_{-s}e^{-s}ds$ <u>soit absolument continue par rapport à</u> P, Q <u>est alors la mesure de Revuz d'une fonction excessive unique à un ensemble polaire près. Enfin,</u> f <u>est de la classe (D) si et seulement si</u> $Q^f$ <u>ne charge pas les ensembles polaires.</u>

REMARQUE: l'existence de la mesure $Q^f$ n'est pas toujours assurée; elle l'est si $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)$ satisfait à la propriété suivante:

(vi) toute famille $(Q^t)_{t<0}$ de mesures positives bornées définies respectivement sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)_{t<0}$, telle que la restriction à $\underline{\underline{F}}_s$ de $Q^t$ pour $s\leq t$ coïncide avec $Q^s$, définit une mesure positive bornée unique $Q$ sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_0)$ par la formule $Q(B^s)=Q^s(B^s)$ pour $B^s\in\underline{\underline{F}}_s, s<0$.

Il est montré dans PARTHASARATHY(20) que $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)$ satisfait à cette propriété si cet espace filtré est un <u>système standard</u> ce qui signifie que

(vii) – $\forall t\in\mathbb{R}$ $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)$ est isomorphe à un borélien d'un espace Polonais;
– pour toute suite croissante de réels $(t_n)$, et toute suite décroissante $(A_n)$ d'atomes de la tribu $\underline{\underline{F}}_{t_n}$, on a $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$.

Nous montrons en annexe le résultat suivant:

(3.12) LEMME: <u>si la tribu $\underline{\underline{F}}_0$ est à base dénombrable, on peut transporter le flot $(\Omega,\underline{\underline{F}}_\infty,\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,P)$ sur une réalisation qui satisfasse à (vii)</u>.

DEMONSTRATION DE (3.11): la dernière assertion résulte de (3.10); la réciproque de la première assertion se montre comme la première assertion de (3.10). Nous allons donc construire la mesure $Q^f$, sous hypothèse (vi), naturellement. Posons $f_t=f\circ\theta_t.e^{-t}$; ne connaissant pas l'existence d'une mesure analogue à celle définie au membre de droite de (iv), nous ne pouvons définir comme en (iv) la mesure $\hat{Q}$ sur $\underline{\underline{F}}_0\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$; nous allons néanmoins, en imitant cette procédure, obtenir cette mesure $\hat{Q}$ sur une tribu plus petite. Désignons par par $\theta^+(\underline{\underline{F}}_0\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+))$ la tribu constituée des processus de la forme $Y(\theta_{-t}\omega,t)$, $Y\in\underline{\underline{F}}_0\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$, et définissons sur cette tribu la mesure $\hat{Q}$ par la formule

$$\text{(viii)}\quad \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} Y(\theta_{-s}\omega,s)\, e^{-s}\, d\hat{Q}(\omega,s) = E(B;f_t), \quad \text{avec } Y = 1_B\otimes 1_{]t,\infty[},\ B\in\underline{\underline{F}}_0,\ t\geq 0.$$

On montre encore que la mesure $\hat{Q}$ satisfait à (v) pour $Y\in\theta^+(\underline{\underline{F}}_0\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+))$. D'autre part, il est aisé de voir que les processus $Y^t= B\circ\theta_{-t}\times]0,t]$, $t\geq 0$, $B\in\underline{\underline{F}}_0$, engendrent cette dernière tribu; il en résulte en particulier que la trace de cette tribu sur $\Omega\times]0,t]$ contient la tribu produit $\underline{\underline{F}}_{-t}\otimes\underline{\underline{B}}(]0,t])$; une nouvelle fois, (v) permet d'affirmer que, sur $(\Omega\times]0,t],\underline{\underline{F}}_{-t}\otimes\underline{\underline{B}}(]0,t]))$, la mesure $\hat{Q}$ est une mesure produit de la forme $Q^t\otimes du$, où $Q^t$ est une mesure positive bornée sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_{-t})$; pour $s\geq t$, la restriction à $\underline{\underline{F}}_{-s}$ de $Q^t$ coïncide avec $Q^s$, ce qui, grâce à (vi), définit par prolongement une mesure sur $\underline{\underline{F}}_0$. Il reste à montrer que $Q$ est bien la mesure $Q^f$ cherchée, ce qui revient à montrer que la formule du théorème (3.11) définit bien la mesure de Föllmer du potentiel $(f_t)$. Or, par construction de $Q$, les mesures $\hat{Q}$ et $Q\otimes du$ coïncident sur les ensembles de la forme $B\circ\theta_{-t}\times]0,t]$, $t\geq 0$, $B\in\underline{\underline{F}}_0$, donc aussi sur la tribu $\theta^+(\underline{\underline{F}}_0\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+))$; cela permet en particulier d'écrire $Q\int_0^\infty B\circ\theta_{-t}e^{-t}dt = E(B;f)$, $B\in\underline{\underline{F}}_0$, d'où par stationnarité $B\int_t^\infty B\circ\theta_{-s}e^{-s}ds = E(B;f_t)$, $B\in\underline{\underline{F}}_t$, ce qui est le résultat cherché.

Annexe: une réalisation standard du flot $(\Omega,\underline{\underline{F}}_{\infty},\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,P)$ dans le cas où la tribu $\underline{\underline{F}}_0$ est à base dénombrable.

Tout au long de cette annexe, nous supposerons que $\underline{\underline{F}}_0$ est à base dénombrable. Notre méthode va consister simplement à "grossir" convenablement $\Omega$, de façon à le rendre assez riche pour que les mesures de Revuz soient portées par lui. Il est clair qu'une hypothèse du type "système standard" est nécessaire: si $Q^f$ est la mesure de Revuz d'une fonction excessive, portée par un ensemble polaire, nous pouvons jeter cet ensemble polaire, cela donnera encore une réalisation convenable du flot, à ceci près que, sur celle-ci, f ne possèdera plus de mesure de Revuz!

D'après la remarque 2 suivant (§1,viii), nous pouvons supposer que

(ix) $\underline{\underline{F}}_0$ est engendrée par une famille dénombrable $(g^n)$ de fonctions satisfaisant à: $0\leq g\leq 1$, $|g\circ\theta_t-g|\leq(1-e^{-t})+(1-e^t)$.

Nous allons compactifier $\Omega$ à l'aide de la famille dénombrable $(g^n\circ\theta_t)_{n\in\mathbb{N},t\in\mathbb{Q}}$; puisque nous ne nous intéressons qu'à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ sur $\Omega$, nous pouvons supposer que la famille $(g^n\circ\theta_t)$ sépare les points de $\Omega$. Considérons l'injection i de $\Omega$ dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$:

$$i:\ \omega \longrightarrow (g^n\circ\theta_t(\omega))_{n\in\mathbb{N},t\in\mathbb{Q}}\ ,$$

et notons $\bar{\Omega}$ la fermeture de $i(\Omega)$ dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$; si nous identifions $\Omega$ et $i(\Omega)$, $\Omega$ n'est pas en général borélien dans $\bar{\Omega}$, mais toute fonction $\underline{\underline{F}}_{\infty}$-mesurable sur $\Omega$ admet un prolongement borélien à $\bar{\Omega}$; autrement dit, si nous notons $\underline{\underline{F}}'$ la tribu borélienne sur $\bar{\Omega}$, $\underline{\underline{F}}_{\infty}$ est la restriction à $\Omega$ de $\underline{\underline{F}}'$; de la même façon, si nous notons $\bar{g}^n$ le prolongement continu unique de $g^n$ à $\bar{\Omega}$, et $\underline{\underline{F}}'_0$ la tribu engendrée par la famille $(\bar{g}^n)$, $\underline{\underline{F}}_0$ est la restriction à $\Omega$ de la tribu $\underline{\underline{F}}'_0$. Munissons $\Omega$ de la topologie trace de $\bar{\Omega}$; pour tout $\omega\in\Omega$, $t\longrightarrow\theta_t\omega$ est continu de $\mathbb{R}$ dans $\Omega$ d'après le choix de la famille compactifiante; si $(\omega_n)$ est une suite de points de $\Omega$ convergeant vers $\omega'\in\bar{\Omega}$, $(\theta_t\omega_n)$ est une suite convergente dans $\bar{\Omega}$, dont nous noterons $\theta_t\omega'$ la limite, qui ne dépend pas du choix de la suite $(\omega_n)$ convergeant vers $\omega'$. Grâce à la propriété d'équicontinuité (ix), le prolongement de $\theta_t$ à $\bar{\Omega}$ ainsi obtenu satisfait à

$$\forall\omega\in\bar{\Omega},\quad t\longrightarrow\theta_t\omega \quad \text{est continu de } \mathbb{R} \text{ dans } \bar{\Omega};$$

en particulier, il vient que $(t,\omega)\longrightarrow\theta_t\omega$ est $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\otimes\underline{\underline{F}}'$-mesurable. Il est clair que $\bar{\Omega}-\Omega$ est invariant par le groupe $(\theta_t)$ ainsi prolongé, et nous pouvons étendre la loi P à $\bar{\Omega}$ en posant $P(\bar{\Omega}-\Omega)=0$. Finalement, si nous posons $\underline{\underline{F}}'_t=\theta_t^{-1}\underline{\underline{F}}'_0$, nous avons

(x) un flot $(\bar{\Omega},\underline{\underline{F}}',\underline{\underline{F}}'_t,\theta_t,P)$ isomorphe au flot initial, tel que (a): $(\bar{\Omega},\underline{\underline{F}}')$ soit un espace métrique compact séparable muni de sa tribu borélienne, (b): $\underline{\underline{F}}'_0$ soit engendrée par une famille dénombrable $(\bar{g}^n)$ de fonctions continues, (c): $\forall\omega\in\bar{\Omega}$, $t\longrightarrow\theta_t\omega$ soit continue de $\mathbb{R}$ dans $\bar{\Omega}$.

Ceci n'était que la première étape, la filtration ainsi obtenue n'étant pas en général standard. Désignons par $X$ l'application $(t,\omega) \longrightarrow \theta_t\omega$ de $(\mathbb{R}\times\overline{\Omega},\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\otimes\underline{\underline{F}}')$ dans $(\overline{\Omega},\underline{\underline{F}}'_0)$ on a $\underline{\underline{F}}'_t = \sigma(X_s,s\leq t)$, et ceci suggère de considérer $(\overline{\Omega},\underline{\underline{F}}'_0)$ comme un espace d'états, et d'associer à tout point $\omega$ sa trajectoire $t \longrightarrow X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}$ dans $(\overline{\Omega},\underline{\underline{F}}'_0)$; malheureusement, la tribu $\underline{\underline{F}}'_0$ ne sépare pas les points de $\overline{\Omega}$, nous désirons donc passer au quotient par rapport à la relation d'équivalence dont les classes sont les atomes de $\underline{\underline{F}}'_0$; pour cela, il nous faut montrer que, si $\omega$ et $\omega'$ sont tels que $X_t(\omega)$ et $X_t(\omega')$ appartiennent au même atome de $\underline{\underline{F}}'_0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, alors $\omega=\omega'$; mais, revenant à la définition de $\underline{\underline{F}}'_0$, cela signifie que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in\mathbb{R}$, on a $\overline{g}^n(\theta_t\omega)=\overline{g}^n(\theta_t\omega')$, et cela implique bien $\omega=\omega'$, puisque les fonctions $(\overline{g}^n\circ\theta_t)$ séparent les points de $\overline{\Omega}$.
Nous noterons $(E,\underline{\underline{E}})$ l'espace obtenu à partir de $(\overline{\Omega},\underline{\underline{F}}'_0)$ en confondant les points appartenant à un même atome: c'est un espace métrique compact muni de sa tribu borélienne, puisque nous pouvons aussi l'obtenir en munissant $\overline{\Omega}$ de la topologie non séparée engendrée par la famille $(\overline{g}^n)$ puis en passant au quotient. Nous allons maintenant décrire la réalisation annoncée. Adjoignons à $E$ un point isolé $\delta$, et soit $W$ l'ensemble des applications $w$ de $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ dans $E\cup\{\delta\}$ telles que

(xi) (a): l'ensemble $(t\in\mathbb{R}\cup\{\infty\},w(t)=\delta)$ soit un intervalle de la forme $[s,\infty[$; (b): la trajectoire $w$ soit continue sur $]-\infty,s[$, et limitée à gauche en $s$; on pose alors $\zeta(w)=s$ $(\leq+\infty)$.

Définissons l'application $X$ de $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\})\times W$ dans $E$ par $X_t(w)=w(t)$; nous munissons $W$ des tribus $\underline{\underline{G}}_t=\sigma(X_s,s\leq t)$, $\underline{\underline{G}}=\underline{\underline{G}}_\infty$; définissons le groupe $(\theta_t)$ des translations sur $W$ par $\theta_t w(s)=w(s+t)$, on a $\underline{\underline{G}}_t=\theta_t^{-1}\underline{\underline{G}}_0$. Si nous considérons l'injection de $\overline{\Omega}$ dans $W$ qui à tout point $\omega$ associe sa trajectoire, nous pouvons transporter la loi $\mathbb{P}$ sur $W$: la nouvelle loi $P$ ainsi obtenue est invariante par $\theta_t$ et portée par l'ensemble $(\zeta=+\infty)$. Finalement,

(xii) les flots $(\Omega,\underline{\underline{F}}_\infty,\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,P)$ et $(W,\underline{\underline{G}},\underline{\underline{G}}_t,\theta_t,P)$ sont isomorphes,

et nous avons rempli notre contrat, puisqu'il est connu que la filtration $(W,\underline{\underline{G}}_t)$ est standard (cf. FÖLLMER(7), P.A.MEYER(17)).

§4: Premiers résultats relatifs au flot spécial sous une fonction, application aux flots propres.

Dans tout ce paragraphe, nous supposerons que le flot $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,P)$ satisfait à l'hypothèse (2.3); nous travaillerons également sur le flot $(W,\hat{\underline{\underline{F}}},\hat{\underline{\underline{F}}}_t,\hat{\theta}_t,\hat{P})$ tel qu'il est décrit au §2; pour la commodité, nous rassemblons les notations concernant ce flot

On rappelle que $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ désigne la suite des temps de saut du compteur fondamental, avec la convention $V_0 = \sup(t<0, N_t - N_{t-}=1)$, et que $X = (V_1=0)$. Nous posons $V = V_{2|X}$, et W est alors défini par $W = ((x,u)\in X\times\mathbb{R}, 0<u\leq V(x))$. Nous notons $\underline{\underline{X}}$ la trace sur X de la tribu $\underline{\underline{F}}$, et $\hat{\underline{\underline{F}}}$ est alors la trace sur W de $\underline{\underline{X}}\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$. L'espace $(W,\hat{\underline{\underline{F}}})$ est muni de la loi $\hat{P}$ qui est la restriction à W de la mesure produit $\mu\otimes du$, où $\mu$ est la mesure de Palm du compteur fondamental N, dite mesure fondamentale. La formule $Sx = \theta_V(x)$ définit un automorphisme S sur $(X,\underline{\underline{X}},\mu)$. Si nous transportons le compteur fondamental sur W, en notant $\hat{N}$ le compteur ainsi obtenu, les temps de saut de $\hat{N}$ sont donnés par

$$\hat{V}_0(x,u) = -u; \qquad \hat{V}_k(x,u) \begin{cases} = \sum_{0\leq m<k} V(S^m x) - u & \text{pour } k>0, \\ = -\sum_{k\leq m<0} V(S^m x) - u & \text{pour } k<0 . \end{cases}$$

Les formules définissant le flot $(\hat{\theta}_t)$ sur $(W,\hat{\underline{\underline{F}}}_t,\hat{P})$ sont alors

$$\hat{\theta}_t(x,u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (S^k x, t-\hat{V}_k(x,u)).1_{(\hat{V}_k<t\leq\hat{V}_{k+1})}(x,u) .$$

Nous avons vu que les flots $(\Omega,\underline{\underline{F}},\theta_t,P)$ et $(W,\hat{\underline{\underline{F}}},\hat{\theta}_t,\hat{P})$ sont isomorphes, l'isomorphisme étant donné par

$\Phi$: $(x,u) \longrightarrow \theta_u x$, mesurable de $(W,\hat{\underline{\underline{F}}})$ dans $(\Omega,\underline{\underline{F}})$;

$\Phi^{-1}$: $\omega \longrightarrow (\theta_{V_0}\omega, -V_0(\omega))$, mesurable de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ dans $(W,\hat{\underline{\underline{F}}})$.

