JOSÉ DE SAM LAZARO
PAUL-ANDRÉ MEYER

Questions de théorie des flots (VI)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 73-88
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__73_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1973/74

QUESTIONS DE THEORIE DES FLOTS (VI)

par J. de SAM LAZARO et P.A.MEYER

Le but de cet exposé est la démonstration du théorème (dû au premier auteur) sur le nombre des HAO contenues dans un flot filtré : s'il n'est pas nul, il existe une infinité de HAO deux à deux orthogonales. Ce théorème est une forme plus précise du résultat de SINAI sur le type spectral d'un K-flot.

Pour des raisons pédagogiques, le § 1 regroupe les notions sur la théorie de la multiplicité dont nous avons besoin : il ne semble pas exister, en effet, d'exposé de ces notions sous la forme nécessaire aux probabilistes, i.e. à la fois valable pour des espaces de Hilbert réels, et indépendant de la théorie des opérateurs hermitiens non bornés.

1 . MULTIPLICITE SPECTRALE

I. MULTIPLICITE DANS UNE FILTRATION

Nous nous occupons ici de la structure de base des applications probabilistes : $\underline{\underline{H}}$ est un espace de Hilbert - supposé réel pour fixer les idées - muni d'une famille croissante de sous-espaces fermés (H_t) $(t\in\mathbb{R})$, telle que $\underline{\underline{H}}_{+\infty}=\underline{\underline{H}}$. Nous ne supposons pas que $\underline{\underline{H}}_{-\infty}=\{0\}$. Nous notons E_t le projecteur sur $\underline{\underline{H}}_t$: il est bien connu qu'on sait associer à toute fonction borélienne bornée f sur $\mathbb{R}$ un opérateur E_f , de telle sorte que $E_fE_g = E_{fg}$, $E_{af+bg}=aE_f+bE_g$, et que $E_{I_{]-\infty,t]}}$ soit le projecteur $E_t-E_{-\infty}$. Nous appellerons sous-espaces stables les sous-espaces fermés stables par les E_t. On désigne par S(x) le sous-espace stable engendré par un élément x de $\underline{\underline{H}}$. Deux éléments x et y de $\underline{\underline{H}}$ sont dits strictement orthogonaux (s.o.) si les sous-espaces S(x) et S(y) sont orthogonaux.

On peut donner une représentation explicite de l'espace S(x) : considérons la " martingale" $x_t=E_tx$, et la mesure ρ_x sur $\mathbb{R}$ qui attribue à l'intervalle]s,t] la masse $\|x_t-x_s\|^2$. Alors tout élément y de S(x) s'écrit de manière unique sous la forme $a.x_{-\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dx_t$, où[1] $a\in\mathbb{R}$, $f\in L^2(\rho_x)$, et la mesure ρ_y vaut $|f|^2.\rho_x$. En particulier, l'espace de Hilbert S(x) muni de la filtration induite par $(\underline{\underline{H}}_t)$ est

1 L'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dx_t$ sera notée simplement f.x dans la suite.

isomorphe, si $x_{-\infty}=0$, à l'espace $L^2(\rho_x)$ muni de la filtration dont les projecteurs sont les opérateurs $M_t f = I_{]-\infty,t]}.f$.

Nous appelons <u>types</u> les classes d'équivalence de mesures positives sur $\mathbb{R}_+$. L'ensemble des types est ordonné par la relation dite de <u>domination</u> (un type absolument continu par rapport à un autre est dit dominé par celui-ci). Le <u>type de $x\in\underline{\underline{H}}$</u> est par définition le type de ρ_x.

Voici maintenant les trois modèles "élémentaires" d'espaces de Hilbert filtrés réels

1 : $\underline{\underline{H}}=\mathbb{R}$, muni de la filtration triviale ($\underline{\underline{H}}_t=\underline{\underline{H}}$ pour tout t).

2_a: $\underline{\underline{H}}=\mathbb{R}$, muni de la filtration $\underline{\underline{H}}_t=\{0\}$ pour $t<a$, $\underline{\underline{H}}_t=\underline{\underline{H}}$ pour $t\geq a$.

3_ρ: ρ est une mesure <u>diffuse</u> sur $\mathbb{R}$, $\underline{\underline{H}}=L^2(\rho)$, muni de la filtration $\underline{\underline{H}}_t=\{ f\in L^2$ à support dans $]-\infty,t]$ $\}$.

Noter que si ρ et ρ' sont équivalentes, les espaces filtrés $L^2(\rho)$ et $L^2(\rho')$ sont isomorphes ; nous verrons plus loin que la réciproque est vraie. Les modèles du type 3 sont donc indexés en réalité par les <u>types</u> de mesures.

Voici le théorème de multiplicité spectrale. Il exprime en gros qu'on peut tout construire avec les trois briques précédentes. Etant donnée l'importance que revêt en calcul des probabilités la notion d'espace de Hilbert (réel) filtré, il est très regrettable que ce théorème <u>facile</u> ne soit jamais présenté que dans le cas complexe, tout au fin fond de la théorie des opérateurs normaux non bornés.

THEOREME 1. <u>Tout espace de Hilbert[1] filtré $(\underline{\underline{H}},\underline{\underline{H}}_t)$ se décompose en somme directe de sous-espaces stables</u>

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{J}} \oplus \Big(\bigoplus_{a\in D} \underline{\underline{K}}_a \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{0\leq i<N} \underline{\underline{L}}_{\rho_i} \Big)$$

<u>où</u>

1) <u>La filtration induite sur $\underline{\underline{J}}$ est triviale</u> : <u>$\underline{\underline{J}}$ est donc somme directe de</u> j <u>copies du modèle</u> 1 , j (<u>entier ou</u> $+\infty$) <u>étant la dimension</u> de $\underline{\underline{J}}$.

2) D <u>est un ensemble fini ou dénombrable</u>. <u>Pour tout</u> $a\in D$, <u>la filtration induite sur $\underline{\underline{K}}_a$ est $\{0\}$ pour $t<a$, $\underline{\underline{K}}_a$ pour $t\geq a$: $\underline{\underline{K}}_a$ est donc somme directe de</u> k_a <u>copies du type</u> 2_a , k_a <u>étant la dimension de</u> $\underline{\underline{K}}_a$.

3) N <u>est fini ou</u> $+\infty$. <u>Les</u> ρ_i <u>sont des mesures diffuses de la forme</u> $\rho_i=I_{C_i}.\rho_0$, <u>où les</u> C_i <u>décroissent et</u> $C_0=\mathbb{R}$. <u>Enfin</u>, $\underline{\underline{L}}_{\rho_i}$ <u>est isomorphe au modèle</u> 3_{ρ_i} .

---

1 séparable (le cas non séparable est laissé au lecteur).

