PAUL-ANDRÉ MEYER

Une remarque sur les processus de Markov

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 555

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__555_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

UNE REMARQUE SUR LES PROCESSUS DE MARKOV

par P.A. Meyer

Considérons, sur un espace d'états E, un semi-groupe droit que nous supposerons borélien pour simplifier (compte tenu de l'existence des compactifications de Ray, ce n'est pas une grosse restriction). Considérons en la réalisation continue à droite canonique, avec les notations habituelles Ω, X_t, $\underline{\underline{F}}^o$,... et rappelons comment, par l'astuce magique de Dawson, on calcule pour toute loi P^μ la projection optionnelle (Y_t) d'un processus borné $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^o$-mesurable (Z_t) par rapport à la famille (continue à droite) $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$. On forme successivement

$$\begin{aligned} h(\omega,t,\omega') &= Z_t(\omega/t/\omega') \qquad (h(\omega/t/\omega')=h(k_t\omega/t/\omega')) \\ H(\omega,t,x\,) &= E^x[h(\omega/t/.)] = H(k_t\omega,t,x) \\ Y_t(\omega) &= H(\omega,t,X_t(\omega)) = H(k_t\omega,t,X_t(\omega)) \end{aligned}$$

Cette projection ne dépend pas de μ, et elle est optionnelle par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t^o)$.
En particulier, si (Z_t) est optionnel par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+}^o)$, (Z_t) et (Y_t) sont P^μ-indistinguables, et (Z_t) est donc P^μ-indistinguable d'un processus optionnel par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t^o)$, indépendant de μ.

Soit alors T un temps d'arrêt large, i.e. un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+}^o)$; appliquons le résultat précédent au processus (Z_t), indicatrice de $[\![T]\!]$, et soit A l'ensemble $\{(t,\omega) : Y_t(\omega)=1\}$. Alors A est strictement optionnel, indistinguable de $[\![T]\!]$ pour toute loi P^μ. D'après le théorème de section contenu dans ce volume, il existe pour toute loi μ un temps d'arrêt S_μ de la famille $(\underline{\underline{F}}_t^o)$, qui est une section complète de A (le graphe de S_μ passe dans A, et $P^\mu\{S_\mu<\infty\}$ $= P^\mu(\mathrm{proj}_\Omega A)$. Alors $T=S_\mu$ P^μ-p.s., et on voit que l'on <u>pourrait</u> se passer des temps d'arrêt larges en théorie des processus de Markov. Si l'on y réfléchit, c'est une manière d'interpréter la loi de tout ou rien.