Au §2, nous n'avions pas introduit de filtration sur le nouveau flot: nous allons simplement le munir de la filtration $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$ obtenue en transportant sur W la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ à l'aide de $\Phi$. Enfin, nous munissons X de la famille croissante de tribus définie par

(i) $\quad \underline{\underline{X}}_t = \underline{\underline{F}}_{t|X}$, pour $t>0$ .

Nous avons indiqué en (2.6) comment les fonctions $\hat{f}$ définies sur $(W,\hat{\underline{\underline{F}}})$ correspondent aux processus $(f_u)_{u>0}$ définis sur X, et à support dans l'intervalle stochastique $]\!]0,V]\!]$. En reprenant les notations de (2.6) on a (nous renvoyons au §3 pour les notations de théorie générale des processus)

(4.1) THEOREME: (a) $W \in \underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{X}}_t)_{t\geq 0}$ ;

(b) $( (f_u) \in \underline{\underline{O}}(X,\underline{\underline{X}}_t)_{t\geq 0} ) \Longleftrightarrow ( (\hat{f}\circ\hat{\theta}.) \in \underline{\underline{O}}(W,\hat{\underline{\underline{F}}}_t)_{t\in\mathbb{R}} )$ ;

(c) $( (f_u) \in \underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{X}}_t)_{t\geq 0} ) \Longleftrightarrow ( (\hat{f}\circ\hat{\theta}.) \in \underline{\underline{P}}(W,\hat{\underline{\underline{F}}}_t)_{t\in\mathbb{R}} )$ .

DEMONSTRATION: (a) cette assertion a bien un sens, moyennant la convention qui a été faite; si nous considérons $W$ comme sous-ensemble de $\Omega\times\mathbb{R}$, on a $W = (X\times\mathbb{R})\cap ]\!]0,V_2]\!]$, qui appartient à $\underline{\underline{P}}(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)$; par ailleurs, un processus algébriquement prévisible sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)$ et à support dans $X\times\mathbb{R}_+$ est encore algébriquement prévisible sur $(X,\underline{\underline{X}}_t)$, d'où le résultat.

(c): nous notons $\underline{\underline{P}}$ pour $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{X}}_t)$; il revient au même de montrer (c) et

(c') $\quad \hat{\underline{\underline{F}}}_0 = \underline{\underline{P}}_{|W}$ ,

puisqu'un processus stationnaire est algébriquement prévisible sur $(W,\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$ si et seulement si il est de la forme $(\hat{f}\circ\hat{\theta}.)$, $\hat{f}\in\hat{\underline{\underline{F}}}_0$.

Montrons $\underline{\underline{P}}_{|W}\subset\hat{\underline{\underline{F}}}_0$; il suffit de montrer que tout processus sur $X$ de la forme $\hat{B}^s = A^s\times]s,\infty[$, $A^s\in\underline{\underline{X}}_s$, est tel que $\hat{B}^s\cap W\in\hat{\underline{\underline{F}}}_0$; en utilisant l'isomorphisme entre $W$ et $\Omega$, cela revient à montrer que $\Phi(\hat{B}^s\cap W)\in\underline{\underline{F}}_0$. Or, on a

$$1_{(\hat{B}^s\cap W)}\circ\Phi^{-1}(\omega) = 1_{\hat{B}^s\cap W}(\theta_{V_0}\omega,-V_0(\omega)) = 1_{A^s}\circ\theta_{V_0}(\omega)\cdot 1_{(s<-V_0)}(\omega)$$

$$= 1_{A^0}\circ\theta_{s+V_0}(\omega)\cdot 1_{(s+V_0<0)}(\omega),$$

où $A^0 = A^s\circ\theta_{-s}\in\underline{\underline{F}}_0$; il reste alors à appliquer le lemme (1.3).

Montrons $\hat{\underline{\underline{F}}}_0\subset\underline{\underline{P}}_{|W}$. Soit $\hat{f}\in\hat{\underline{\underline{F}}}_0$, continue sur les trajectoires du flot, et soit $f = \hat{f}\circ\Phi^{-1}\in\underline{\underline{F}}_0$. Le processus stationnaire $(f\circ\theta.)$ étant algébriquement prévisible sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)$, la relation $f_u(x)=f(\theta_u x)$, $u\geq 0$, $x\in X$, définit un processus algébriquement prévisible sur $(X,\underline{\underline{X}}_t)$. Le résultat provient alors de ce que l'on a $\hat{f}(x,u)=f_u(x)$ pour $0<u\leq V(x)$.

(b) $\Longleftarrow$ : le raisonnement est en tout point identique à celui que nous venons de faire dans le cas prévisible.

$\Longrightarrow$: soit $(f_u)$ un processus continu à droite et réglé, algébriquement optionnel sur $(X,\underline{\underline{X}}_t)$ (nous noterons $\underline{\underline{O}}$ pour $\underline{\underline{O}}(X,\underline{\underline{X}}_t)$). Nous procéderons en deux étapes.

Commençons par supposer que le processus stationnaire $(\hat{f}\circ\hat{\theta}.)$ soit continu à droite et réglé (il est toujours réglé d'après (2.7), mais n'est pas obligatoirement continu à droite), et que $(f_u)$ appartienne à $\underline{\underline{O}}$. Dans ce cas, il suffit de montrer que $\hat{f}$ est $\hat{\underline{\underline{F}}}_{0+}$-mesurable pour pouvoir affirmer que $(\hat{f}\circ\hat{\theta}.)$ appartient à $\underline{\underline{O}}(W,\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$. A cet effet, nous munissons le flot de la filtration en avance $(\hat{\underline{\underline{F}}}_{t+\varepsilon})_{t\in\mathbb{R}}$, où $\varepsilon$ est un réel $>0$; le processus $(f_u)$ appartient alors à $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{X}}_{t+\varepsilon})_{t>0}$, et (c) permet donc d'affirmer que $\hat{f}$ est $\hat{\underline{\underline{F}}}_\varepsilon$-mesurable pour tout $\varepsilon>0$, d'où le résultat dans ce cas.

Dans le cas général, il suffira de montrer que, si $(f_u)$ est $\underline{\underline{Q}}$-mesurable, continu à droite et réglé, et à support dans $]\!]0,V]\!]$, il peut être approché par une suite $(f_u^n)$ de processus $\underline{\underline{Q}}$-mesurables tels que $\hat{f}^n$ soit continue à droite et réglée sur les trajectoires du flot $(\hat{\theta}_t)$ pour tout $n$. Fixons $\varepsilon>0$, et définissons le processus $(f_u^\varepsilon)$ par

$$f_u^\varepsilon(x)\begin{cases} = f_u(x) & \text{pour } \varepsilon\leq u\ ,\\ = f_V\circ S^{-1}(x) & \text{pour } 0<u<\varepsilon \text{ si } \varepsilon\leq V(x),\ \text{pour } 0<u\leq V(x) \text{ sinon.}\end{cases}$$

Pour tout $\varepsilon$, $(f_u^\varepsilon)$ est continu à droite et réglé, et $\lim(f_u^\varepsilon) = f_u$ lorsque $\varepsilon\to 0$. Montrons que $\hat{f}^\varepsilon$ est continue à droite sur les trajectoires du flot; la continuité à droite en $t=0$ de $t\longrightarrow \hat{f}^\varepsilon(\theta_t w)$ est évidente pour les points de $W$ qui sont situés en dehors du graphe $[\![V]\!]$; soit donc $w=(x,V(x))\in[\![V]\!]$, on a, pour $t$ assez petit, $\hat{f}^\varepsilon\circ\hat{\theta}_t(x,V(x)) = \hat{f}^\varepsilon(Sx,t) = \hat{f}(x,V(x)) = \hat{f}^\varepsilon(x,V(x))$, d'où la continuité à droite en $t=0$ pour ces points, et, finalement, la continuité à droite partout. Pour être complet, il nous reste à montrer que le processus $(f_u^\varepsilon)$ appartient à $\underline{\underline{Q}}$ pour tout $\varepsilon>0$; il suffit clairement de montrer que $f_{0+}^\varepsilon$ appartient à $\underline{\underline{X}}_{0+}$. Fixons $\eta>0$, et munissons $X$ de la famille en avance $(\underline{\underline{X}}_{t+\eta})_{t>0}$, par rapport à laquelle $(f_u^\varepsilon)$ est algébriquement prévisible. Nous devons montrer que $f_V\circ S^{-1}=\underline{\underline{X}}_{0+}$; on a déjà $f_V\in\underline{\underline{X}}_{V-}^\eta$, où $\underline{\underline{X}}_{V-}^\eta$ désigne la tribu des ensembles $\eta$-strictement antérieurs à $V$, engendrée par les ensembles de la forme $B_t^\eta= A_t^\eta\cap(V>t)$, $A_t^\eta\in\underline{\underline{X}}_{t+\eta}$. Comme $S^{-1}$ est la restriction à $X$ de $\theta_{V_0}$, il suffit de montrer que $B_t^\eta\circ\theta_{V_0}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_\eta$ pour conclure; or, on a

$$B_t^\eta\circ\theta_{V_0} = A_0\circ\theta_{t+\eta}\circ\theta_{V_0}\cap(V\circ\theta_{V_0}<t) = A_0\circ\theta_{t+\eta+V_0}\cap(t+V_0<0),\quad \text{avec}\quad A_0\in\underline{\underline{F}}_0\ ,$$

car $V\circ\theta_{V_0}= -V_0$. Le lemme (1.3) appliqué à la filtration en avance $(\underline{\underline{F}}_{t+\eta})_{t\in\mathbb{R}}$ permet alors d'affirmer que $B_t^\eta\circ S^{-1}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_\eta$, donc à $\underline{\underline{X}}_\eta$, ce qui achève la démonstration du théorème.

REMARQUE: nous voyons ici pour la première fois la raison pour laquelle nous avons choisi la forme inhabituelle pour le flot sous la fonction $V$, en excluant $[\![0]\!]$, et en incluant au contraire $[\![V]\!]$; si nous avions pris les conventions habituelles, les assertions (a) et (c) auraient nécessité que $X$ fût $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable, et non pas seulement $\underline{\underline{F}}_{0+}$-mesurable.

Nous allons donner les résultats analogues pour les hélices. Soit $Z$ une hélice sur $\Omega$, nous noterons $\hat{Z} = Z\circ\Phi$ cette même hélice transportée sur $W$. A toute hélice $Z$, on associe le processus $A^Z$ défini sur $X$ par

$$\text{(ii)}\qquad A_u^Z(x)\begin{cases} = Z_u(x) & \text{pour } 0\leq u\leq V(x)\\ = Z_V(x) & \text{pour } u>V(x).\end{cases}$$

Autrement dit, $A^Z$ est la restriction à X du processus arrêté $(Z_{u\wedge V_2})_{u\geq 0}$. Voici un résultat qui n'est pas nouveau: il a son analogue dans LAZARO(13) pour les flots sous une fonction définis de façon classique:

(4.2) THEOREME: $A^Z$ <u>détermine</u> Z; <u>nous dirons que</u> $A^Z$ <u>engendre l'hélice</u> Z.

DEMONSTRATION: il s'agit de montrer que $Z_t$ peut être calculé en fonction de $A^Z$ pour $t\geq 0$. Soit donc $\omega\in\Omega$, et $t\in ]V_m(\omega),V_{m+1}(\omega)]$ , $m\geq 0$; on a

$$\begin{aligned} Z_t(\omega) &= Z_t(\omega)-Z_{V_m(\omega)}(\omega)+Z_{V_m(\omega)}(\omega)-Z_{V_{m-1}(\omega)}(\omega)+\dots+Z_{V_1(\omega)}(\omega) \\ &= Z_{t-V_m(\omega)}(\theta_{V_m}\omega) + \sum_{1\leq k<m} Z_{(V_{k+1}-V_k)(\omega)}(\theta_{V_k}\omega) + Z_{V_1(\omega)}(\omega). \end{aligned}$$

En transportant cette formule sur W, on obtient

$$\text{(iii)}\quad \hat{Z}_t(x,u) = A^Z_{t-\hat{V}_m(x,u)}(S^m x) + \sum_{0\leq k<m} A^Z_V\circ S^k(x) - A^Z_u(x), \quad \text{où}\quad t\in ]\hat{V}_m(x,u),\hat{V}_{m+1}(x,u)] .$$

Voici maintenant pour les hélices l'analogue du théorème (4.1):

(4.3) THEOREME: (a) <u>l'hélice</u> Z <u>est algébriquement optionnelle sur</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ <u>si et seulement si le processus</u> $A^Z$ <u>l'est sur</u> $(X,\underline{\underline{X}}_t)_{t\geq 0}$;

(b) <u>l'hélice</u> Z <u>est algébriquement prévisible sur</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ <u>si et seulement si le processus</u> $A^Z$ <u>l'est sur</u> $(X,\underline{\underline{X}}_t)_{t\geq 0}$.

DEMONSTRATION: la prévisibilité (resp. la bien-mesurabilité) de Z entraine clairement, par restriction à X, celle de $A^Z$, nous laissons cela au lecteur, et montrons les réciproques.

(b): soit $A^Z\in\underline{\underline{P}}$ (pour $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{X}}_t)$). Dans une première étape, <u>nous supposerons l'existence d'un</u> $\bar{t}\geq 0$ <u>tel que</u> $A^Z_t=0$ <u>pour tout</u> $t\leq\bar{t}$; calculons le processus arrêté $(Z_{t\wedge\bar{t}})_{t\geq 0}$. Transportons-nous sur W, on a

$$\hat{Z}_{t\wedge\bar{t}}(x,u) = \hat{Z}_{t\wedge\bar{t}\wedge\hat{V}_1}(x,u) = A^Z_{t+u}(x)-A^Z_u(x) ,$$

ce qui donne, en revenant sur $\Omega$,

$$Z_{t\wedge\bar{t}}(\omega) = A^Z_{t-V_0(\omega)}(\theta_{V_0}\omega) - A^Z_{-V_0(\omega)}(\theta_{V_0}\omega).$$

Mais, il est clair que le processus $(A^Z_t(\omega))_{t\geq 0}$, prolongé par 0 en dehors de X, est algébriquement prévisible sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$; le lemme suivant nous permet alors d'affirmer que $(Z_{t\wedge\bar{t}})_{t\geq 0}$ est algébriquement prévisible sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$:

(4.4) LEMME: soit $Y \in \underline{\underline{P}}(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)_{t>0}$, et soit T une variable aléatoire $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable et $\leq 0$; le processus $Y^T$ défini par $Y^T_u(\omega) = Y_{u-T(\omega)}(\theta_T\omega)$, $u \geq 0$, appartient à $\underline{\underline{P}}(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)_{t>0}$.