<u>Cette décomposition n'est pas unique</u> : <u>les éléments uniquement déterminés sont</u>

- <u>L'espace</u> $\underline{\underline{J}}=\underline{\underline{H}}_{-\infty}$, <u>et donc sa dimension</u> j
- <u>Les espaces</u> $\underline{\underline{K}}_a=\underline{\underline{H}}_a \ominus \underline{\underline{H}}_{a-}$, <u>et donc leurs dimensions</u> k_a
- <u>Les types</u> $\dot{\rho}_i$ <u>des</u> ρ_i .

(Inversement, il est clair que la donnée de j, des k_a, et des $\dot{\rho}_i$ détermine l'espace de Hilbert filtré à isomorphisme près).

DEMONSTRATION SOMMAIRE

La première remarque est celle-ci : on a toujours $\rho_{x+y} \leqq 2(\rho_x+\rho_y)$, $\rho_{x+y}= \rho_x+\rho_y$ si x et y sont s.o..

Dans la décomposition du théorème, $\underline{\underline{H}}$ s'écrit $\underline{\underline{J}} \oplus \underline{\underline{J}}'$, où $\underline{\underline{J}}' = J^{\perp}$.

Il est clair que tout élément de $\underline{\underline{J}}$ a le type 0, tandis que tout élément de $\underline{\underline{J}}'$ est de type non nul. Donc $\underline{\underline{J}}$ est exactement l'ensemble des éléments de type nul, soit $\underline{\underline{H}}_{-\infty}$. Et en effet, la filtration induite sur $\underline{\underline{H}}_{-\infty}$ est triviale ! Cela nous donne l'existence et l'unicité du premier terme de la décomposition.

Nous supposons désormais, quitte à nous restreindre à $\underline{\underline{H}} \ominus \underline{\underline{H}}_{-\infty}$, que $\underline{\underline{H}}_{-\infty}=\{0\}$. Alors pour tout x $S(x)=\{E_f x,\ f \text{ bornée}\}=\{f.x,\ f\in L^2(\rho_x)\}$.

LEMME 1. <u>Si les types de</u> x <u>et</u> y <u>sont étrangers</u>, x <u>et</u> y <u>sont s.o</u>.

DEM. Il existe deux ensembles boréliens disjoints A et B portant ρ_x et ρ_y . Introduisons les projecteurs correspondants E_A et E_B . On a $E_A x=x$, $E_B y=y$, $E_A E_B=E_{A\cap B}=0$. D'où l'orthogonalité de $S(x)$ et $S(y)$.

LEMME 2. <u>Si</u> α <u>est un type</u>, <u>l'ensemble des</u> x <u>de type dominé par</u> α <u>est un sous-espace stable</u> $\underline{\underline{H}}(\alpha)$, <u>dont l'orthogonal est formé des</u> $y\in\underline{\underline{H}}$ <u>de type étranger à</u> α.

DEM. Il est clair que $H(\alpha)$ est un sous-espace, stable par les E_t du fait que $\rho_{E_t x} = I_{]-\infty,t]}\rho(x)$. Nous n'avons pas envie de montrer qu'il est fermé, bien que ce soit facile. Tout y de type étranger à α est orthogonal à $\underline{\underline{H}}(\alpha)$ (lemme 1). Inversement, si ρ_y n'est pas étranger à α, il existe f borélienne comprise entre 0 et 1 telle que $f.\rho_y$ soit non nulle et dominée par α , et alors $f.y\in H(\alpha)$ n'est pas orthogonale à y .

Ce lemme nous permet d'obtenir la 2e partie de la décomposition : nous regardons pour $a\in\mathbb{R}$ les espaces $\underline{\underline{H}}(\varepsilon_a)$: ils sont deux à deux orthogonaux, donc l'ensemble $D=\{a:\underline{\underline{H}}(\varepsilon_a)\neq\{0\}\}$ est dénombrable. Il est clair que $\underline{\underline{H}}(\varepsilon_a)$ est l'espace $\underline{\underline{K}}_a$ de la décomposition. C'est aussi $\underline{\underline{H}}_a \ominus \underline{\underline{H}}_{a-}$.

Nous nous plaçons maintenant sur l'orthogonal de $\oplus_a \underline{\underline{H}}(\varepsilon_a)$, c'est à dire sur l'espace des éléments de type diffus . Pour simplifier le langage, nous pouvons supposer que $\underline{\underline{H}}$ désigne cet espace, i.e. que $\underline{\underline{H}}_{-\infty} = \{0\}$ et que tout $x \in \underline{\underline{H}}$ est de type diffus .

LEMME 3. Il existe dans $\underline{\underline{H}}$ un élément de type maximum. Plus précisément, pour tout $x \in \underline{\underline{H}}$ il existe un élément y de type maximum tel que $x \in S(y)$.

DEM. 1) Construction d'un élément z de type maximum : considérons un système maximal $(z_i)_{i\in I}$ d'éléments de norme 1, deux à deux s.o.. Le caractère maximal et le fait que $\underline{\underline{H}}_{-\infty} = \{0\}$ entraînent que $\underline{\underline{H}} = \oplus_i S(z_i)$. Comme $\underline{\underline{H}}$ est séparable, I est dénombrable, et il suffit de prendre $z = \sum a_i z_i$, où les a_i sont tous $\neq 0$ et tels que $\sum a_i^2 < \infty$.

2) Soit f une densité de ρ_x par rapport à ρ_z , et soit $A=\{f\neq 0\}$, $B=\{f=0\}$. Posons $y=x+E_B z$; on a $\rho_y = (f+I_B)\rho_z$, donc y est de type maximum. On a $x=E_A y$, donc $x \in S(y)$.

Il est maintenant facile d'achever la démonstration d'existence.

Nous prenons une base orthonormale (e_n) de $\underline{\underline{H}}$, et nous construisons un élément x_0 de type maximum tel que $e_0 \in S(x_0)$. Nous posons $\underline{\underline{M}}_0 = S(x_0)$ et $\underline{\underline{H}}_1 = M_0^{\perp}$.

Soit f_1 la projection de e_1 sur $\underline{\underline{H}}_1$; nous choisissons un élément x_1 de type maximum dans $\underline{\underline{H}}_1$ tel que $f_1 \in S(x_1)$, nous posons $\underline{\underline{M}}_1 = S(x_1)$, et $\underline{\underline{H}}_2 = \underline{\underline{H}}_1 - \underline{\underline{M}}_1$. Noter que e_1 est la somme de ses projections sur $\underline{\underline{M}}_0$ et $\underline{\underline{H}}_1$, donc $e_1 \in \underline{\underline{M}}_0 + \underline{\underline{M}}_1$.

Soit f_2 la projection de e_2 sur $\underline{\underline{H}}_2$, etc.

Comme $e_n \in \underline{\underline{M}}_0 + .. + \underline{\underline{M}}_n$ pour tout n, on a $\underline{\underline{H}} = \oplus_n \underline{\underline{M}}_n$ (somme finie ou infinie). Comme à chaque fois on prend un élément de type maximum, les types des mesures ρ_{x_n} décroissent. Il est clair qu'on peut remplacer les ρ_{x_n} par des mesures équivalentes de la forme indiquée dans l'énoncé, et que $\underline{\underline{M}}_n = S(x_n)$ est isomorphe au modèle $\mathfrak{Z}_{\rho_n}$.