DEMONSTRATION: d'après (3.1), il s'agit de montrer que $Y^T\circ\theta^-$ est $\underline{\underline{F}}_0\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$-mesurable; or, si l'on pose $Y'(u,\omega) = Y\circ\theta^-(u-T\circ\theta_{-u}(\omega),\omega)$, on a $Y^T=Y'\circ\theta^+$; le lemme provient alors de (3.1) et de ce que $Y'\in\underline{\underline{F}}_0\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$.

Revenons à la démonstration de (4.3). On a, pour $t\geq 0$ quelconque

$$Z_t = \sum_{k\geq 0} ( Z_{t\wedge(k+1)\bar{t}} - Z_{t\wedge k\bar{t}} ) = \sum_{k\geq 0} ( Z_{t\wedge(k+1)\bar{t} - t\wedge k\bar{t}} )\circ\theta_{t\wedge k\bar{t}} \ .$$

Finalement, Z est la somme des processus de la forme

$$Z'^k_t = Z_{\bar{t}}\circ\theta_{k\bar{t}}\cdot 1_{((k+1)\bar{t}<t)} \ ,$$

et

$$Z''^k_t = (Z_{t-k\bar{t}})\circ\theta_{k\bar{t}}\cdot 1_{(0<t-k\bar{t}\leq\bar{t})} \ .$$

Les processus de la forme $Z'^k$ appartiennent clairement à $\underline{\underline{P}}(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)$, tandis que la première partie de la démonstration montre que les $Z''^k$ appartiennent aussi à $\underline{\underline{P}}(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)$. De tout cela, il résulte que $(Z_t)_{t>0} \in \underline{\underline{P}}(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)_{t>0}$, ce qui est le résultat cherché, puisque Z est une hélice (cf. la remarque du début du §3).

Il reste à nous affranchir de l'existence préliminaire de $\bar{t}$: dans le cas général le processus $A^Z$ est la limite lorsque $\bar{t}\to 0$, du processus défini par $(A^Z_t-A^Z_{\bar{t}})\cdot 1_{(t>\bar{t})}$, auquel on peut appliquer le résultat précédent.

(a): supposons que $A^Z\in\underline{\underline{Q}}$. Pour tout $\varepsilon>0$, on a $A^Z \in \underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{X}}_{t+\varepsilon})_{t>0}$, d'où il vient, grâce au résultat précédent, que Z appartient à $\underline{\underline{P}}(\Omega,\underline{\underline{F}}_{t+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon>0$, donc aussi à $\underline{\underline{Q}}(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)$. Le théorème est montré.

Nous n'avons pas encore fait intervenir de mesure sur les espaces considérés, c'est ce que nous allons faire maintenant. Rappelons que, si A est un processus croissant défini sur $(X,\underline{\underline{X}}_t,\mu)$, la formule $\mu^A(f) = \mu\int_0^\infty f_u dA_u$, où f est $\underline{\underline{X}}\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$-mesurable et positive, définit une mesure positive sur $(X\times\mathbb{R}_+,\underline{\underline{X}}\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+))$, que l'on appelle la mesure associée au processus croissant A.

(4.5) THEOREME: soit $\hat{Z}$ une hélice croissante sur $(W,\hat{\underline{\underline{F}}},\hat{\theta}_t,\hat{P})$, et soit $A^Z$ le processus croissant qui engendre $\hat{Z}$; la mesure de Palm de Z est alors la mesure associée au processus croissant $A^Z$.

REMARQUE: il résulte en particulier de ce théorème que tout processus croissant arrêté à V définit une mesure $\sigma$-finie sur $X\times\mathbb{R}_+$, puisque toutes les mesures de Palm sont $\sigma$-finies (cette propriété est satisfaite par tous les processus croissants lorsque $\mu$ est bornée, mais pas lorsque $\mu$ est seulement $\sigma$-finie).

DEMONSTRATION: comme au théorème précédent, on se ramène d'abord au cas où il existe un réel $t>0$ tel que $A^Z_t=0$. Soit alors $\hat{f}$ une fonction $\hat{\underline{F}}$-mesurable et $\geq 0$ sur W, et nous notons $(f_u)$ le processus sur X associé à $\hat{f}$. L'existence de $t$ permet d'affirmer que $\hat{E}\int_{\hat{V}_1}^{t} \hat{f}\circ\hat{\theta}_s\, d\hat{Z}_s = 0$. On a alors

$$\mu^Z(\hat{f}) = \hat{E}\,\frac{1}{t}\int_0^t \hat{f}\circ\hat{\theta}_s d\hat{Z}_s = \hat{E}\,\frac{1}{t}\int_0^{t\wedge\hat{V}_1} \hat{f}\circ\hat{\theta}_s d\hat{Z}_s = \int_X d\mu(x) \int_0^{V(x)} du\ \frac{1}{t}\int_0^t f_{s+u}(x)\,dA^Z_{s+u}(x)$$

$$= \int_X d\mu(x) \int_0^{V(x)} du\ \frac{1}{t}\int_u^{t+u} f_s(x)\,dA^Z_s(x) = \int_X d\mu(x) \int_0^{V(x)} du\ \frac{1}{t}\int_{u\vee t}^{(u+t)\wedge V(x)} f_s(x)\,dA^Z_s(x)$$

$$\text{(Fubini)} = \int_X d\mu(x) \int_t^{V(x)} f_s(x)\,dA^Z_s(x)\ \frac{1}{t}\int_{s-t}^{s} du = \int_X d\mu(x) \int_0^{+\infty} f_s(x)\,dA^Z_s(x)\ ,$$

ce qui est le résultat cherché.

REMARQUE: en particulier, la mesure de Palm du compteur fondamental $\hat{N}$ est la mesure $\hat{f} \to \int_X f_V(x)\,d\mu(x)$.

Donnons une autre forme de ce résultat, qui suggère une autre méthode pour l'obtenir, analogue à celle employée en (2.5) pour caractériser la mesure de Palm des processus ponctuels stationnaires:

(4.6) COROLLAIRE: soit Z une hélice croissante sur $(\Omega,\underline{F},\theta_t,P)$; à toute fonction f, $\underline{F}$-mesurable et $\geq 0$, nous associons la fonction $\underline{F}$-mesurable $f^Z$ définie par $f^Z = 1_X.\int_{V_1}^{V_2} f\circ\theta_u dZ_u$; on a alors $E\int_0^1 f\circ\theta_u dZ_u = E\int_0^1 f^Z\circ\theta_u dN_u$, où l'on rappelle que N désigne le compteur fondamental.

Voici un autre résultat:

(4.7) THEOREME: soit $\nu$ la probabilité définie sur $(X,\underline{X})$ par $g \to \mu(g.V)$, qui est équivalente à la mesure $\sigma$-finie $\mu$; on a la relation suivante:

$$\forall\ \hat{B} \in \hat{\underline{F}},\quad \hat{P}(\ \pi_W(\hat{B}\circ\hat{\theta}.)\ ) = \nu(\ \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S^k(\pi_X\hat{B})\ )\ ,$$

où $\pi_W$ et $\pi_X$ désignent respectivement les projections sur W et sur X.

DEMONSTRATION: l'ensemble aléatoire $(\hat{B}\circ\hat{\theta}.)$ étant $\hat{\underline{F}}\otimes\underline{B}(\mathbb{R})$-mesurable, sa projection sur W est $\hat{\underline{F}}$-mesurable. D'autre part, il est clair que

$$\pi_W(\hat{B}\circ\hat{\theta}.) = (\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S^k(\pi_X\hat{B}) \times \mathbb{R}_+)\cap W ;$$

or, $\hat{B}$ étant $\underline{\underline{X}}\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-mesurable, $\pi_X\hat{B}$ est $\underline{\underline{X}}$-mesurable sur X. Comme S est un automorphisme de $(X,\underline{\underline{X}},\mu)$, il vient que $S(\pi_X\hat{B})$ est également $\underline{\underline{X}}$-mesurable: on a $A'\subset\pi_X\hat{B}\subset A''$, avec $A',A''\in\underline{\underline{X}}$, $\mu(A''-A')=0$, ce qui donne $S(A')\subset S(\pi_X\hat{B})\subset S(A'')$, avec $\mu(S(A''-A')) = \mu(A''-A')=0$. Finalement, il vient que $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S^k(\pi_X\hat{B})$ est également $\underline{\underline{X}}$-mesurable sur X. Autrement dit, il nous reste à montrer que, pour $\hat{B}$ invariant de la forme

$\hat{B} = (A\times\mathbb{R})\cap W$ , où A est S-invariant et $\underline{\underline{X}}$-mesurable,

on a $\hat{P}(\hat{B}) = \gamma(A)$. Mais, cela résulte de Fubini: $\hat{P}(\hat{B}) = \int_A d\mu(x)\int_0^{V(x)} du = \hat{\gamma}(A)$.

CONSEQUENCES FONDAMENTALES: 1/ (4.7) implique en particulier que deux processus stationnaires $(f\circ\theta.)$ et $(f'\circ\theta.)$ sont P-indistinguables si et seulement si $(f_u)$ et $(f'_u)$ sont $\mu$-indistinguables. Soit alors $(f_u)$ un processus prévisible sur $(X,\underline{\underline{X}}_t,\mu)$; ce processus est indistinguable d'un processus algébriquement prévisible sur $(X,\underline{\underline{X}}_t)$; (4.1) et (4.7) nous permettent alors d'affirmer que le processus stationnaire $(f\circ\theta.)$ est prévisible sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,P)_{t\in\mathbb{R}}$. Réciproquement, soit $(f\circ\theta.)$ un processus stationnaire prévisible sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,P)$; d'après (3.3), ce processus est indistinguable d'un processus stationnaire de la forme $(f'\circ\theta.)$, où $f'\in\underline{\underline{F}}_0$; grâce à (4.1) et (4.7), $(f_u)$, étant $\mu$-indistinguable de $(f'_u)$, est prévisible sur $(X,\underline{\underline{X}}_t,\mu)$. On a les mêmes résultats pour le cas optionnel. On peut donc étendre (4.1) au cas où les mesurabilités sont prises au sens habituel, et non plus seulement au sens algébrique.

2/ passons aux hélices croissantes. Si A est un processus croissant prévisible sur $(X,\underline{\underline{X}}_t,\mu)$, il est indistinguable d'un processus croissant appartenant à $\underline{\underline{P}}$; (4.3) et (4.7) impliquent alors que A engendre une hélice prévisible sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,P)$. Réciproquement, si Z est une hélice croissante prévisible sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,P)$, elle est entièrement définie par la restriction à $\underline{\underline{F}}_0$ de sa mesure de Palm; mais alors, cette dernière est la mesure associée à un processus croissant de $\underline{\underline{P}}$; (4.7) nous apprend alors que Z est engendrée par un processus croissant prévisible sur $(X,\underline{\underline{X}}_t,\mu)$. On a les mêmes résultats dans le cas optionnel. On peut donc étendre (4.3) pour les hélices croissantes au cas où les mesurabilités sont prises au sens habituel.

3/ dans le cas général pour les hélices, il est clair qu'un processus prévisible sur $(X,\underline{\underline{X}}_t,\mu)$ engendre un hélice prévisible. Malheureusement nous ne savons pas montrer la réciproque en général, car nous n'avons pas montré que toute hélice prévisible est indistinguable d'une hélice algébriquement prévisible. Nous allons simplement traiter un cas moins général, et qui nous suffira par la suite. Soit Z une hélice bien-mesurable, et p.s. continue à droite et réglée; nous pouvons recopier la démonstration de (1.1) pour les processus stationnaires continus à droites (mais, pas pour ceux qui sont continus à gauche, là est la difficulté dans le cas prévisible), et remplacer Z par un processus Z', algébriquement optionnel sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)$, satisfaisant identiquement à la relation des hélices, mais dont on peut seulement affirmer qu'il est p.s. continu à droite et réglé; par contre, cette dernière propriété a lieu sur un ensemble invariant et plein, dont nous jetons momentanémént le complémentaire. Sur le reste, $Z'$ est une hélice algébriquement optionnelle qui est donc engendrée par un processus $A'$, algébriquement optionnel sur $(X,\underline{\underline{X}}_t)$; si l'on rajoute alors le morceau enlevé, il vient que $A'$ est optionnel sur $(X,\underline{\underline{X}}_t,\mu)$, et il en est de même, par $\mu$-indistinguabilité, pour $A$. Finalement, une hélice p.s. réglée est bien-mesurable sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,P)$ si et seulement si elle est engendrée par un processus bien-mesurable sur $(X,\underline{\underline{X}}_t,\mu)$.

Il faudrait bien entendu prendre certaines précautions pour ces énoncés dans le cas où $\mu$ est seulement $\sigma$-finie, et non pas bornée, nous reviendrons là dessus ultérieurement.

(4.8) THEOREME DE SECTION PAR LES COMPTEURS: pour tout $\hat{B}\in\hat{\underline{\underline{F}}}$, et tout $\varepsilon>0$, il existe un compteur $\hat{N}^B$ porté par $\hat{B}$, tel que

$$\hat{P}(\ \pi_W(\hat{B}\circ\hat{\theta}.)\ ) < \hat{P}(\ W^{(\hat{N}^B)}\ ) + \varepsilon;$$

si, de plus, le processus $(1_{\hat{B}}\circ\hat{\theta}.)$ est prévisible (resp. bien-mesurable), on peut choisir pour $\hat{N}^B$ un compteur prévisible (resp. bien-mesurable).

Pour la définition de $W^{(\hat{N}^B)}$, nous renvoyons le lecteur à (§1,v). Par ailleurs, on rappelle que, si $Z$ est une hélice croissante,, et $f$ une fonction $\underline{\underline{F}}$-mesurable et $\geq 0$, on désigne par $f.Z$ l'hélice croissante définie par $(f.Z)_t = \int_0^t f\circ\theta_u dZ_u$. Enfin, on dit qu'une hélice croissante $Z$ est portée par $A\in\underline{\underline{F}}$ si l'on a $Z = 1_A.Z$.

DEMONSTRATION: il suffit de traiter les cas prévisible et bien-mesurable, le cas général s'en déduisant par application de l'un ou l'autre avec la filtration triviale $\underline{\underline{F}}'_t=\underline{\underline{F}}$. Grâce à la remarque 1/ suivant (4.7), nous commençons par nous ramener aux mesurabilités algébriques: nous supposons donc que $\hat{B}$ appartient à $\underline{\underline{P}}$ (resp. à $\underline{\underline{O}}$). D'après (4.7) il existe $m\in\mathbb{Z}$ et $p\in\mathbb{N}$ tels que

$$\text{(iv)}\qquad \nu\Big(\bigcup_{m\leq n<m+p} S^n(\pi_X\hat{B})\ \Big) > \hat{P}(\ \pi_W(\hat{B}\circ\hat{\theta}.)\ ) - \varepsilon/2.$$

Nous désirons maintenant appliquer le théorème de section (ordinaire) à $\hat{B}$, considéré comme ensemble aléatoire sur $(X,\underline{\underline{X}}_t,\mu)$; malheureusement, il y a là une difficulté dûe au fait que $\mu$ est $\sigma$-finie, et non pas bornée. Mais, d'après la conséquence importante du théorème (3.7), $X$ est réunion d'une suite $(X_p)$ d'éléments de $\underline{\underline{X}}_{0+}$ deux à deux disjoints, tels que $\mu(X_p)<\infty$ pour tout $p$. Le théorème (4.7) implique alors l'existence d'un ensemble $X'$ appartenant à $\underline{\underline{X}}_{0+}$, tel que

(v) $\qquad \nu(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S^k X') \geq 1-\varepsilon/4$ ,

et nous pouvons appliquer les théorèmes de section en nous restreignant à X'. Il existe un temps d'arrêt D, algébriquement prévisible (resp. optionnel), satisfaisant à

(vi) $\qquad [\![D]\!] \subset \hat{B}\cap(X'\times\mathbb{R})$ ; $\mu(\pi_X[\![D]\!]) \geq \mu(\pi_X\hat{B}\cap X') - \eta$ ,

où $\eta$ est choisi tel que $\mu(A)<p\eta \Longrightarrow \nu(A)<\varepsilon/4$ pour tout $A\subset \bigcup_{m\leq n<m+p} S^n X'$, ce qui est possible parce que $\mu$ et $\nu$ sont, restreintes à $\bigcup_{m\leq n<m+p} S^n X'$, deux mesures bornées équivalentes (MEYER(18,VIII,9.2)).

Revenons à W tout entier, sur lequel nous considérons le compteur $N^D$ engendré par le processus croissant $A_t=1_{(D\leq t)}$ ; d'après (4.3) ce compteur satisfait aux conditions de mesurabilité requises, et il reste à vérifier l'inégalité du théorème. D'une part, $N^D$ est clairement porté par $\hat{B}$. D'autre part, on a

(vii) $\qquad W^{(N^D)} = (\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S^k(\pi_X[\![D]\!])\times\mathbb{R})\cap W$ ;

mais, $\mu$ étant S-invariante, (vi) implique

$$\mu(\bigcup_{m\leq n<m+p} S^n(\pi_X[\![D]\!])) \geq \mu(\bigcup_{m\leq n<m+p} S^n(\pi_X\hat{B}\cap X')) - p\eta ,$$

soit encore, d'après le choix de $\eta$,

(viii) $\qquad \nu(\bigcup_{m\leq n<m+p} S^n(\pi_X[\![D]\!])) \geq \nu(\bigcup_{m\leq n<m+p} S^n(\pi_X\hat{B}\cap X')) - \varepsilon/4.$

Finalement, en combinant (iv),(v),(viii), il vient

$$\nu(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S^k(\pi_X[\![D]\!])) \geq \hat{P}(\pi_W(\hat{B}\circ\hat{\theta}.)) - \varepsilon,$$

ce qui est exactement l'inégalité du théorème, grâce à (vii) et (4.7).

Nous allons consacrer la fin de ce paragraphe aux conséquences de (4.8) pour les flots généraux en utilisant le théorème d'Ambrose-Kakutani du §2. Nous rappelons (cf. (2.1)) qu'un flot filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,P)$ est propre si, pour tout ensenble B, invariant et $\underline{\underline{F}}$-mesurable, il existe $A\in\underline{\underline{F}}_{0}|_B$ tel que $P(A^c\cap A\circ\theta_r)>0$ pour un réel r. Nous dirons qu'un flot filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,P)$ <u>satisfait au théorème de section par les compteurs</u> si, pour tout ensemble aléatoire stationnaire $Y = A\circ\theta.$ et tout $\varepsilon>0$, il existe un compteur $N^A$ (prévisible resp. bien-mesurable si Y l'est) porté par A, et satisfaisant à l'inégalité du théorème (4.8): $P(\pi_\Omega Y)<P(\Omega^{N^A})+\varepsilon$. Le théorème (4.8), joint au

travail effectué au §2, donne le résultat suivant:

(4.9) THEOREME: <u>le flot filtré</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,P)$ <u>est propre si et seulement s'il satisfait au théorème de section par les compteurs.</u>

Voici un autre résultat que GEMAN-HOROWITZ obtiennent dans (9) directement, à l'aide d'une méthode beaucoup plus simple que la nôtre; bien entendu, ne s'intéressant pas aux flots propres, ils n'obtiennent pas la section par les compteurs.

(4.10) THEOREME: <u>soit</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}},\theta_t,P)$ <u>un flot quelconque; un ensemble</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-mesurable est alors polaire si et seulement s'il n'est chargé par aucune mesure de Palm bornée.</u>

DEMONSTRATION: nous munissons ce flot de la filtration triviale $\underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{F}}$; puis, nous le partageons en sa partie propre et sa partie triviale, comme au §2. Sur la partie triviale, le résultat provient de (2.2). Sur la partie propre, c'est une conséquence de (4.9) (il n'y a aucunue difficulté à obtenir la section à l'aide d'un compteur de mesure de Palm bornée).

§5: Où l'on continue à ramener l'étude des phénomènes stationnaires à la théorie générale des processus sur X.

Nous travaillons dans ce paragraphe sur un flot propre (satisfaisant donc à (2.3)) en utilisant les notations exposées au début du §4. Commençons par une remarque qui utilise les notations du corollaire (3.7):

REMARQUE IMPORTANTE: soit Z une hélice croissante, de mesure de Palm $\mu^Z$; nous supposons que la mesure que Z définit sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$ est $\sigma$-finie sur la tribu des prévisibles; on peut alors définir sans ambigüité (même si Z n'est pas intégrable) la projection duale prévisible $Z^3$ de Z, dont on montre exactement comme en (3.2), que c'est aussi une hélice, dont la mesure de Palm est $\sigma$-finie sur la tribu $\underline{\underline{F}}_0$ d'après la remarque qui suit le corollaire (3.7). Autrement dit, toute hélice croissante définissant une mesure $\sigma$-finie sur les prévisibles a une mesure de Palm $\sigma$-finie sur la tribu $\underline{\underline{F}}_0$. C'est en particulier vrai pour le compteur fondamental N, pour lequel on peut même exhiber les ensembles sur lesquels $\mu$ est finie: on a $\mu(V\geq t)<\infty$, d'où $\mu(V\circ S^{-1}\geq t)<\infty$, or, $V\circ S^{-1}=-V_0$ est $\underline{\underline{X}}_0$-mesurable.

Chaque fois que nous aurons besoin de l'hypothèse suivante, nous le préciserons:

(5.1) HYPOTHESE: la mesure fondamentale $\mu$ est bornée.

Sous hypothèse (5.1), on peut faire de la théorie générale des processus sur $(X,\underline{\underline{X}}_t,\mu)$: on se ramène aux "conditions habituelles" de DELLACHERIE(6) par la considération de la famille $(\overline{\underline{\underline{X}}}_t)$ obtenue en complétant dans $\underline{\underline{X}}$ relativement à $\mu$ la famille $(\underline{\underline{X}}_{t+})$. Soit alors $\hat{f}$ une fonction $\hat{\underline{\underline{F}}}$-mesurable, bornée ou positive sur W, et soit $(f_u)$ le processus qu'elle définit sur X; les processus $({}^3f_u)$ et $({}^1f_u)$, respectivement projections prévisible et optionnelle de $(f_u)$ sur $(X,\underline{\underline{X}}_t,\mu)$, sont encore portées par $]0,V]$, et définissent donc deux fonctions sur W, que nous noterons ${}^3\hat{f}$ et ${}^1\hat{f}$ respectivement.

Dans le cas général, où l'on ne fait plus l'hypothèse (5.1), soit $\underline{\underline{B}}(\mu)$ la famille des éléments B de $\underline{\underline{X}}_0$ tels que la mesure $1_B.\mu$ soit bornée. D'après la remarque ci-dessus, X est réunion dénombrable d'éléments de $\underline{\underline{B}}(\mu)$ deux à deux disjoints. Soit alors $(f_u)$ un processus sur X; on peut définir sans ambigüité un processus $({}^3f_u)$ appartenant à $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{X}}_t)$ tel que, pour tout $B\in\underline{\underline{B}}(\mu)$, le processus $(1_B.{}^3f_u)$ soit une version de la projection prévisible de $(1_B.f_u)$ sur $(B,\underline{\underline{X}}_{u|B},1_B.\mu)$ (nous utilisons là le fait que $B\times\mathbb{R}_+\in\underline{\underline{P}}$).

Moyennant cette convention, et la convention analogue pour les hélices croissantes, nous pouvons énoncer sans hypothèse (5.1) le résultat ci-dessous, où ${}^3(\hat{f}\circ\hat{\theta}.)$ et ${}^1(\hat{f}\circ\hat{\theta}.)$ désignent comme à l'accoutumée les projections prévisible et optionnelle du processus stationnaire $(\hat{f}\circ\hat{\theta}.)$ sur $(W,\hat{\underline{\underline{F}}}_t,\hat{P})$:

(5.2) THEOREME: (a) $^1(\hat{f}\circ\hat{\theta}.) = (^1\hat{f}\circ\hat{\theta}.)$ ; $^3(\hat{f}\circ\hat{\theta}.) = (^3\hat{f}\circ\hat{\theta}.)$ .

(b) $(Z^A)^1 = Z^{(A^1)}$ ; $(Z^A)^3 = Z^{(A^3)}$ .

(Les notations sont celles du §4, et $Z^A$ désigne l'hélice engendrée par A).

DEMONSTRATION: nous commençons par supposer que l'hypothèse (5.1) est satisfaite. La fonction $^1\hat{f}$ (resp. $^3\hat{f}$ ) est caractérisée par l'égalité $\mu\int_0^\infty {}^1f_u dA_u = \mu\int_0^\infty f_u dA_u$ (resp. $\mu\int_0^\infty {}^3f_u dA_u = \ldots$), où A parcourt l'ensemble des processus croissants optionnels (resp. prévisibles); il suffit en fait de se restreindre à ceux d'entre eux qui sont portés par l'intervalle stochastique $]\!]0,V]\!]$. De même, $A^1$ (resp. $A^3$ ) est caractérisé par l'égalité $\mu\int_0^\infty f_u dA_u^1 = \mu\int_0^\infty f_u dA_u$ (resp. $\mu\int_0^\infty f_u dA_u^3 = \ldots$) , où $(f_u)$ parcourt l'ensemble des processus optionnels (resp. prévisibles) à support dans $]\!]0,V]\!]$. Dans ce cas, le théorème provient alors de (4.1,3,5), de la remarque suivant (4.7), et de (3.2,3,7). L'extension au cas général est immédiate, moyennant les remarques faites au début du paragraphe.

Nous allons maintenant nous intéresser aux hélices à accroissements orthogonaux; nous allons en fait modifier la terminologie introduite au §3, qui était employée dans une rédaction antérieure (et fausse) du §5. Nous appellerons HAO toute hélice H telle que le processus $(H_t)_{t\geq 0}$ soit une martingale localement de carré intégrable; nous notons $\underline{\underline{H}}$ l'espace de Hilbert obtenu en munissant l'ensembles des HAO du produit scalaire $(H,H') \longrightarrow E(H_1H_1')$. Il est alors clair que l'on a (cf.(14)), pour tous $s,t\in\mathbb{R}$, $s\leq t$, $E((H_t-H_s)(H_t'-H_s')) = (t-s)\ E(H_1H_1')$. Si H est un élément de $\underline{\underline{H}}$, le processus croissant $\langle H,H\rangle$ associé à la martingale H est intégrable, et c'est une hélice croissante; la masse totale de la mesure de Palm de $\langle H,H\rangle$ est égale à $\|H\|^2$ ($\|H\|$ désigne la norme de l'élément H de $\underline{\underline{H}}$). D'autre part, nous appellerons HAO locale toute hélice telle que le processus $(H_t)_{t\geq 0}$ soit une martingale locale; pour tout $s\in\mathbb{R}$, le processus $(H_{t+s}-H_s)_{t\geq 0}$ est encore une martingale locale relativement à la famille de tribus $(\theta_s^{-1}\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$, et ceci permet de décomposer l'hélice H en $H^c+H^d$, où $H^c$ et $H^d$ sont deux HAO locales telles que $H_t=H_t^c+H_t^d$ donne, pour $t\geq 0$, la décomposition habituelle des martingales locales en leur partie continue et leur partie somme compensée de sauts; comme l'ensemble des $\omega$ tels que $\sum(\Delta H_u^2(\omega), s<u\leq t)<\infty$ $\forall s,t\in\mathbb{R}$ est invariant et P-plein, nous pouvons définir, comme d'habitude l'hélice croissante $[H,H]$ par $[H,H]_t = [H^c,H^c]_t + \sum(\Delta H_u^2, 0<u\leq t)$ pour $t\geq 0$, et le processus $H^2-[H,H]$ est aussi une HAO locale.

On a alors le théorème suivant, où H désigne une hélice engendrée par $A^H$:

(5.3) THEOREME: (a) supposons satisfaite l'hypothèse (5.1). Alors, H appartient à $\underline{\underline{H}}$ si et seulement si $A^H$ est une martingale sur $(X,\underline{\underline{X}}_t,\mu)$, bornée dans $L^2$. Dans ce cas, l'hélice croissante $\langle H,H\rangle$ (resp. $[H,H]$) est engendrée par le processus croissant $\langle A^H,A^H\rangle$ (resp. $[A^H,A^H]$).

(b): dans le cas général, l'espace de Hilbert $\underline{\underline{H}}$ est isomorphe à l'espace de Hilbert $L^2(\underline{\underline{X}}_V,\mu)\ominus L^2(\underline{\underline{X}}_0,\mu)$.

La partie (b) du théorème a été montrée par LAZARO(13) dans le cas particulier où l'on a $\underline{\underline{X}}_{V-}=\underline{\underline{X}}_0$, ce qui implique en particulier que le compteur fondamental est prévisible. Nous ferons la démonstration en plusieurs étapes.

DEMONSTRATION (a): $A^H$ martingale bornée dans $L^2 \Longrightarrow H\in\underline{\underline{H}}$.

Commençons par supposer l'existence d'un $t^\circ>0$ tel que $A^H_t=0$ pour $t<t^\circ$. Grâce à la propriété d'additivité des hélices, il nous suffit, pour montrer que H appartient à $\underline{\underline{H}}$, de montrer que, pour tout $t\in[0,t^\circ[$, on a

(i) $E(H_t^2)<+\infty$ ; (ii) $E(H_t|\underline{\underline{F}}_0)=0$ .