THEORIE DE LA MULTIPLICITE

Avant de démontrer l'unicité des types ρ_i dans la décomposition précédente, nous démontrerons le théorème suivant.

THEOREME 2. Soient α un type , et $(y_i)_{i\leq 0<m}$ un système maximal d'éléments de $\underline{\underline{H}}$ de type α, deux à deux s.o.. Le nombre m[1] ne dépend que de α : on l'appelle la multiplicité du type α dans $\underline{\underline{H}}$.

---

1 Entier ou $+\infty$.

DEMONSTRATION. Quitte à se placer dans $\underline{\underline{H}}(\alpha)$ (lemme 2) on peut supposer que α est le type maximum . On peut supposer que $\underline{\underline{H}}_{-\infty}=\{0\}$. Considérons un système $(y_i')_{0\leq i<m'}$ d'éléments de $\underline{\underline{H}}$, deux à deux s.o. et s.o. aux y_i , tel que $\underline{\underline{H}}=\underline{\underline{V}}\oplus\underline{\underline{V}}'$, où $\underline{\underline{V}}=\oplus_i S(y_i)$ et $\underline{\underline{V}}'=\oplus_i S(y_i')$. Etant donné que le système (y_i) est maximal, le type maximum de $\underline{\underline{V}}'$ ne saurait être α . Il existe donc un ensemble A de complémentaire non α-négligeable, tel que le type de tout élément de $\underline{\underline{V}}'$ soit dominé par $I_A.\alpha$.

D'autre part (suivant une idée de KALLIANPUR et MANDREKAR) nous choisissons une mesure bornée σ du type α , et nous remplaçons si nécessaire (sans changer de notations) y_i par un $f_i.y_i$ tel que $\rho_{f_i.y_i}=\sigma$.

Soit alors $(x_k)_{0\leq k<n}$ un système d'éléments de type α , deux à deux s.o.. Nous allons montrer que $n\leq m$, et cela suffira. Nous pouvons supposer que $m<\infty$, sans quoi tout est trivial. Quitte à changer de représentants comme ci-dessus, nous pouvons supposer aussi que les ρ_{x_i} sont égales à σ .

Développons alors les x_k :

$$x_k = \sum_{0\leq i<m} f_{ki}.y_i + \sum_{0\leq i<m'} f'_{ki}.y'_i$$

Ecrivons que $\sigma=\rho_{x_k}$: il vient, en posant $\rho_{y'_i} = g'_i.\sigma$ ($g'_i=0$ sur A^c)

$$\sigma\text{-p.p.} \quad 1 = \sum_i f_{ki}^2 + \sum_{i'} f'^2_{ki}.g'_i$$

Donc

$$\sigma\text{-p.p. sur } A^c \quad 1 = \sum_i f_{ki}^2$$

De même, écrivons que x_k et x_ℓ sont s.o. pour $k\neq\ell$

$$\sigma\text{-p.p.} \quad 0 = \sum_i f_{ki}f_{\ell i} + \sum_i f'_{ki}f'_{\ell i}g'_i$$

donc

$$\sigma\text{-p.p. sur } A^c \quad 0= \sum_i f_{ki}f_{\ell i}$$

Prenons un point t de A^c où ces égalités aient lieu simultanément, les n vecteurs $(f_{k0}(t),\dots f_{k,n-1}(t))$ forment un système orthonormé dans $\mathbb{R}^m$, donc $n\leq m$.

Rien n'est plus facile maintenant[1] que de démontrer l'unicité des types des ρ_i dans le théorème 1. Le type de ρ_0 est le type maximum, et on le rencontre un nombre de fois égal à sa multiplicité m_0 . Ensuite, ρ_{m_0} est le plus grand des types dont la multiplicité est $> m_0$, etc. Nous ne donnons pas de détails.

1 Ce n'est pas l'avis de tout le monde. Voir donc les détails à la fin de l'exposé.

II. HELICES DANS UN FLOT

Nous considérons maintenant un espace de Hilbert réel $\underline{\underline{H}}$, séparable, muni d'un groupe à un paramètre $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$, fortement continu, d'automorphismes de $\underline{\underline{H}}$[1]. Nous appelons sous-espaces stables les sous-espaces fermés stables par les opérateurs T_t. Le sous-espace stable engendré par $x\in\underline{\underline{H}}$ est noté $S(x)$. Deux éléments x et y de $\underline{\underline{H}}$ sont dits strictement orthogonaux (s.o.) si $S(x)$ et $S(y)$ sont orthogonaux.

Nous appelons hélice une application continue $Z : t\mapsto z_t$ de $\mathbb{R}$ dans $\underline{\underline{H}}$ possédant les propriétés suivantes : $z_0=0$; quels que soient s,t,h, $z_{t+h}-z_{s+h}= T_h(z_t-z_s)$; quels que soient $s,t \in \mathbb{R}_+$, z_t-z_s est orthogonal à tous les z_r , $r\leq 0$; enfin, Z n'est pas identiquement nulle, ce qui entraîne que $\|z_t\| = kt$, $k>0$. L'hélice est dite normalisée si $k=1$.

Nous notons $\underline{\underline{H}}(Z)$ l'espace fermé engendré par les différences z_t-z_s, qui est évidemment stable. Deux hélices Z et Z' sont dites orthogonales si les espaces $\underline{\underline{H}}(Z)$ et $\underline{\underline{H}}(Z')$ sont orthogonaux .

Notre but est de démontrer le théorème suivant :

THEOREME 3. Tous les systèmes maximaux $(Z_j)_{0<j<n}$ d'hélices deux à deux orthogonales ont le même nombre d'éléments n (entier ou $+\infty$).

QUELQUES RESULTATS REELS

Nous allons ramener le théorème 3 à la théorie de la multiplicité. Mais celle ci devra être appliquée dans le complexifié de $\underline{\underline{H}}$, et auparavant il faudra démontrer quelques résultats en prenant grand soin de rester dans le domaine réel.

La mesure spectrale ρ_x de $x\in\underline{\underline{H}}$ est l'unique mesure sur $\mathbb{R}$, positive et bornée, telle que

$$< x, T_t x > = \int e^{-itu}\rho_x(du)$$

On a $<x,T_t x > = < T_{-t}x,x > = < x,T_{-t}x >$, donc ρ_x est symétrique par rapport à 0 . Nous appellerons type de x , comme plus haut, le type de ρ_x .

Il est clair que si x et y sont s.o., on a $\rho_{x+y}=\rho_x+\rho_y$.