Transportons nous sur W, il vient que $\hat{H}_t=\hat{H}_{t\wedge\hat{V}_1}$ pour $t<t^\circ$; montrons (i): on a, pour $t<t^\circ$

$$\hat{E}(\hat{H}_t^2)=\hat{E}(\hat{H}^2_{t\wedge\hat{V}_1})=\mu\int_0^\infty(A^H_{t+u}-A^H_u)^2\,du=\mu\int_0^\infty du\int_u^{u+t}d\langle A^H,A^H\rangle_s$$

$$=\mu\int_0^\infty d\langle A^H,A^H\rangle_s\int_{(s-t)_+}^s du=\mu\int_{t^\circ}^\infty d\langle A^H,A^H\rangle_s\int_{s-t}^s du=t\,\|A^H_\infty\|^2_{L^2}.$$

Montrons (ii): soit $\hat{B}$ l'intersection avec W de $A^s\times]s,\infty[$, où $A^s\in\underline{\underline{X}}_{s+}$, $\hat{B}\in\hat{\underline{\underline{F}}}_0$. Alors, une application de Fubini (légitime, puisque $H_t\in L^1(P)$) donne pour $t<t^\circ$

$$\hat{E}(\hat{H}_t;\hat{B})=\int_s^\infty du\int_{A^s}(A^H_{t+u}-A^H_u)\,d\mu=0,$$

ce qui suffit pour obtenir (ii).

Passons au cas général: soit $\hat{B}^{t^\circ}=X\times]t^\circ,\infty[$, où $t^\circ>0$, c'est un élément de $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{X}}_t)$; nous pouvons donc définir l'intégrale stochastique $A^{H,t^\circ}=1_{\hat{B}^{t^\circ}}.A^H$, qui est une martingale bornée dans $L^2$, nulle avant $t^\circ$. D'après ce qui vient d'être montré, $A^{H,t^\circ}$ engendre une HAO que nous notons $H^{t^\circ}$. Soit maintenant une suite $(t^n)$ de réels $>0$ décroissant vers 0, nous allons montrer que $(H^{t^n})$ est une suite de Cauchy dans $\underline{\underline{H}}$; cette suite convergera donc vers une HAO H', mais, comme $(H^{t^n})$ converge simplement vers H, on aura H=H', et nous aurons montré (a). Pour $m\geq 0$, $H^{t^{m+n}}-H^{t^n}$ est une HAO engendrée par $A^{H,t^{m+n}}-A^{H,t^n}=1_{X\times]t^{m+n},t^n]}.A^H$ . Pour $t<t^{m+n}$, on a

$$\|H^{t^{n+m}} - H^{t^n}\|^2 = \frac{1}{t}\,\hat{E}(\,\hat{H}_t^{t^{n+m}} - \hat{H}_t^{t^n})^2 = \frac{1}{t}\mu\int_0^\infty du\int_{u\vee t^{m+n}}^{u+t\wedge t^n} d\langle A^H,A^H\rangle_s$$

$$= \frac{1}{t}\mu\int_{t^{m+n}}^{t^n} d\langle A^H,A^H\rangle_s \int_{s-t}^{s} du \leq \|A^H_{t^n}\|^2_{L^2} \longrightarrow 0\ ,$$

d'où le résultat.

$A^H$ <u>martingale locale</u> $\Longrightarrow$ H <u>HAO locale.</u>

Si $A^H$ est une martingale locale, il existe, d'après DOLEANS-MEYER(23), une suite $(R_n)$ de temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{X}}_t)$, croissant $\mu$-p.s. vers $+\infty$, et telle que, pour tout n, on ait $A^H_{t\wedge R_n} = A^n_t + V^n_t$, où $A^n$ et $V^n$ sont deux martingales uniformément intégrables arrêtées à $R_n$, $A^n$ étant bornée dans $L^2$, et $V^n$ bornée dans $L^1$ et à variation intégrable $(\mu\int_0^\infty |dV^n_s| < +\infty)$. D'après (a), $A^n$ engendre une HAO que nous notons $H^n$. Par ailleurs, on a $V^n = V^n_+ - V^n_-$, où $V^n_+$ et $V^n_-$ sont seux processus croissants intégrables adaptés, admettant même projection duale prévisible. D'après (5.2), $V^n_+$ et $V^n_-$ engendrent respectivement les hélices croissantes intégrables $Z^n_+$ et $Z^n_-$ qui admettent même projection duale prévisible; par différence, il vient que $V^n$ engendre une hélice qui est une martingale. Finalement, pour tout n, le processus $A^H_{t\wedge R_n}$ engendre une hélice qui est aussi une martingale; si noue désignons par $T_n(\omega)$ le premier temps d'entrée de la trajectoire $t \longrightarrow \theta_t\omega$ dans l'intervalle stochastique $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable $]\!]R_n,V]\!]$, cette hélice coïncide avec H jusqu'à l'instant $T_n$, et le résultat provient alors de ce que $T_n \longrightarrow +\infty$ P-p.s.

<u>Si</u> $A^H$ <u>est une martingale bornée dans $L^2$, alors,</u> $\langle A^H,A^H\rangle$ <u>engendre</u> $\langle H,H\rangle$.

En effet, $(A^H)^2 - \langle A^H,A^H\rangle$ est une martingale , qui engendre donc une HAO locale de la forme $H^2 - H^{\langle A^H,A^H\rangle}$. Or, $H^2 - \langle H,H\rangle$ est aussi une HAO locale; il vient que les deux hélices croissantes $H^{\langle A^H,A^H\rangle}$ et $\langle H,H\rangle$ ont même projection duale prévisible, et, comme elles sont toutes deux prévisibles, elles sont égales.

<u>Pour toute ~~HAO~~ locale H, il existe une suite</u> $(B_n)$ <u>d'éléments de $\underline{\underline{F}}_0$, deux à deux disjoints et de réunion $\Omega$, telle que</u> $1_{B_n}.H$ <u>soit, pour tout n, une HAO.</u>

Cela résulte simplement de ce que l'hélice croissante $[H,H]$ admet une mesure de Palm $\sigma$-finie sur $\underline{\underline{F}}_0$.

<u>Si</u> $A^H$ <u>est une martingale locale, alors</u> $[A^H,A^H]$ <u>engendre</u> $[H,H]$.

L'assertion ci-dessus permet d'affirmer que la décomposition $A^H = (A^H)^c + (A^H)^d$ engendre la décomposition $H = H^c + H^d$. On montre alors comme plus haut que $\langle (A^H)^c,(A^H)^c\rangle$ engendre $\langle H^c,H^c\rangle$, et il est par ailleurs clair que $\sum(\Delta A^H_s)^2$ engendre $\sum \Delta H^2_s$, d'où le résultat.

<u>Si $H$ appartient à $\underline{\underline{H}}$, $A^H$ est une martingale bornée dans $L^2$.</u>

Posons

$$R_n(x) = \inf(u\geq 0,\ |A_u^H|\geq n)\ .$$

On définit ainsi une suite croissante $(R_n)$ de temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{X}}_t)$ tendant $\mu$-p.s. vers $+\infty$. On a donc

$$\text{(iii)}\quad |A^H_{u\wedge R_n}| \leq |A^H_{(u\wedge R_n)-}| + 1_{(u\leq R_n)}.|\Delta A^H_{R_n}| \leq n+|\Delta A^H_{R_n}|\ .$$

Nous allons montrer que

$$\text{(iv)}\qquad \Delta A^H_{R_n} \in L^2(\mu) \subset L^1(\mu)\ ,$$

ce qui montrera d'une part que $A^H_{u\wedge R_n}$ est majoré en module par une fonction de $L^1(\mu)$ pour tout u, et d'autre part, que cette famille de fonction est bornée dans $L^2$. Considérons le processus croissant purement discontinu sur X qui admet à l'instant $R_n$ un saut unique d'amplitude $(\Delta A^H_{R_n})^2$; il engendre une hélice croissante qui est fortement majorée par $[H,H]$, hélice dont la mesure de Palm est bornée par hypothèse; la mesure associée à ce processus croissant est donc bornée, or, sa masse totale est $\mu(\Delta A^H_{R_n})^2$, et nous avons montré (iv).

D'après la conséquence 3/ suivant (4.7), $A^H$ est optionnel sur $(X,\underline{\underline{X}}_t,\mu)$. Soit $T'_n$ le premier temps d'entrée de la trajectoire $t \longrightarrow \theta_t\omega$ dans l'intervalle stochastique $]\!]R_n,V]\!]$, et soit $T_n = T'_n\wedge V_1$. Grâce au théorème d'arrêt, on a, pour tout $t\geq 0$, $E(H_{t\wedge T_n}|\underline{\underline{F}}_0)=0$. Transportons nous sur W, et appliquons cette égalité en prenant pour $\hat{B}\in\hat{\underline{\underline{F}}}_0$ l'intersection avec W de $1_{A^s}(x).1_{(s\leq u)}.pe^{-p(u-s)}$, où $A^s\in\underline{\underline{X}}_{s+}$. On obtient

$$\text{(v)}\quad 0 = \hat{E}(\hat{H}_{t\wedge T_n};\hat{B}) = \int_{A^s} d\mu(x) \int_s^{V(x)} \hat{H}_{t\wedge T_n}(x,u)\ pe^{-p(u-s)}du.$$

Par ailleurs, $\hat{H}_{t\wedge T_n}(x,u) = A^H_{t+u\wedge R_n}(x) - A^H_{u\wedge R_n}(x)$. Grâce à (iii), (iv), et à la continuité à droite de $A^H$, on peut passer à la limite en p dans (v), pour obtenir

$$0 = \int_{(V\geq s)\cap A^s} (A^H_{t+s\wedge R_n}(x) - A^H_{s\wedge R_n}(x))\ d\mu(x) = \int_{A^s} (A^H_{t+s\wedge R_n} - A^H_{s\wedge R_n})\ d\mu\ ,$$

la dernière égalité résultant de ce que $A^H_{t+s}-A^H_s=0$ sur l'ensemble $(V\leq s)$. Nous avons donc montré que le processus $(A^H_{t\wedge R_n})_{t\geq 0}$ est, pour tout n, une martingale bornée dans $L^2$. Posons $\hat{B}_n = ]\!]R_n,V]\!]\in\hat{\underline{\underline{F}}}_0$. La martingale $(A^H_{t\wedge R_n})$ engendre une HAO qui n'est autre que l'intégrale stochastique $1_{B_n^c}.H$; on a donc, pour tout n,

$$\mu(A^H_{R_n})^2 = E(\ (1_{B_n^c}.H)_1)^2 \leq E(H_1)^2\ ,$$

et le lemme de Fatou entraine alors que $\mu(A^H_\infty)^2 \leq E(H_1)^2$, et $A^H$ est bien une martingale bornée dans $L^2$.

(b): $\underline{\underline{H}}$ <u>est isomorphe à</u> $L^2(\underline{\underline{X}}_V,\mu)\ominus L^2(\underline{\underline{X}}_0,\mu)$.

Dans le cas où $\mu$ est bornée, nous avons montré en (a) que $\underline{\underline{H}}$ est isomorphe à l'espace de Hilbert obtenu en munissant l'espace des martingales bornées dans $L^2(\mu)$, nulles à l'origine et arrêtées à l'instant V, du produit scalaire $(A,A')\longrightarrow\mu(A_{oo},A'_{oo}) = \mu(A_V,A'_V)$. Ce dernier espace est isomorphe au sous-espace de $L^2(\underline{\underline{X}}_V)$ constitué des v.a. $A_V$ telles que $\mu(A_V|\underline{\underline{X}}_0)=0$, autrement dit, isomorphe à $L^2(\underline{\underline{X}}_V)\ominus L^2(\underline{\underline{X}}_0)$: on a donc déjà (b) lorsque $\mu$ est bornée.

Dans le cas général, $\mu$ est $\sigma$-finie sur $\underline{\underline{X}}_0$: il existe donc une suite $(X_n)$ d'éléments de $\underline{\underline{X}}_0$, deux à deux disjoints, de réunion X, et telle que la mesure $1_{X_n}.\mu$ soit bornée pour tout n; nous posons $W_n= X_n\times\mathbb{R}\cap W$. Soit $\underline{\underline{H}}_n$ le sous-espace de $\underline{\underline{H}}$ constitué des HAO portées par $W_n$. On peut recopier la démonstration faite en (a) (l'invariance de $X_n$ par l'automorphisme S n'est pas nécessaire) pour obtenir que $\underline{\underline{H}}_n$ est isomorphe à $L^2(X_n,\underline{\underline{X}}_V)\ominus L^2(X_n,\underline{\underline{X}}_0)$. Le résultat provient alors de ce que l'espace $L^2(\underline{\underline{X}}_V)\ominus L^2(\underline{\underline{X}}_0)$ est somme Hilbertienne de ces derniers sous-espaces, tandis que $\underline{\underline{H}}$ est somme Hilbertienne des $\underline{\underline{H}}_n$. Ceci achève la démonstration du théorème.

REMARQUES 1/: dans le cas où l'on suppose que les tribus $\underline{\underline{X}}_{V-}$ et $\underline{\underline{X}}_0$ sont égales, les martingales sur X sont constantes sur l'intervalle stochastique $]\!]0,V]\!]$; et sont donc simplement de la forme $A_u(x) = h(x).1_{(V\leq u)}$, où $h\in L^2(\underline{\underline{X}}_V)\ominus L^2(\underline{\underline{X}}_0)$, c'est exactement le résultat obtenu par LAZARO dans (13).

2/: au cours de la démonstration de (5.3), nous avons montré en supplément que <u>toute martingale locale sur</u> X <u>engendre une HAO locale</u>. Il est raisonnable de penser que la réciproque est vraie, mais je n'ai pas su la montrer dans le cas général. Par exemple, il est facile de montrer que <u>toute HAO locale à variation finie est engendrée par une martingale locale</u> (c'est une conséquence facile de (5.2)). De la même façon, on peut montrer que <u>toute HAO locale continue est engendrée par une martingale locale sur</u> X: on introduit les temps $R_n=\inf(u\geq 0,|A^H_u|\geq n)$, et l'on désigne par $T_n$ le premier temps d'entrée du flot dans $]\!]R_n,V]\!]$; on remarque alors que la martingale locale $(H_{t\wedge T_n\wedge V_1})_{t\geq 0}$ est bornée par n, et la méthode de dérivation maintenant habituelle permet de montrer que $(A^H_{u\wedge R_n})_{u\geq 0}$ est une martingale uniformément intégrable. Dans le cas général, la difficulté provient de ce que l'on n'a aucune définition explicite des temps d'arrêt qui réduisent la martingale locale H.

Passons aux fonctions excessives de HOROWITZ-GEMAN, les notations sont celles du §3. Dans ce qui suit, le mot martingale (resp. surmartingale) <u>positive</u> désigne un processus positif, non nécessairement intégrable, et qui satisfait à l'égalité des martingales (resp. à l'inégalité des surmartingales).

(5.4) THEOREME: l'hypothèse (5.1) est en vigueur. Soit $f$ une fonction excessive de la classe (D); soient $Z^f$ l'hélice croissante intégrable associée à $f$, et $A^f$ la processus croissant sur $X$ qui engendre $Z^f$. Soient

$(e^{-u}f^p_u)$ le potentiel de la classe (D) engendré sur $X$ par le processus croissant $(e^{-u}dA^f_u)$, et,

$(e^{-u}f^m_u)$ une version continue à droite de la martingale positive $\mu(\int_V^\infty e^{-s}dZ^f_s(x) \mid \underline{X}_u)$.

On a alors (a) $f_u(x) = f^p_u(x) + f^m_u(x)$ pour $(x,u)\in W$ (b) $f_u\cdot 1_{(u<V)} \in L^1(\mu)$ $\forall u$.

Réciproquement, tout processus croissant intégrable $A^f$ sur $X$ définit de cette manière une fonction excessive $f$, unique à un ensemble polaire près.

DEMONSTRATION: dire que $f$ est une fonction excessive de la classe (D) associée à $Z^f$ signifie que le processus $(e^{-t}f\circ\theta_t)$ est la P-projection bien-mesurable du processus $(\int_0^\infty e^{-s}dZ^f_s)_{t\in\mathbb{R}}$. Autrement dit, le processus stationnaire $(f\circ\theta.)$ est la projection bien-mesurable du processus stationnaire $(e^t\int_t^\infty e^{-s}dZ^f_s)_{t\in\mathbb{R}}=((\int_0^\infty e^{-s}dZ^f_s)\circ\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Si nous posons alors $\hat{g} = \int_0^\infty e^{-s}d\hat{Z}^f_s$, le théorème (5.2) nous permet d'affirmer que $\hat{f}={}^1\hat{g}$. Précisons la forme de $\hat{g}$: on a $\hat{g}(x,u) = \int_0^\infty e^{-s}d\hat{Z}^f_s(x,u)$ = (isomorphisme entre $\Omega$ et $W$) $= \int_0^\infty e^{-s}dZ^f_s(\theta_u x) = e^u\int_u^\infty e^{-s}dZ^f_s(x)$. En se rappelant que $(x,u)\in W$, on a

$$e^{-u}g_u(x) = \int_u^{V(x)} e^{-s}dZ^f_s(x) + \int_{V(x)}^\infty e^{-s}dZ^f_s(x) = \int_u^\infty e^{-s}dA^f_s(x) + \int_{V(x)}^\infty e^{-s}dZ^f_s(x) \ ,$$

d'où (a). Pour obtenir (b), remarquons que la condition "$f\in L^1(P)$" signifie que la fonction $u \to \mu(V>u; f_u)$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue, donc finie presque partout; mais, $(e^{-u}f_{u\wedge V})_{u\geq 0}$ étant une surmartingale positive, il vient que la fonction $u \to \mu(V>u; e^{-u}f_u)$ est décroissante, elle est donc finie sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle est p.s. finie. L'assertion réciproque étant immédiate, le théorème est montré.

On rappelle que, si $Q^f$ désigne la mesure de Revuz associée à la fonction excessive $f$, cette mesure est la mesure de Palm de l'hélice croissante $Z^f$, donc aussi la mesure associée au processus croissant $A^f$. Finalement, le théorème (5.4) exprime que la mesure $e^{-u}.Q^f(dx,du)$ est la restriction à $W$ de la mesure de Föllmer de la surmartingale positive $(e^{-u}f_{u\wedge V})$ sur $X$ (cela a bien un sens, grâce à l'assertion (b) du théorème). Nous allons généraliser ce résultat aux fonctions excessives quelconques:

(5.5) THEOREME: l'hypothèse (5.1) est en vigueur. Soient $f$ une fonction excessive quelconque, et $Q^f$ la mesure de Revuz qui lui est associée. Alors, $(e^{-(u\wedge V)}f_{u\wedge V})$ est une surmartingale positive sur $X$, $f_u\cdot 1_{(u<V)}$ appartient à $L^1$ pour tout $u$, et la restriction à $W$ de la mesure de Föllmer de cette surmartingale est la mesure $e^{-u}.Q^f(dx,du)$.

DEMONSTRATION: la premiére assertion s'obtient en appliquant le théorème précédent à la fonction excessive bornée $f\wedge n$, puis en passant à la limite en n. La deuxième assertion s'obtient alors exactement comme au théorème précédent. Passons à la dernière. Si $\hat{B}\in\hat{\underline{F}}_0$ est continue à gauche sur les trajectoires du flot, on a

$$\text{(vi)}\quad Q^f(\hat{B}) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} Q^f\int_0^t 1_{\hat{B}}\circ\hat{\theta}_{-s}\, e^{-s}ds = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\, \hat{E}(\hat{f};\hat{B}-e^{-t}\hat{B}\circ\hat{\theta}_t)\ .$$

Prenons pour $\hat{B}$ la restriction à W de $1_{A^V}(x).1_{(v<u)}.e^{-u}$, où $A^V\in\underline{X}_{V+}$, et calculons le dernier membre de (vi); il vient

$$\text{(vii)}\quad \int_X d\mu(x)\int_0^{V(x)} \hat{f}(x,u)\ \frac{1}{t}\ (1_{\hat{B}}(x,u) - e^{-t}1_{\hat{B}}\circ\hat{\theta}_{-t}(x,u))\ du.$$

Pour (x,u) fixé, et $t<u$, on a $\hat{\theta}_{-t}(x,u) = (x,u-t)$, ce qui donne dans ce cas $1_{\hat{B}}(x,u) - e^{-t}1_{\hat{B}}\circ\hat{\theta}_{-t}(x,u) = 1_{A^V}(x).1_{(v<u\leq v+t)}e^{-u}$; pour t assez petit, (vii) est donc équivalent à

$$\int_{A^V} d\mu(x)\ \frac{1}{t}\int_{t\vee v}^{(t+v)\wedge V(x)} e^{-u}f_u(x)\ du = \frac{1}{t}\int_{t\vee v}^{t+v} \mu(V>u;e^{-u}f_u,A)du.$$

Grâce à ce qui a été montré, on peut passer à la limite en t dans cette expression, pour obtenir $\mu(A^V;V>v;e^{-v}f_v)$; or, ceci est bien égal à $Q'(A^V x]v,\infty[\ \cap\ ]0,V])$ , en désignant par Q' la mesure de Föllmer de la surmartingale $(e^{-V}f_V)$. Le théorème est montré.

ATTENTION! il est faux, en revanche, que toute surmartingale sur X de la forme $(e^{-u}f_u)$ définisse sur W une fonction excessive $\hat{f}$: le cas où f est de la classe (D) montre qu'une condition de "recollement" est nécessaire entre $f_{0+}(Sx)$, et $f_V(x)$.

## §6: Intensité stochastique et martingales des processus ponctuels stationnaires, et le problème inverse.

Les résultats de ce paragraphe ont été obtenus conjointement avec Jean JACOD.

Nous reprenons les notations du § précédent: nous travaillons sur un flot filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,P)$ dont N désigne un compteur fondamental: on rappelle que cela signifie que N est algébriquement optionnel sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)$, et que $\Omega^N=\Omega$. Commme au §5, nous utiliserons le flot spécial sous une fonction associé. Dans tout ce §, l'hypothèse suivante sera en vigueur:

(6.1) HYPOTHESE: $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>est la famille minimale rendant le compteur</u> N <u>algébriquement optionnel, et</u> $\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{F}}_{+\infty}$.

On vérifie que l'on a $\underline{\underline{F}}_0 = \sigma(N_t-N_s;s,t\leq 0)$.

Bien entendu, la filtration ainsi obtenue n'est pas continue à droite, mais cela n'a pas d'importance, puisque les notions de prévisibilité, etc... sont définies relativement à la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+})$. Il est d'ailleurs connu (cf. LAZARO(13), JACOD(12)) que

$$\underline{\underline{F}}_{0+}= \sigma(N_t-N_s;s,t\leq 0).$$

C'est néanmoins la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ qui satisfait aux conditions spéciales du §1:

(6.2) LEMME: <u>la tribu</u> $\underline{\underline{F}}_0$ <u>ainsi définie est engendrée par une famille dénombrable de fonctions bornées et continues sur les trajectoires du flot.</u>

DEMONSTRATION: soient s et t deux réels $\leq 0$; on a $N_t-N_s = \lim \frac{1}{u}\int_0^u N_{t-s}\circ\theta_{s+v}dv$ lorsque $u\downarrow 0$; $N_t-N_s$ est donc limite d'une suite de fonctions sur $\Omega$, continues sur les trajectoires du flot, et $\underline{\underline{F}}_0$-mesurables pour $u\leq -(s\vee t)$; le lemme est donc montré dans le cas où $N_1$ (et donc aussi $N_t$ pour tout réel t) est borné. Dans le cas général, $\Omega$ est limite croissante des ensembles $B_n = (V_0\leq -1/n)$, qui appartiennent à $\underline{\underline{F}}_0$, et l'on vérifie que le compteur $N^n = 1_{B_n}.N$ satisfait à $N^n_{-1/n} \geq -1$; il reste donc à appliquer à $N^n$ le procédé de régularisation exposé plus haut. Enfin, le fait que l'on puisse choisir une famille génératrice dénombrable est alors une évidence.

Par ailleurs, la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ satisfait à la condition suivante:

(i) $$\underline{\underline{F}}_{t+} = \underline{\underline{F}}_{0+}\vee\sigma(N_s;s\leq t) \quad \text{pour } t\geq 0.$$

Il en résulte que la famille $(\underline{\underline{X}}_t)$ satisfait à $\underline{\underline{X}}_{t+}= \underline{\underline{X}}_{0+}\vee\sigma(N_s|_X;s\leq t)$ pour $t\geq 0$. Mais, les résultats obtenus aux § précédents ne concernent que les restrictions à $]\!]0,V]\!]$ des processus définis sur X; ils restent donc entièrement valides si nous remplaçons la famille $(\underline{\underline{X}}_t)$ par cette même famille arrêtée à V. C'est ce que nous faisons dans le reste de ce paragraphe, tout en continuant à noter $(\underline{\underline{X}}_t)$ la famille ainsi obtenue; on a donc

(ii) $$\underline{\underline{X}}_{t+} = \underline{\underline{X}}_{0+} \vee \sigma( 1_{(V\leq s)} ; s\leq t ) ,$$

où l'on rappelle que V est le premier temps de saut $\succ 0$ de la restriction à X de N. Voici un résultat technique bien connu (LAZARO(13),JACOD(12)); les démonstrations classiques en sont pénibles, et nous en donnons une qui est particulièrement simple:

(6.3) LEMME: les tribus $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{X}}_t)$ et $\underline{\underline{X}}_{0+}\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$ ont même trace sur $]\!]0,V]\!]$; autrement dit on a $\underline{\underline{F}}_0 = \underline{\underline{X}}_{0+}\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\big|_{]\!]0,V]\!]}$.

DEMONSTRATION: il suffit de montrer que tout élément de $\underline{\underline{P}}$ coïncide sur $]\!]0,V]\!]$ avec un élément de $\underline{\underline{X}}_{0+}\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$, la réciproque étant évidente. Cela revient à montrer que, pour tout $A\in\underline{\underline{X}}_{t+}$, l'ensemble $(A\times]t,\infty[)\cap]\!]0,V]\!]$ appartient à la restriction à $]\!]0,V]\!]$ de la tribu $\underline{\underline{X}}_{0+}\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$. D'après (ii), il suffit de vérifier cette propriété pour $A=(V\leq s)$, où $s\leq t$, auquel cas l'on a $(A\times]t,\infty[)\cap]\!]0,V]\!] =\emptyset$. Le lemme est montré.

Dans tout ce §, nous dirons que la projection duale prévisible du compteur fondamental N est l'intensité stochastique de N; nous la désignerons par Z, et nous désignerons par A le processus croissant sur X qui engendre Z; enfin, nous noterons $\underline{V}$ le processus croissant sur X qui engendre N: $\underline{V}_t=1_{(V\leq t)}$.

(6.4) THEOREME: soit F(.,t) une version régulière $\underline{\underline{X}}_{0+}$-mesurable de $\mu(V\succ t|\underline{\underline{X}}_{0+})$; l'intensité stochastique de N est alors engendrée par le processus croissant A, algébriquement prévisible sur $(X,\underline{\underline{X}}_t)$, défini par

$$A_t(x) = \int_0^{t\wedge V(x)} \frac{-F(x,du)}{F(x,u_-)}$$

DEMONSTRATION: (ce résultat est, semble-t-il, dû à PAPANGELOU(19)) le résultat est une conséquence immédiate de (5.2), et d'un théorème maintenant bien connu (DELLACHERIE(6, étude d'un exemple), CHOU-MEYER(4), JACOD(12)) selon lequel on a $\underline{V}^3$=A.

Rappelons que l'on désigne par HAO les hélices qui sont aussi des martingales sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,P)$. Nous dirons qu'une hélice est une HAO locale si elle est une martingale locale sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,P)$. On a alors le théorème de représentation suivant:

(6.5) THEOREME: <u>soit</u> H <u>une HAO locale; il existe alors une fonction $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable</u> f <u>telle que</u>

$$\text{(iii)}\quad H_t = \int_0^t f\circ\theta_s\,(dN_s - dZ_s),\qquad \text{(iv)}\quad \int_0^t |f_u(x)|\,(dV_u(x) + dA_u(x)) < +\infty \quad \mu\text{-p.s. } x.$$

<u>Réciproquement,, pour toute fonction $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable</u> f <u>satisfaisant à (iv), la formule (iii) définit une HAO locale.</u>

DEMONSTRATION: commençons par la réciproque: si f satisfait à (iv), le processus $(f\circ\theta.)$ satisfait à $\int_0^t |f\circ\theta_s|\,(dN_u + dZ_u) < +\infty$ P-p.s., et il est montré dans CHOU-MEYER (4) et JACOD(12) que le processus $f.(N-Z)$ est une martingale locale.

Toujours d'après (4) et (12), si H est une HAO locale, H est un processus à variation finie, donc de la forme $H = H^+ - H^-$. Nous montrons en annexe le résultat suivant, intéressant en soi:

LEMME: <u>les hélices croissantes</u> $H^+$ <u>et</u> $H^-$ <u>définissent des mesures $\sigma$-finies sur les prévisibles</u>.

Ceci étant admis, dire que H est une martingale locale revient à dire que $H^+$ et $H^-$ admettent même projection duale prévisible; en particulier, il existe une fonction g, $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable et $>0$ sur $\Omega$, telle que l'hélice croissante $g.(H^+ + H^-)$ soit intégrable, ce qui revient à dire que le processus croissant $\int_0^t g_u (dA_u^{H^+} + dA_u^{H^-})$ est intégrable sur X. De plus, (5.2) affirme que les processus croissants $A^{H^+}$ et $A^{H^-}$ admettent même projection duale prévisible sur X. Choisissons une fonction $h(x) > 0$ et $\underline{\underline{X}}_0$-mesurable sur X telle que la mesure $h.\mu$ soit bornée, il vient que le processus $\int_0^t g_u dA_u^H$ est une martingale uniformément intégrable sur $(X, \underline{\underline{X}}_t, h.\mu)$; le théorème de représentation de CHOU-MEYER-JACOD(4,12) nous donne alors que cette martingale est de la forme $\int_0^t f'_u (dV_u - dA_u)$, où f' est un processus prévisible sur X. Mais, cette égalité est une égalité **presque** sûre entre processus à variation finie, et reste encore vraie si l'on revient à la mesure $\mu$. Par ailleurs, on a $(1/g)|f'|.(N+Z) = H^+ + H^-$, qui est donc à valeurs finies. Il est alors clair que la fonction $f = f'/g$ satisfait aux conditions de l'énoncé.