Connaissant la mesure ρ_x , on peut construire " explicitement " l'espace $S(x)$ de la manière suivante : soit λ n'importe quelle mesure positive du type ρ_x , symétrique par rapport à 0 . Construisons un flot

---

1 Nous appellerons flot cette structure.

$(\underline{\underline{F}},\tau_t)$, $\underline{\underline{F}}$ étant l'espace de Hilbert <u>réel</u> des fonctions complexes $f\in L^2_{\mathbb{C}}(\lambda)$ telles que $f(-u)=\overline{f(u)}$, muni du produit scalaire (réel) $\langle f,g\rangle = \int f(u)\overline{g}(u)\lambda(du)$, et du groupe d'automorphismes τ_t : $\tau_t f(u) = e^{-itu}f(u)$. Soit $\xi=\sqrt{j}$: la définition de la mesure spectrale signifie que $\langle T_s x,T_t x\rangle = \langle \tau_s\xi,\tau_t\xi\rangle$, de sorte qu'il existe un isomorphisme φ unique de $S(x)$ dans $\underline{\underline{F}}$ telle que $\varphi(T_s x)=\tau_s\xi$ pour tout s , i.e., φ commute avec les flots. L'image de φ est un sous-espace fermé. Si $f\in\underline{\underline{F}}$ est orthogonale à cette image, la mesure bornée $f\sqrt{j}\lambda$ a une transformée de Fourier nulle, elle est donc nulle , et comme $\sqrt{j}>0$ λ-p.p., f est nulle. Autrement dit, $S(x)$ <u>est isomorphe à</u> $\underline{\underline{F}}$ <u>muni du flot</u> (τ_t).

Nous avons alors le lemme suivant :

LEMME 4 . 1) <u>Si</u> $y\in S(x)$, <u>le type de</u> y <u>est dominé par le type de</u> x .

2) <u>Si</u> σ <u>est une mesure bornée symétrique dominée par</u> ρ_x , <u>il existe dans</u> $S(x)$ <u>un élément</u> y <u>tel que</u> $\rho_y=\sigma$.

3) <u>Si</u> α <u>est un type, l'ensemble</u> $\underline{\underline{H}}(\alpha)$ <u>des</u> $x\in\underline{\underline{H}}$ <u>de type dominé par</u> α <u>est un sous-espace stable, dont l'orthogonal est constitué par les</u> y <u>de type étranger à</u> α.

4) <u>Il existe dans</u> $\underline{\underline{H}}$ <u>un élément de type maximum</u>.

DEMONSTRATION. Pour 1) et 2) , qui concernent uniquement $S(x)$, on peut se placer dans la situation isomorphe sur $\underline{\underline{F}}$. Pour 1), il suffit de remarquer que la mesure spectrale de $f\in\underline{\underline{F}}$ est $|f|^2.\lambda$. Pour 2), il suffit de prendre l'élément y correspondant à $f=\sqrt{d\sigma/d\lambda}$.

Pour 2) : si $x\in\underline{\underline{H}}(\alpha)$, $y\in\underline{\underline{H}}(\alpha)$, x+y appartient à $\underline{\underline{H}}(\alpha)$: écrire y=u+v, où $u\in S(x)$ et $v\in S(x)^\perp$; on a $\rho_{x+y}=\rho_{x+u}+\rho_v$, $\rho_{x+u}\ll\rho_x\ll\alpha$, $\rho_x\leq\rho_y\ll\alpha$. Comme x et $T_t x$ ont même mesure spectrale, $\underline{\underline{H}}(\alpha)$ est stable.

Pour voir que $\underline{\underline{H}}(\alpha)$ est fermé, prenons un système maximal (x_i) (nécessairement fini ou dénombrable - d'éléments de $\underline{\underline{H}}(\alpha)$ de norme 1, deux à deux s.o. . La somme directe hilbertienne $\bigoplus_i S(x_i)$ est contenue dans $\underline{\underline{H}}(\alpha)$, et on voit sans peine que ces deux espaces sont égaux.

Un y de type étranger à $\underline{\underline{H}}(\alpha)$ a une projection nulle sur tous les $S(x_i)$ d'après 1), donc est orthogonal à $\underline{\underline{H}}(\alpha)$. Si ρ_y n'est pas étranger à α , un regard à la situation isomorphe à $S(y)$ $(\underline{\underline{F}},\tau_t)$ permet de construire un élément de type α non orthogonal à y.

Enfin, 4) est presque évident : prendre un système maximal de x_i deux à deux s.o. et $x=\sum a_i x_i$ avec des coefficients convenables.

Nous traduisons maintenant l'existence d'hélices en langage spectral :

LEMME 5 . Soit $\underline{\underline{K}}$ un sous-espace. Il existe une hélice Z tel que $\underline{\underline{K}}=\underline{\underline{H}}(Z)$ si et seulement s'il existe un $x\in\underline{\underline{H}}$ du type de Lebesgue tel que $\underline{\underline{K}}=S(x)$.

DEMONSTRATION. Etant donnée une hélice Z, que nous pouvons supposer normalisée, nous avons un isomorphisme unique de $L^2(\mathbb{R})$ sur $\underline{\underline{H}}(Z)$ qui associe à $f\in L^2(\mathbb{R})$ l'"intégrale stochastique" $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dz_t$. Cet isomorphisme commute avec le flot (T_t) sur $\underline{\underline{H}}(Z)$, le flot de translation sur $L^2(\mathbb{R})$. Il suffit donc de trouver dans $L^2(\mathbb{R})$ un élément f dont les translatés forment un ensemble total, et la mesure spectrale est du type de Lebesgue . La mesure spectrale de f est $|\hat{f}(x)|^2dx$ (à une constante près) où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f : il suffit de prendre une f telle que $\hat{f}$ ne s'annule jamais, cette condition suffisant à assurer que les translatés de f sont totaux.

Inversement, si $\underline{\underline{K}}=S(x)$, reprenons la construction de l'espace $\underline{\underline{F}}$ donnée plus haut : ρ_x étant du type de Lebesgue, nous pouvons prendre pour λ la mesure de Lebesgue. Mais alors $\underline{\underline{F}}$ muni du flot indiqué est isomorphe - par Plancherel - à $L^2(\mathbb{R})$ muni du flot de translation, et $L^2(\mathbb{R})$ est engendré par l'hélice $z_t=I_{]0,t]}$ pour $t\geqq 0$, $z_t=-I_{]t,0]}$ si $t<0$.

DEMONSTRATION DU THEOREME 3

Considérons un système maximal $(Z_j)_{0\leq j<n}$ d'hélices deux à deux orthogonales. D'après le lemme 5 , les espaces $\underline{\underline{H}}(Z_j)$ sont aussi des espaces $S(x_j)$, où les x_j forment un système maximal d'éléments de $\underline{\underline{H}}$ deux à deux s.o. et du type de Lebesgue. Soit $\underline{\underline{V}}$ l'orthogonal de $\bigoplus_j S(x_j)$, et soit (x'_k) un système maximal d'éléments de $\underline{\underline{V}}$, deux à deux s.o..

Le type maximum de $\underline{\underline{V}}$ ne peut dominer le type de Lebesgue, d'après le lemme 4, 2). Donc il existe un ensemble A , non négligeable au sens de Lebesgue, mais négligeable pour tous les ρ_x, $x\in\underline{\underline{V}}$.

Maintenant, complexifions : $\mathring{\underline{\underline{H}}} = \underline{\underline{H}}+i\underline{\underline{H}}$ est muni du produit hermitien $\langle x+iy, x'+iy'\rangle = (\langle x,x'\rangle+\langle y,y'\rangle)+i(\langle x,y'\rangle-\langle y,x'\rangle)$, les $\mathring{T}_t$ sont prolongés en des opérateurs unitaires $\mathring{T}_t$. Posons $\mathring{\underline{\underline{V}}} = \underline{\underline{V}}+i\underline{\underline{V}}$, $\mathring{\underline{\underline{S}}}(x_j)=S(x_j)+iS(x_j)$: $\mathring{\underline{\underline{S}}}(x_j)$ est le sous-espace complexe stable engendré par x_j . D'autre part, le nouvel espace $\mathring{\underline{\underline{S}}}(x'_k)$ est isomorphe à $L^2_{\mathbb{C}}(\rho_{x'_k})$, il ne contient donc aucun élément dont la mesure spectrale charge A, et il en résulte que $\mathring{\underline{\underline{V}}}$ ne contient aucun élément du type de Lebesgue. Ainsi, les (x_j) forment encore, dans l'espace complexifié, un système maximal d'éléments deux à deux s.o., du type de Lebesgue.

Dans le cas complexe, le théorème de Stone nous dit qu'il existe une filtration $(\underline{\underline{H}}_t)$ telle que 1) Les sous-espaces stables pour (T_t)

soient exactement les sous-espaces stables pour les projecteurs E_t , 2) La mesure spectrale ρ_x d'un élément soit donnée par $\rho_x(]s,t]) = \|(E_t-E_s)x\|^2$. Dans cette filtration, les x_j forment un système maximal d'éléments deux à deux s.o. du type de Lebesgue, le nombre n est donc la multiplicité du type de Lebesgue, et il ne dépend pas de la décomposition choisie.

2 . LE NOMBRE D'HAO DANS UN FLOT

Les résultats de J.LAZARO sur ce point seront publiés indépendamment de ce séminaire, dans l'article [ ]. Nous allons donner ici le plan de la démonstration, qui se trouve décomposée en une succession de lemmes. Pour ceux-ci, nous renverrons souvent à [ ] pour tous les détails techniques, en nous bornant à une"idée de la démonstration" plus ou moins sommaire.

Nous partons d'un flot $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,\theta_t)$ filtré par une famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ de tribus, et nous supposons la filtration non triviale. Il existe donc une HAO non nulle. Nous prenons alors une base de HAO $(Z^i)_{i\in I}$. Le fait que tout élément de $L^2(\underline{\underline{F}})\ominus L^2(\underline{\underline{F}}_{-\infty})$ se développe en une somme d'intégrales stochastiques par rapport aux Z^i signifie que les Z^i forment un système maximal d'hélices - au sens hilbertien du § 1 - pour le groupe (θ_t) d'automorphismes de $L^2(\underline{\underline{F}})\ominus L^2(\underline{\underline{F}}_{-\infty})$. Le nombre d'éléments de I ne dépend donc pas de la base choisie, et ne dépend même de la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ que par l'intermédiaire de $\underline{\underline{F}}_{-\infty}$. Nous allons démontrer , en suivant [ ], que

THEOREME 4. I (<u>supposé non vide</u>) <u>est toujours infini</u>.

Notre méthode consiste à supposer que I a un nombre fini k d'éléments, et à en déduire une contradiction. Mais en fait de larges portions de la démonstration ont leur intérêt propre, car elles n'utilisent que dans une très faible mesure l'hypothèse absurde que I est fini.

PREMIERE ETAPE. Nous choisissons pour les hélices Z^i des versions c.à.d.l.à.g. (il n'est pas nécessaire qu'elles satisfassent identiquement à la propriété des hélices), et nous désignons par $\underline{\underline{G}}$ la tribu engendrée par toutes les différences $Z^i_u-Z^i_v$, et par les ensembles P-négligeables : c'est une tribu invariante par le flot. Nous posons $\underline{\underline{G}}_t = \underline{\underline{G}}\cap\underline{\underline{F}}_t$. Si $X\in L^2(\underline{\underline{F}})$, X a une représentation de la forme

$$X = E[X|\underline{\underline{F}}_t] + \sum_i \int_t^\infty f^i(s)dZ^i_s$$

Il en résulte que si $X\in L^2(\underline{\underline{G}})$, $E[X|\underline{\underline{F}}_t]$ est $\underline{\underline{G}}$-mesurable, donc $\underline{\underline{G}}_t$-mesurable, et que l'on a donc aussi

$$X = E[X|\underline{\underline{G}}_t] + \sum_i \int_t^\infty f^i dZ^i$$

En faisant tendre t vers $-\infty$, on voit que les Z^i forment une base de HAO de la filtration $(\underline{\underline{G}}_t)$, pour le flot $(\Omega,\underline{\underline{G}},P,\theta_t)$. Autrement dit, <u>on peut supposer</u> - quitte à changer de notations - <u>que la tribu $\underline{\underline{F}}$ est engendrée par les différences</u> $Z^i_u-Z^i_v$, <u>à des ensembles</u> P-<u>négligeables près</u>.

SECONDE ETAPE. Soit W l'ensemble de toutes les applications c.à.d.l.à.g. de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^I$, nulles à l'instant 0. Notons ζ^i_t les applications coordonnées, $\underline{\underline{H}}^\circ$ la tribu engendrée par toutes les différences $\zeta^i_u-\zeta^i_v$, θ_t l'opérateur de translation défini par

$$\zeta^i_u(\theta_t w) = \zeta^i_{t+u}(w)-\zeta^i_t(w)$$

Pour tout $\omega\in\Omega$, soit $j(\omega)$ l'élément de W défini par $\zeta^i_t(j(\omega))=Z^i_t(\omega)$, et soit Q la loi image de P par j. Alors $(W,\underline{\underline{H}}^\circ,Q,\theta_t)$ est un flot <u>isomorphe</u> à $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,\theta_t)$. Comme I est fini , $\underline{\underline{H}}^\circ$ est une tribu de BLACKWELL (noter qu'il suffit pour cela que I soit <u>dénombrable</u>).