UN EXEMPLE POUR LE THEOREME (6.4); plaçons-nous dans le cas où $(\Omega, \underline{\underline{F}}_t, \theta_t, P, N_t)$ est un processus de renouvellement: cela revient à dire que la fonction de répartition conditionnelle $F(.,t)$ introduite en (6.4) ne dépend pas de x. il vient alors que le processus croissant A qui engendre l'intensité stochastique de N est de la forme $A_t(x) = A(t \wedge V(x))$, où $A(t)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$. en particulier, le cas du processus de Poisson correspond à $F(t) = 1 - e^{-t}$, ce qui donne $A(t) = t$, soit encore $Z_t = t$, résultat bien connu.

Le problème inverse.

Nous allons consacrer la fin de ce paragraphe à parcourir le chemin inverse de celui qui a été parcouru jusqu'à présent: peut-on reconstruire un compteur à partir de son intensité stochastique?

Ce problème a été résolu par J.JACOD(12) dans le cas non stationnaire, avec $\mathbb{R}_+$ comme ensemble des temps, la réponse étant alors affirmative. Dans le cas stationnaire la situation est beaucoup plus désagréable, comme nous allons le voir: on n'est assuré ni de l'existence, ni de l'unicité. Nous allons en fait nous contenter de ramener ce problème à un autre, mieux "connu": la recherche d'une mesure invariante pour une certaine chaîne de Markov à temps dicret. Bien entendu, cela ne fait que renvoyer la balle aux spécialistes des chaînes récurrentes! Mais cela a l'avantage de montrer que les deux problèmes sont en fait de même nature.

Revenons au théorème (6.4); le processus croissant qui y est introduit est caractérisé par les propriétés suivantes, où la notation $\Delta A_t$ désigne le saut $A_t - A_{t-}$:

(A,i) $\Delta A_t(x) \leq 1$ pour tout $x$ et tout $t \geq 0$; si $\Delta A_t(x) = 1$, alors $A_s(x) = A_t(x)$ pour tout $s \geq t$; $A$ est arrêté en $V$.

(A,ii) le processus croissant $A$ est algébriquement prévisible sur $(X, \underline{\underline{X}}_t)$.

(A,iii) $\mu(A_T) = \mu(V \leq T)$ pour tout temps d'arrêt $T$ prévisible sur $(X, \underline{\underline{X}}_t)$.

Enonçons le problème inverse. Nous nous donnons, sur le système $(\Omega, \underline{\underline{F}}_t, \theta_t, N_t)$ non probabilisé, une hélice croissante Z satisfaisant aux conditions suivantes, issues des conditions (A,i et ii):

(Z,i) $\Delta Z_t(\omega) \leq 1$ $\forall \omega \in \Omega$, $\forall t \in \mathbb{R}$; si $t \in ]V_n(\omega), V_{n+1}(\omega)]$ est tel que $\Delta Z_t(\omega) = 1$, alors, $Z_.(\omega)$ est constant sur $[t, V_{n+1}(\omega)[$.

(Z,ii) Z est algébriquement prévisible sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}_t)$.

QUESTION: existe-t-il sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}_t, \theta_t)$ une loi P invariante, telle que Z soit l'intensité stochastique de N lorsque $(\Omega, \underline{\underline{F}}_t)$ est muni de la loi P? Dans l'affirmative, la loi P est-elle unique?

Bien entendu, cette question ne peut être étudiée que sur l'espace canonique des processus ponctuels stationnaires, que nous allons maintenant décrire. Nous prenons pour $\Omega$ l'ensemble des fonctions $\omega$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (à valeurs finies) purement discontinues, continues à droite, à sauts unité, nulles à l'origine, et telles que $\omega(t) \to \pm\infty$ lorsque $t \to \pm\infty$. On prend pour compteur fondamental la famille N des applications coordonnées définie par $N_t(\omega)=\omega(t)$. On munit $\Omega$ du groupe des translations $(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ défini par $N_t\circ\theta_s=N_{t+s}-N_s$, qui fait de N un compteur. On pose $\underline{\underline{F}}_t=\sigma(N_s-N_u;s,u\leq t)$, définissant ainsi une filtration du flot $(\theta_t)$ qui satisfait aux conditions habituelles en vertu de (6.2); cette filtration est la plus petite qui rende N algébriquement optionnel. Enfin, nous posons $\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{F}}_{+\infty}$.

Passons maintenant à l'étude de l'ensemble X. Posons $\ddot{X} = \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$, et désignons par $(\ddot{X}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des applications coordonnées. Introduisons sur $\ddot{X}$ la famille croissante de tribus définie par $\ddot{\underline{\underline{X}}}_n = \sigma(\ddot{X}_m,m\leq n)$, $\ddot{\underline{\underline{X}}}=\ddot{\underline{\underline{X}}}_{+\infty}$. Nous munissons $(\ddot{X},\ddot{\underline{\underline{X}}})$ de l'automorphisme $\ddot{S}$ défini par $\ddot{X}_n\circ\ddot{S} = \ddot{X}_{n+1}$, qui fait de la famille de tribus $(\ddot{\underline{\underline{X}}}_n)$ une cascade: $\ddot{\underline{\underline{X}}}_{n+1}=\ddot{S}^{-1}\ddot{\underline{\underline{X}}}_n$.

Il est alors clair que le sous-ensemble X de $\Omega$, constitué des trajectoires admettant un saut à l'instant 0, s'identifie au sous-ensemble de $\ddot{X}$ constitué des points $\ddot{x}$ tels que $\sum(\ddot{X}_m(\ddot{x}),0\leq m\leq n) \longrightarrow \pm\infty$ lorsque $n \to \pm\infty$. L'automorphisme S défini sur $(X,\underline{\underline{X}})$ est la restriction à X de l'automorphisme $\ddot{S}$ défini sur $(\ddot{X},\ddot{\underline{\underline{X}}})$. Enfin, la trace sur X de la tribu $\ddot{\underline{\underline{X}}}_0$ n'est autre que $\underline{\underline{X}}_{0+}$ (et non pas $\underline{\underline{X}}_0$!).

De même, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie sur X, se prolonge à $\ddot{X}$ par les formules

$$\ddot{V}_{n+1} = \sum_{0<m\leq n}\ddot{X}_m \text{ pour } n\geq 0, \quad =-\sum_{n\leq m<0}\ddot{X}_m \text{ pour } n<0$$

(le décalage provient de ce que nous avons convenu que $V_1|_X=0$, $V_2|_X=V$, cf.§2); en particulier, on a $V = \ddot{X}_1|_X$.

Enfin, toute mesure positive $\sigma$-finie invariante sur $(\ddot{X},\ddot{\underline{\underline{X}}},\ddot{S})$ est portée par X.

Voici une précision du lemme (6.3), suivant une idée de JACOD(12):

(6.6) LEMME: <u>tout élément de $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{X}}_t)$ coïncide sur $]\!]0,V]\!]$ avec un élément unique de la tribu $\ddot{\underline{\underline{X}}}_0\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$.</u>

DEMONSTRATION: il s'agit de montrer l'unicité, le remplacement de $\underline{\underline{X}}_{0+}$ par $\ddot{\underline{\underline{X}}}_0$ n'affectant pas l'existence. Il nous faut donc montrer que le seul élément de $\ddot{\underline{\underline{X}}}_0\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$ contenu dans $]\!]0,V]\!]$ est $\emptyset$. Soit donc $\ddot{f}$ une fonction mesurable sur $(\ddot{X}\times\mathbb{R}_+,\ddot{\underline{\underline{X}}}_0\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+))$; il existe alors une fonction $\psi$, mesurable de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\ddot{f}(\ddot{x},t) = \psi(\ddot{X}_i(\ddot{x}),t)$, où i parcourt l'ensemble $(0,-1,-2,\dots)$. D'autre part, V est la restriction à X de la coordonnée $\ddot{X}_1$ sur $\ddot{X}$. Il est alors clair que la condition "$\ddot{f}(x,t)=0$ pour $t<V(x)$" exige $\ddot{f}(\ddot{x},t)=0$ partout.

Soit maintenant $\underline{\underline{A}}$ la classe de toutes les fonctions croissantes et continues à droite définies sur $\mathbb{R}_+$, satisfaisant à: a/ $A_0=0$, b/ $\Delta A_t \leq 1$ $\forall t$, c/ $(\Delta A_s=1) \Rightarrow (A_t=A_s, \forall s\geq t)$.

Soit d'autre part Z une hélice croissante sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,\theta_t)$ satisfaisant à (Z,i et ii). Cette hélice est engendrée par un processus croissant A qui satisfait à (A,i et ii). Le lemme (6.6) nous permet de prolonger A sans ambigüité en un processus $\ddot{\underline{\underline{X}}}_0 \otimes \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$-mesurable $\ddot{A}$ sur $\ddot{X}\times\mathbb{R}_+$. J'affirme que toutes les trajectoires $t \longrightarrow \ddot{A}_t(\ddot{x})$ de $\ddot{A}$ appartiennent à la classe $\underline{\underline{A}}$ définie ci-dessus: en effet (brièvement), soit B l'ensemble aléatoire formé des couples $(\ddot{x},t)$ tels que l'une des propriétés désirées ne soit pas satisfaite; B appartient à $\ddot{\underline{\underline{X}}}_0 \otimes \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$, et le processus $\ddot{A}' = 1_{B^c}.\ddot{A}$ est alors également un prolongement convenable de A; un tel prolongement étant unique, il vient bien $B=\emptyset$.

Voici un lemme technique, dont on peut trouver une démonstration dans JACOD(11):

(6.7) LEMME: <u>les formules</u>

$$F(t) = \exp(-A_t).\prod_{s\leq t}\big((1-\Delta A_s).\exp(\Delta A_s)\big), \qquad A_t = \int_0^t \frac{-dF(s)}{F(s_-)} ,$$

<u>définissent une bijection entre la classe</u> $\underline{\underline{A}}$ <u>et la classe des fonctions de répartition décroissantes sur</u> $\mathbb{R}_+$.

En vertu de (6.6) et (6.7) il vient que la donnée d'une hélice Z satisfaisant à (Z,i) et (Z,ii), équivaut à la donnée d'une fonction F sur $\ddot{X}\times\mathbb{R}_+$ satisfaisant à

(F,i) $\quad \forall \ddot{x}\in\ddot{X}$, $F(\ddot{x},t)$ est une fonction de répartition décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
(F,ii) $\quad (\ddot{x},t) \longrightarrow F(\ddot{x},t)$ est $\ddot{\underline{\underline{X}}}_0 \otimes \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$-mesurable.

D'autre part, le théorème (6.4) montre qu'il revient au même de chercher une mesure positive $\sigma$-finie $\mu$, invariante sur $(X,\underline{\underline{X}},S)$ et satisfaisant à (A,iii), ou une mesure positive $\sigma$-finie invariante $\ddot{\mu}$ sur $(\ddot{X},\ddot{\underline{\underline{X}}},\ddot{S})$, satisfaisant à

(F,iii) $\quad F(.,t) = \ddot{\mu}(\ddot{X}_1 \geq t \mid \ddot{\underline{\underline{X}}}_0)$ .

Finalement, nous avons décomposé notre problème en deux étapes distinctes:

ETAPE 1: trouver une mesure positive $\sigma$-finie $\ddot{\mu}$, invariante sur $(\ddot{X},\ddot{\underline{\underline{X}}},\ddot{S})$, et satisfaisant à (F,iii); on sait alors qu'elle est portée par X.

ETAPE 2: "remonter" $\ddot{\mu}$ en une loi P invariante sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,\theta_t)$.

Etude de l'étape 2.

EXEMPLE: revenons au processus de renouvellement, qui correspond au cas où $F(.,t)$ ne dépend pas de $\ddot{x}$: $F(.,t)=F(t)$ définit donc dans ce cas une loi $\nu$ sur $\mathbb{R}_+$. La solution (unique) à l'étape 1 consiste alors à prendre $\mu=\nu^{\otimes Z}$. On peut alors remonter $\mu$ en une loi P invariante sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,\theta_t)$ si et seulement si la loi définie par F est de moyenne finie, autrement dit si $\ddot{X}_1\in L^1(\nu)$, ou, ce qui revient au même, $\ddot{X}_1\in L^1(\mu)$. Tout ceci est bien connu, voir par exemple LAZARO-MEYER(14) au § traitant des processus de renouvellement. Le résultat ci-dessous ne surprendra donc pas:

(6.8) THEOREME: <u>soit $\mu$ une mesure positive $\sigma$-finie sur $\ddot{X}$, obtenue au cours de l'étape 1. On peut remonter $\mu$ en une loi P invariante sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,\theta_t)$ si et seulement si $\ddot{X}_1\in L^1(\mu)$. Si cette condition est satisfaite, l'hélice croissante Z est l'intensité stochastique de N lorsque l'on munit $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)$ de la loi P ainsi obtenue.</u>

DEMONSTRATION: la seconde assertion est conséquence de ce qui a été déjà dit. La nécessité de "$\ddot{X}_1\in L^1(\mu)$" provient de ce que la loi P est, à un facteur constant près, la restriction à $]\!]0,V]\!]$ de la mesure produit $\mu\otimes dt$ sur $X\times\mathbb{R}_+$; cette restriction doit donc être une mesure bornée, ce qui revient à dire que $V\in L^1(\mu)$, soit encore $\ddot{X}_1\in L^1(\mu)$, puisque la mesure invariante $\mu$ est portée par X. Réciproquement, si $\ddot{X}_1$, ou,ce qui revient au même,V, appartient à $L^1(\mu)$, on peut supposer que $\mu(V)=1$; le flot sous la fonction V au dessus de la cascade $(X,\underline{\underline{X}},S,\mu)$ tel qu'il est décrit au §2 répond alors à la question.

Etude de l'étape 1.

Contrairement à ce qui se passe dans le cas des processus de renouvellement, c'est cette étape qui pose les plus graves problèmes dans le cas général. Tout au long de l'étude de cette étape, nous oublions $\Omega$ pour travailler sur $\ddot{X}=\mathbb{R}_+^Z$; en conséquence, nous omettrons les signes "¨" partout où ils se présentent, notant X pour $\ddot{X}$, S pour $\ddot{S}$, etc...

Pour toute fonction f, positive et $\underline{\underline{X}}_0$-mesurable sur X, et de la forme $f=\psi\circ X_0.f_0$, où $f_0$ est $\underline{\underline{X}}_{-1}$-mesurable, et où $\psi$ est une fonction borélienne sur $\mathbb{R}_+$, nous posons

$$T(x,f) = f_0\circ S(x)\,.\,F(x,\psi)\ ,$$

où le noyau $\psi\longrightarrow F(x,\psi)$ est défini par la formule $F(x,\psi)=\int_{\mathbb{R}_+}\psi(t)\,F(x,-dt)$. On définit ainsi un noyau de $(X,\underline{\underline{X}}_0)$ dans $(X,\underline{\underline{X}}_0)$.