Soit $\underline{\underline{H}}$ la tribu complétée de $\underline{\underline{H}}^\circ$, et soit $\underline{\underline{H}}_0$ la tribu (contenant les ensembles Q-négligeables) qui correspond à $\underline{\underline{F}}_0$ dans l'isomorphisme précédent. Comme $L^2(\underline{\underline{H}}_0)\subset L^2(\underline{\underline{H}})$ est séparable, il existe une suite (h_n) de fonctions $\underline{\underline{H}}^\circ$-mesurables bornées qui engendre $\underline{\underline{H}}_0$ aux ensembles Q-négligeables près. Posons $h_{nm} = m\int_0^\infty e^{-mt}h_n\circ\theta_{-t}dt$: la suite (h_{nm}) engendre aussi $\underline{\underline{H}}_0$ aux ensembles Q-négligeables près. Soit alors $\underline{\underline{H}}^\circ_{0-}$ la tribu engendrée par les v.a. $h_{nm}\circ\theta_{-s}$ (s<0) d'une part, et d'autre part par les v.a. $\zeta^i_u-\zeta^i_v$ (u,v, < 0), nous avons les propriétés suivantes

- Si X est une v.a. $\underline{\underline{H}}^\circ_{0-}$-mesurable, et s>0, $X\circ\theta_{-s}$ est $\underline{\underline{H}}^\circ_{0-}$-mesurable.

La famille de tribus $\underline{\underline{H}}^\circ_{t-} = \theta_t^{-1}(\underline{\underline{H}}^\circ_{0-})$ est donc croissante.

- La famille $\underline{\underline{H}}^\circ_{t-}$ est continue à gauche, et $\underline{\underline{H}}^\circ = \bigvee_t \underline{\underline{H}}^\circ_{t-}$.
- L'application $(t,w)\longmapsto\theta_t w$ est mesurable de $\mathbb{R}\times W,\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\underline{\underline{H}}^\circ$ dans $\underline{\underline{H}}^\circ$, et de $]-\infty,0[\times W$, $\underline{\underline{B}}(]-\infty,0[)\times\underline{\underline{H}}^\circ_{0-}$ dans $\underline{\underline{H}}^\circ_{0-}$ dans $\underline{\underline{H}}^\circ_{0-}$.
- La tribu $\underline{\underline{H}}^\circ_{0-}$ est séparable, donc est une tribu de Blackwell.
- Les hélices ζ^i forment une base de HAO relativement à la filtration $(\underline{\underline{H}}_t)$ obtenue en complétant $(\underline{\underline{H}}^\circ_{t-})$.

Ces points étant acquis, nous revenons aux notations standard : $\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ,P$, $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{F}}^\circ_t$, $\underline{\underline{F}}_t$, Z^i au lieu de $W,\underline{\underline{H}}^\circ,Q,\underline{\underline{H}}$, $\underline{\underline{H}}^\circ_{t-}$, $\underline{\underline{H}}_t$, ζ^i .

TROISIEME ETAPE. Nous appliquons le théorème d'AMBROSE-KAKUTANI de l'exposé II : nous isolons un ensemble invariant U, $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable, sur lequel le flot est isomorphe à un flot sous une fonction f $\underline{\underline{F}}^o_{0-}$-mesurable. La filtration sur U n'est pas triviale. En effet, supposons qu'elle le soit . Les HAO Z^i sont toutes indistinguables de 0 sur U, donc U est lui même égal, à un ensemble P-négligeable près, à l'ensemble $\{\underline{0}\}$, en notant $\underline{0}$ la trajectoire dont toutes les coordonnées sont constamment nulles. L'ensemble $\{\underline{0}\}$ n'est donc pas négligeable, et la trajectoire $\underline{0}$ doit appartenir à U, ce qui est absurde si l'on revient à la démonstration du théorème d'AMBROSE-KAKUTANI (U est un ensemble de trajectoires ayant un certain comportement oscillatoire au voisinage de $\pm\infty$, donc U ne contient aucune trajectoire constante).

Naturellement, certaines des hélices Z^i peuvent être nulles sur U, mais le flot induit sur U admet toujours une base d'hélices finie, ayant éventuellement moins d'éléments que la base initiale.

Noter aussi que le théorème d'AMBROSE-KAKUTANI nous permet de choisir une fonction f bornée inférieurement.

QUATRIEME ETAPE. Nous passons maintenant aux notations de l'exposé II. Nous avons un flot discret

$(\Omega,\underline{\underline{A}},s,\mu)$, filtré par une famille $(\underline{\underline{A}}_n)$ de tribus de BLACKWELL ; une fonction f $\underline{\underline{A}}_0$-mesurable bornée inférieurement, notre flot induit sur U étant isomorphe au flot sous f, noté $(\tilde{\Omega},\tilde{A}^o,\tilde{\theta}_t,\tilde{P})$. Comme f est bornée inférieurement, et $\tilde{P}$ est une loi de probabilité, μ est bornée.

Du point de vue des filtrations, nous avons <u>trois</u> familles filtrant le flot. La première est celle qui nous est donnée, induite sur U. Nous la noterons encore $\underline{\underline{F}}^o_t$. La seconde, $\underline{\underline{E}}^o_t$ est telle que

$$\underline{\underline{E}}^o_0 = \tilde{\underline{\underline{A}}}_0 = \underline{\underline{A}}_0\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})|_{\tilde{\Omega}}$$

et la troisième $\underline{\underline{G}}^o_t$ telle que $\underline{\underline{G}}^o_0 = \tilde{\underline{\underline{A}}}_{-1} = \underline{\underline{A}}_{-1}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})|_{\tilde{\Omega}}$. Nous savons d'après l'exposé II, proposition 3 , que les tribus $\underline{\underline{E}}^o_{-\infty}$ et $\underline{\underline{G}}^o_{-\infty}$ sont égales , d'après la prop.4, que les $\underline{\underline{E}}^o_t$ et $\underline{\underline{G}}^o_t$ encadrent $\underline{\underline{F}}^o_t$. Donc les tribus $\underline{\underline{E}}^o_{-\infty}, \underline{\underline{F}}^o_{-\infty}, \underline{\underline{G}}^o_{-\infty}$ <u>sont toutes trois égales</u>.

Maintenant, une base de HAO pour $(\underline{\underline{F}}^o_t)$ n'est pas une base de HAO pour $(\underline{\underline{E}}^o_t)$, mais l'interprétation du nombre d'éléments d'une base de HAO comme multiplicité du type de Lebesgue dans l'orthogonal de $\underline{\underline{E}}^o_{-\infty} = \underline{\underline{F}}^o_{-\infty}$ montre que

<u>Dans le flot sous</u> f $(\tilde{\Omega},\tilde{A},\tilde{P},\tilde{\theta}_t)$ <u>filtré par la famille</u> $(\underline{\underline{E}}^o_t)$, <u>il existe une base d'hélices non vide et finie</u> .

Nous changeons à nouveau de notation, en écrivant $\underline{\underline{F}}_t^o$ au lieu de $\underline{\underline{E}}_t^o$. L'ancienne filtration $\underline{\underline{F}}_t^o$ ne nous intéresse plus !

CINQUIEME ETAPE. Nous verrons un peu plus tard le théorème suivant, qui a son intérêt propre :

THEOREME 5. <u>Dans la filtration</u> $(\underline{\underline{F}}_t^o)$ <u>du flot sous</u> f <u>telle que</u>

$$\underline{\underline{F}}_0^o = \underline{\underline{A}}_0 \times \underline{\underline{B}}(\mathbb{R})|_{\tilde{\Omega}}$$

<u>l'espace des HAO est isomorphe à l'orthogonal</u> (<u>pour la mesure</u> μ) <u>de</u> $L^2(\underline{\underline{A}}_0)$ <u>dans</u> $L^2(\underline{\underline{A}}_1)$.

Nous verrons cela un peu plus tard. Il nous reste alors seulement

SIXIEME ETAPE . Dans un flot discret $(\Omega,\underline{\underline{A}},s,\mu)$ muni d'une filtration non triviale $\underline{\underline{A}}_n$, l'espace $L^2(\underline{\underline{A}}_1)\ominus L^2(\underline{\underline{A}}_0)$ est toujours de dimension infinie.

Soit en effet h une v.a. non nulle appartenant à cet espace (il en existe puisque la filtration n'est pas triviale). Quitte à diviser h par $(E[h^2|\underline{\underline{A}}_0])^{1/2}$, nous pouvons supposer que $E[h^2|\underline{\underline{A}}_0]$ est une indicatrice d'ensemble I_C , $C\in\underline{\underline{A}}_0$, non négligeable.

Lorsque $C=\Omega$, la démonstration est extrêmement simple : soit $k_n = h\circ s^{-n}$ pour $n\geq 1$, et soit $j_n=k_n.h$. Nous avons $E[j_n^2]=E[k_n^2h^2]= E[k_n^2E[h^2|\underline{\underline{A}}_0]]=E[k_n^2]=1$, $E[j_n|\underline{\underline{A}}_0]=0$, et $E[j_nj_m]=0$ pour $n\neq m$ par le même raisonnement. Nous avons donc construit une infinité d'éléments de $L^2(\underline{\underline{A}}_1)\ominus L^2(\underline{\underline{A}}_0)$ deux à deux orthogonaux.

Lorsque $C\neq\Omega$, on voit que le problème est de construire une infinité de v.a. $\underline{\underline{A}}_0$-mesurables k_n , telles que $E[k_n^2I_C]=1$, $E[k_nk_mI_C]=0$, après quoi on posera comme ci-dessus $j_n=k_n.h$.

Pour voir cela, nous utiliserons la notion de <u>flot induit</u> sur C . D'après le théorème de récurrence de Poincaré, pour presque tout $\omega\in C$ on a $s^n\omega\in C$ pour des n arbitrairement voisins de $+\infty$ et de $-\infty$. Quitte à modifier C d'un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que cette propriété a lieu pour <u>tout</u> $\omega\in C$. Soit alors pour $\omega\in C$ $T(\omega)=\inf\{n>0 : s^n\omega\in C\}$, et pour $k\geq 0$ par récurrence , $T_0(\omega)=T(\omega)$, $T_k(\omega) = \inf\{n>T_k(\omega) \quad s^n\omega \, C\}$. On pose ensuite

$$\bar{\Omega} = C \ ; \ \bar{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{A}}|_C \ ; \ \bar{\underline{\underline{A}}}_0=\underline{\underline{A}}_0|_C \ ; \ \bar{P} = P|_C \ ; \ \bar{s}(\omega)=s^{T(\omega)}(\omega)$$

et on montre que $(\bar{\Omega},\bar{\underline{\underline{A}}},\bar{P},\bar{s})$ est un flot discret, que $\bar{\underline{\underline{A}}}_0$ filtre. Et cette filtration n'est pas triviale dans le cas particulier qui nous occupe : en effet, introduisons l'HAO discrète (Z_n) telle que

$Z_1=h$, et posons $\bar{h}=Z_T I_C$. D'après un raffinement du théorème de POINCARE, dû à KAC[1] , on a $\int_C T < \infty$. Le théorème d'arrêt de DOOB, aussi sous une forme un peu plus raffinée, nous donne alors $E[\bar{h}^2] = E[TI_C]<\infty$, et $E[\bar{h}|\underline{\underline{A}}_0]=0$. Considérant alors $\bar{h}$ comme une v.a. sur $C=\Omega$, nous remarquons que $\bar{h}$ est $\underline{\underline{A}}_1$-mesurable ; la filtration n'est pas triviale, et la démonstration est achevée.

Avant de donner la démonstration de la 5e étape, indiquons une remarque, qui répond à une question posée dans un exposé antérieur.

REMARQUE. Nous avons expliqué dans la deuxième étape de la démonstration comment on peut construire un espace canonique permettant de représenter le flot sur la tribu engendrée par une famille dénombrable d'HAO. Mais la tribu d'un K-flot séparable est ainsi engendrée. On voit donc que les restrictions de mesurabilité, ou concernant la propriété de BLACKWELL des tribus, ne sont pas des restrictions sérieuses en théorie des K-flots, puisque tout K-flot séparable est isomorphe à un K-flot possédant ces propriétés.

LA 5e ETAPE : HAO D'UN FLOT SOUS UNE FONCTION

Nous considérons donc un flot discret $(\Omega,\underline{\underline{A}},s,P)$ filtré par une famille $(\underline{\underline{A}}_n)$, et le flot sous f $\underline{\underline{A}}_0$-mesurable : $(\tilde{\Omega},\tilde{\underline{\underline{A}}},\theta_t,\tilde{P})$, filtré par la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ telle que $\underline{\underline{F}}_0=\underline{\underline{A}}_0\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})|_{\tilde{\Omega}}$. Nous notons T_n , comme dans l'exposé II, p.5, les instants de saut successifs de la projection sur $\mathbb{R}$: nous travaillerons uniquement du côté des temps ≥ 0 . Comme f est $\underline{\underline{A}}_0$-mesurable, T_1 est une v.a. strictement positive et $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable : c'est donc un temps d'arrêt <u>prévisible</u>.

Nous donnons maintenant trois énoncés, empruntés au travail de J.LAZARO cité plus haut ; quant aux démonstrations, nous nous bornerons à de brefs commentaires.

PROPOSITION 1. <u>Soit</u> h <u>une v.a.</u> $\underline{\underline{A}}_1$-<u>mesurable</u>. <u>Le processus défini du côté positif par</u>

(A1) $$H_t^h = \sum_{k\geq 1} h\circ s^{k-1} I_{\{T_k\leq t\}}$$

<u>est une hélice</u> . <u>Si</u> h <u>est positive</u>, <u>c'est une hélice croissante dont</u>

---

1 Voir JACOBS. Lectures on ergodic theory, vol.I p.50 (Aarhus 1963).

la mesure de PALM est h.P , et on a

(A2) $\tilde{E}[H_t^h] = E[h].t$

(La formule (A2) reste vraie si $h\in L^1$).