(6.9) THEOREME (a): <u>soit $\mu$ une mesure positive $\sigma$-finie invariante sur</u> $(X,\underline{\underline{X}},S)$ <u>et satisfaisant à (F,iii); la restriction de $\mu$ à $\underline{\underline{X}}_0$ est alors invariante par</u> T.

(b): <u>réciproquement, toute mesure positive $\sigma$-finie invariante sur</u> $(X,\underline{\underline{X}}_0,T)$ <u>se prolonge de manière unique en une mesure positive $\sigma$-finie et invariante sur</u> $(X,\underline{\underline{X}},S)$, <u>satisfaisant à (F,iii).</u>

REMARQUE: comme $(X,\underline{\underline{X}}_0)$ s'identifie à $\mathbb{R}_+^N$, ce théorème exprime que l'étape 2 équivaut à la recherche des mesures invariantes d'une certaine chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbb{R}_+^N$, et de probabilité de transition T. Le programme annoncé plus haut est bien rempli.

DEMONSTRATION: (a): soit f une fonction positive sur X, de la forme $f = f_0.\psi\circ X_0$, où $f_0$ est $\underline{\underline{X}}_{-1}$-mesurable, et $\psi$ borélienne sur $\mathbb{R}_+$. On a

$$\mu(Tf) = \mu(f_0\circ S;\ F(.,\psi)) = \mu(f_0\circ S;\ \psi\circ X_1) = \mu(f_0;\ \psi\circ X_0) = \mu(f) \ ,$$

où la seconde égalité résulte de ce que $\mu$ satisfait à (F,iii), et la troisième de ce $\mu$ est S-invariante. Le résultat est démontré.

(b): soit $\mu^0$ une mesure positive $\sigma$-finie invariante sur $(X,\underline{\underline{X}}_0,T)$. Soit $f^n$ une fonction $\underline{\underline{X}}_n$-mesurable, donc de la forme $f^n = f\circ S^n$, où f est $\underline{\underline{X}}_0$-mesurable. Nous posons alors

$$\text{(vii)} \qquad \mu(f^n) = \mu^0(T^n f) \ .$$

Il nous faut montrer que cette définition a bien un sens, puisque l'on peut aussi écrire $f^n = (f\circ S^{-1})\circ S^{n+1}$, avec $f\circ S^{-1} \in \underline{\underline{X}}_{-1} \subset \underline{\underline{X}}_0$ : mais alors, on a $T^{n+1}(f\circ S^{-1}) = T^n\circ T(f\circ S^{-1}) = T^n f$, puisque $Tg = g\circ S$ lorsque g est une fonction $\underline{\underline{X}}_{-1}$-mesurable. Admettons pour l'instant que la formule (vii) définisse une mesure positive $\sigma$-finie unique $\mu$ sur $(X,\underline{\underline{X}})$, il nous reste à montrer sue cette mesure satisfait aux conditions requises. Les égalités suivantes, où $f \in \underline{\underline{X}}_0$,

$$\mu(f\circ S^n) = \mu^0(T^n f) = \mu^0(T^{n+1} f) = \mu(f\circ S^{n+1})$$

(la seconde résultant de l'invariance de $\mu^0$ par T) montrent que $\mu$ et $S\mu$ coïncident sur $\underline{\underline{X}}_n$ pour tout n, donc aussi sur $\underline{\underline{X}}$. Les égalités suivantes, où $f_0$ est $\underline{\underline{X}}_{-1}$-mesurable et où $\psi$ est borélienne sur $\mathbb{R}_+$,

$$\mu(f_0\circ S;\ \psi\circ X_1) = \mu^0(T(f_0;\ \psi\circ X_0)) = \mu^0(f_0\circ S;\ F(X_0,\psi)) = \mu(f_0\circ S;\ F(X_0,\psi))$$

(la première résulte de la définition de $\mu$, la seconde de la définition de T, et la troisième de ce que $\mu$ et $\mu^0$ coïncident sur $\underline{\underline{X}}_0$) montrent que $\mu$ satisfait à (F,iii): il suffit de prendre pour $\psi$ l'indicatrice de $]t,\infty[$.

Il nous reste donc à montrer que (vii) définit bien une mesure $\sigma$-finie unique sur $(X,\underline{\underline{X}})$. La formule (vii) définit en fait une suite $(\mu^n)$ de mesures positives $\sigma$-finies sur $(\underline{\underline{X}}_n)$, telles que la restriction à $\underline{\underline{X}}_m$ de $\mu^n$ coïncide avec $\mu^m$ pour $m\leq n$. Si la mesure initiale $\mu^0$ était bornée, l'existence et l'unicité de $\mu$ résulterait alors simplement du théorème de Kolmogorov (se rappeler que $X=\mathbb{R}_+^Z$); malheureusement, nous ne pouvons pas appliquer ce théorème dans le cas d'une suite de mesures $\sigma$-finies. Comme $\mu^0$ est $\sigma$-finie, il existe une fonction $h>0$ et $\underline{\underline{X}}_0$-mesurable sur X, telle que $\mu^0(h)=1$. On définit alors la suite de probabililités $(\mu'^n)$ sur $(\underline{\underline{X}}_n)$ par la formule $\mu'^n(f^n)=\mu^0(h.T^nf)$, où $f^n=f\circ S^n, f\in\underline{\underline{X}}_0$. Cette fois, le théorème de Kolmogorov nous permet d'affirmer l'existence et l'unicité d'une probabilité $\mu'$ sur $(X,\underline{\underline{X}})$ qui coïncide avec $\mu'^n$ sur $\underline{\underline{X}}_n$ pour tout n. Posons alors $\mu=(1/h).\mu'$ : soit $f^n=f\circ S^n$, et $g=(1/h)\circ S^{-n}.f$, on a

$$\mu(f^n)=\mu'(1/h.f\circ S^n)=\mu^0(h.T^ng)=\mu^0(h.1/h.T^nf)=\mu^0(T^nf)$$

(la troisième égalité résulte de ce que $T^ng=(1/h).T^nf$). Autrement dit, la mesure $\mu$ ainsi définie satisfait à (vii), et le théorème est complètement montré.

REMARQUE: revenant le temps de cette remarque aux notations précédentes, expliquons l'agrandissement de X, remplacé par $\ddot{X}=\mathbb{R}_+^Z$ : les systèmes projectifs de lois sur $(\ddot{X},\ddot{\underline{\underline{X}}}_n)$ admettent une limite projective sur $(\ddot{X},\ddot{\underline{\underline{X}}})$ (c'est le théorème de Kolmogorov), alors que ce n'est pas le cas à priori pour les systèmes de lois sur $(X,\underline{\underline{X}}_{V_n})$.

ETUDE D'UN CAS PARTICULIER: s'il est clair qu'un noyau markovien quelconque sur $\mathbb{R}_+^N$ n'admet pas nécessairement de mesure invariante, on peut se demander si la forme particulière du noyau T ne lui donne pas la possibilité de posséder toujours une mesure invariante. Pour fixer le lecteur à ce sujet, nous allons étudier un cas particulier simple: celui des intensités "à mémoire courte", où la fonction de répartition conditionnelle $F(.,t)$ est $\sigma(X_0)$-mesurable: il existe donc un noyau markovien t sur $\mathbb{R}_+$, tel que $F(x,\psi)=t(X_0(x),\psi)$. Nous allons voir que, dans ce cas, T <u>admet une mesure invariante sur</u> $\mathbb{R}_+^N$ <u>si et seulement si</u> t <u>en admet une sur</u> $\mathbb{R}_+$. En effet, si $\mu^0$ est une mesure T-invariante sur $(X,\underline{\underline{X}}_0)$, la restriction de $\mu^0$ à $\sigma(X_0)$ est clairement t-invariante. Réciproquement, soit $\nu$ une mesure t-invariante sur $\mathbb{R}_+$; pour toute fonction $\underline{\underline{X}}_0$-mesurable f de la forme $f=\prod_{-n\leq m\leq 0}\psi\circ X_m$, $T^nf$ est $\sigma(X_0)$-mesurable, et nous pouvons poser $\mu^0(f)=\nu(T^nf)$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on définit bien ainsi une mesure $\mu^0$ qui est T-invariante. L'étude des intensités stochastiques "à mémoire courte" se ramène donc à l'étude des noyaux markoviens récurrents sur $\mathbb{R}_+$.

## Recapitulation de la situation concernant le problème inverse.

Nous pouvons résumer la situation ainsi: nous partons d'une hélice croissante Z satisfaisant à des propriétés convenables, définie sur la réalisation canonique $N = (\Omega,\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,N_t)$ des processus ponctuels stationnaires, et nous cherchons une loi invariante P sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,\theta_t)$ qui fasse de Z l'intensité stochastique de N.

Si nous négligeons la difficulté "mineure" examinée au théorème (6.8), nous avons montré que ce problème se ramène au problème de la reconstruction des cascades, que voici: nous diposons, sur une cascade $(X,\underline{\underline{X}}_n,S)$, d'un noyau $F(.,\psi)$, transformant les fonctions $\sigma(X_1)$-mesurables en fonctions $\underline{\underline{X}}_0$-mesurables. Existe-t-il une mesure $\mu$ invariante sur $(X,\underline{\underline{X}}_n,S)$ qui fasse de $F(.,1_{]t,\infty[})$ une version de la loi conditionnelle $\mu(X_1 > t|\underline{\underline{X}}_0)$ ? Si oui, celle-ci est-elle unique?

Nous avons étudié cette question au théorème (6.9) en associant à F un noyau markovien T sur $(X,\underline{\underline{X}}_0)$, et nous avons montré que le problème de la reconstruction de la cascade $(X,\underline{\underline{X}}_n,S,\mu)$ équivaut à la recherche des mesures invariantes pour le noyau T sur $(X,\underline{\underline{X}}_0)$.

La philosophie de tout cela est donc que les notions d'intensité stochastique d'un processus ponctuel stationnaire d'une part, et de noyau markovien récurrent d'autre part, sont de même nature.

## Annexe.

Nous nous plaçons ici dans les conditions habituelles de théorie générale des processus: un espace filtré complet $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,P)_{t\in\mathbb{R}_+}$ satisfaisant aux "conditions habituelles". Voici le résultat annoncé:

LEMME: soit une martingale locale à variation finie, de la forme $M = M^+ - M^-$, où $M^+$ et $M^-$ sont donc deux processus croissants bien-mesurables (non intégrables). On peut alors réduire cette martingale locale par une suite de temps d'arrêt $(T_n)$ telle que, pour tout n, les processus croissants arrêtés $(M^+_{t\wedge T_n})$ et $(M^-_{t\wedge T_n})$ soient intégrables.

DEMONSTRATION: d'après DOLEANS-MEYER(Intégrales stochastiques, Sém. Proba.IV), il existe une suite de temps d'arrêts $(R_n)$ réduisant fortement $M$ en ce sens que, pour tout $n$, on peut écrire $M_{t\wedge R_n} = N_t + M_{R_n}\cdot 1_{(t\geq R_n)} - (M_{R_n}\cdot 1_{(t\geq R_n)})^3$ , où les deux derniers termes du membre de droite définissent une martingale à variation intégrable, et où $N$ est une martingale arrêtée à $R_n$ et bornée dans tout $L^p$ pour $1\leq p<\infty$. Il nous suffit donc de nous intéresser à $N$, qui est aussi, par différence, un processus à variation finie de la forme $N = N^+ - N^-$. Posons $S_k = \inf(t: N^+_t \geq k$ ou $N^-_t \geq k)$. On a $\Delta N^+_{S_k} + \Delta N^-_{S_k} = |\Delta N_{S_k}| \in L^2 \subset L^1$, et il vient bien que les processus arrêtés $(N^+_{t\wedge S_k})$ et $(N^-_{t\wedge S_k})$ sont intégrables. La suite de temps d'arrêt $T_n = R_n\wedge S_n$ répond alors à la question.

REMARQUE: ce résultat permet de montrer le résultat annoncé sans démonstration à la remarque 2/ suivant le théorème (5.3) concernant les HAO locales à variation finie.

REFERENCES


(1) W.AMBROSE: Representations of ergodics flows; Ann. of Math. 42,1941, pp.723-739.

(2) W.AMBROSE-S.KAKUTANI: Structure and continuity of ergodics flows; Duke Math. J. 9,1942, pp.25-42.

(3) J.AZEMA: Théorie générale des processus et retournement du temps; Ann. Sc. Ecole Normale Sup., série 4, t.6, fasc.4, 1973, pp.459-519.

(5) PH.COURREGE-P.PRIOURET: Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire; Pub. Inst. Stat. Univ. Paris, XIV 3, 1965, pp.245-377.

(4) C.S.CHOU-P.A.MEYER: Sur le représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus pontuels, 1974, à paraitre.

(6) C.DELLACHERIE: Capacités et processus stochastiques; Ergeb. der Math.& Grenzgeb. Springer V., 1972.

(7) H.FÖLLMER: The exit measure of a supermartingale; Z. Wahrsch., 21, 1972, pp.154-166.

(8) D.GEMAN-J.HOROWITZ: Remarks on Palm measures; Ann. I. H. P., 9,1973, pp.215-232.

(9) D.GEMAN-J.HOROWITZ: Polars sets and Palm measures in the theory of flows, 1974, à paraitre.

(10) A.HANEN: Processus ponctuels stationnaires et flots spéciaux; Ann.I.H.P.,7,1971, pp. 23-30.

(11) J.JACOD: On the stochastic intensity of a random point process over the half line, 1973, à paraitre.

(12) J.JACOD: Multivariate point processes: predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representations of martingales; 1974, à paraitre.

(13) J. de Sam LAZARO: Sur les hélices du flot spécial sous une fonction, Thèse Paris VI, 1973.

(14) J. de Sam LAZARO-P.A.MEYER: Questions de théorie des flots; Univ. Strasbourg, Sém. Probabilités 1972-1973-1974.

(15) J.MECKE: Stationäre zufällige Masse auf lokalkompakten Abelschen Gruppen; Z. Wahrsch., 9,1967, pp.36-58.

(16) P.A.MEYER: Processus de Markov; Lect. Notes in M., 26, Springer V., 1967.

(17) P.A.MEYER: la mesure de Föllmer en théorie des surmartingales; Sém. Prob. VI de Strasbourg, Lect. Notes in M. 258, Springer V., pp.118-129, 1972.

(18) P.A.MEYER: Probabilités et potentiels; Herrmann, Paris, 1966.

(19) F.PAPANGELOU: Integrability of expected increments of point processes and a related change of scale; Trans. Amer. Math. Soc., 165,1972, pp.483-506.

(20) K.PARTHASARATHY: Probability measures on metric spaces; Academic Press, New York 1967.

(21) J.B.WALSH: Some topologies connected with Lebesgue measure; Sém. Prob. V Univ. Strasbourg, Lect. Notes in M., 191, Springer V., 1971.

(22) J.B.WALSH: Transition functions of Markov Processes, Sém. Prob. VI Univ. Strasbourg, Lect. Notes in M., 258, Springer V., 1972.