DEMONSTRATION. P est la mesure de PALM de l'hélice fondamentale H_t^1, qui compte les sauts de la composante temporelle. Le fait que la mesure de PALM de H^h soit h.P revient au lemme 4 de l'exposé IV, p. 8 , ou au théorème 3 de l'exposé II, p.4 (lorsque h est une indicatrice : on passe ensuite au cas général par convergence monotone). La formule (A2) tient à l'interprétation de la masse totale de la mesure de PALM (par exemple, th.2 de l'exposé II, mais c'est trivial lorsque l'exposé IV est connu).

PROPOSITION 2. Si $h\in L^2(\underline{\underline{A}}_1)\ominus L^2(\underline{\underline{A}}_0)$ (pour la mesure P !), l'hélice (H_t^h) est une HAO. On a si h et k appartiennent à cet espace

(A3) $[H^h,H^k]_t = H_t^{hk}$

(A4) $\langle H^h,H^k\rangle_t = H_t^j$, où $j= E[hk|\underline{\underline{A}}_0]$ (espérance pour P)

DEMONSTRATION. Prenons d'abord $h\in L^1(\underline{\underline{A}}_1)$, orthogonale à $\underline{\underline{A}}_0$. Alors un calcul direct fondé sur le fait que T_1 est prévisible et que $\underline{\underline{F}}_{T_1-} = \underline{\underline{F}}_0$ (exposé II prop.1, p.6) montre que H^h est une martingale. Il est clair qu'elle n'a pas de partie continue, donc le processus croissant $[H^h,H^h]$ est donné simplement par la somme des carrés des sauts de H^h, ce qui revient à la formule (A3) lorsque h=k, et à (A3) en général par polarisation. En particulier lorsque $h\in L^1$, $[H^h,H^h]_t$ est intégrable pour tout t, et donc (H^h) est de carré intégrable, i.e. est une HAO. Enfin, H^j est une hélice prévisible, et la différence $H^{hk}-H^j$ est une martingale puisque hk-j est orthogonale à $\underline{\underline{A}}_0$.

PROPOSITION 3. Toute HAO est de la forme précédente.

DEMONSTRATION. Il suffit de démontrer qu'une HAO est constante sur $[0,T_1[$: cela résulte de ce que T_1 est prévisible et $\underline{\underline{F}}_{T_1-} = \underline{\underline{F}}_0$. Nous ne donnerons pas plus de détails.

Nous avons alors, sans même avoir besoin de la prop.3, tout ce qu'il faut pour démontrer le théorème 4 . Etant donnés deux éléments de $L^2(\underline{\underline{A}}_1)\ominus L^2(\underline{\underline{A}}_0)$ orthogonaux , h et k , les hélices H^h et H^k satisfont à $\tilde{\underline{\underline{E}}}[H^h_t H^k_t] = \tilde{E}[[H^h,H^k]_t]=E[H^{hk}_t] = t.E[hk]=0$: elles sont donc orthogonales, et comme nous savons qu'on peut construire des h_n deux à deux orthogonaux en infinité dénombrable, nous avons aussi une infinité de HAO orthogonales.

Mais la prop.3 nous permet aussi de construire explicitement des bases larges et des bases strictes de HAO, ce qui est agréable dans une théorie qui manque un peu d'exemples explicites.

APPENDICE

Nous donnons ici les détails promis sur la fin de la démonstration du théorème de décomposition spectrale, un lecteur - peut être notre seul lecteur, il a droit à tous nos égards - ayant été incapable de les trouver tout seul.

Reprenons donc l'énoncé du théorème 1, page 2 de l'exposé. Nous savons que la décomposition existe, nous voulons montrer qu'elle est unique. Nous avons vu au début de la démonstration que l'on peut se ramener au cas où $\underline{\underline{H}}_{-\infty}=0$, et où tous les éléments de $\underline{\underline{H}}$ sont de type diffus.

Nous comparons donc deux décompositions

$$\underline{\underline{H}} = \bigoplus_n S(x_n) = \bigoplus_n S(x'_n)$$

où les types des mesures spectrales $\rho_n=\rho_{x_n}$ décroissent, de même que ceux des mesures $\rho'_n = \rho_{x'_n}$.

Tout d'abord, le type de x_0 domine les types de tous les x_i, donc ceux de tous les éléments de $\underline{\underline{H}}$: donc c'est le type maximum de $\underline{\underline{H}}$. Le même raisonnement valant pour la seconde décomposition, $\dot{\rho}_0 = \dot{\rho}_0$.

Soit m_0 le nombre de ρ_i de type $\dot{\rho}_0$, et soit $V=\bigoplus_0^{m_0-1} S(x_i)$; $V^\perp$ est la somme des $S(x_i)$ restants, tout élément de $V^\perp$ a donc un type strictement majoré par $\dot{\rho}_0$, et le système $(x_i)_{0\leq i<m_0}$ est un système maximal d'éléments de type $\dot{\rho}_0$, deux à deux orthogonaux. Donc (théorème 2) m_0 est la multiplicité du type $\dot{\rho}_0$. En conséquence, m_0 est égal au nombre analogue m'_0 de la seconde décomposition.

Si $m_0=+\infty$, les deux décompositions sont alors équivalentes. Supposons donc $m_0<\infty$.

Conservons les notations V et $V^{\perp}$ introduites plus haut, et soit α un type majoré par celui de ρ_0, <u>mais non par celui de</u> ρ_{m_0}. Pour tout $i<m_0$, soit $y_i=g_i.x_i$ un élément de $S(x_i)$ de type α. Soit y un élément de type α s.o. aux y_i, $0\leqq i<m_0$; développons y sous la forme $y=\sum_n f_n.x_n$; alors pour $i<m_0$ $f_i.x_i$ est s.o. à $g_i.x_i$, donc $f_i.g_i=0$ ρ_0-p.p., et comme le type de $f_i.x_i$ est dominé par α, qui est le type de $g_i.\rho_0$, on a $f_i.x_i=0$, donc $y\in V^{\perp}$. Mais le type de tout élément de $V^{\perp}$ est dominé par celui de ρ_{m_0}, ce qui est absurde. Donc (y_i) est un système <u>maximal</u> d'éléments de type α deux à deux s.o., et la multiplicité de α est égale à m_0.

Un raisonnement tout analogue montre que, si m_1 est le nombre de ρ_i de la première décomposition de type $\dot\rho_{m_0}$, la multiplicité de $\dot\rho_{m_0}$ est m_0+m_1 exactement.

Alors : <u>parmi tous les types de multiplicité</u> $>m_0$, $\dot\rho_{m_0}$ <u>est le type maximum</u>. Comme m_0 ne dépend pas de la décomposition choisie, cela entraîne que ρ_{m_0} et ρ'_{m_0} sont équivalentes. De plus, m_0+m_1 <u>est la multiplicité de ce type</u>, et cela entraîne que $m_1=m'_1$.

Si $m'_1=+\infty$, la démonstration est achevée. Sinon, on continue...