SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

NICOLE EL KAROUI

Processus de réflexion dans $\mathbf{R}^n$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 534-554
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__534_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1973/74

PROCESSUS DE REFLEXION DANS R^n

par Nicole EL KAROUI

Le texte qui suit est celui d'un exposé fait à Strasbourg durant l'année 1972/73, à propos d'un travail effectué durant l'année 1971. Il n'est donc pas surprenant qu'il ne tienne pas compte des résultats plus récents obtenus dans le domaine étudié, mais que je tâcherai de signaler en cours de route.

D'autre part, j'ai suivi de près la présentation faite dans le Séminaire de Probabilités IV (n° 124) sur les diffusions à coefficients continus. J'y renverrai donc très fréquemment.

I. INTRODUCTION.

Nous nous proposons d'étudier une famille de processus de Markov felleriens, conservatifs, à trajectoires continues (diffusions) à valeurs dans un domaine $\overline{G}$ de R^d.

Pour simplifier l'exposé, nous nous limiterons à considérer le domaine suivant : $\overline{G} = \{x^1 \geq 0\}$ si $x = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$. On notera alors $G = \{x^1 > 0\}$ et $\partial G = \{x^1 = 0\}$.

Parler d'étude est ambitieux : en fait, nous résoudrons essentiellement des problèmes de construction et d'unicité.

Avant d'aller plus loin, nous considérons un exemple simple de tels processus, ce qui nous permettra de donner une justification intuitive à l'introduction d'un certain nombre de conditions, sans revenir à une étude directe générale.

I.A. UN EXEMPLE, LE BROWNIEN REFLECHI.

a) Soit $(\Omega, \mathcal{F}_t^\circ, \theta_t, \beta_t, P^x)$ le mouvement brownien canonique à valeurs dans R^d. Nous notons $(\beta_t^1, \beta_t^2, \ldots, \beta_t^d)$ les composantes de β_t et X_t le processus de composantes $(|\beta_t^1|, \beta_t^2, \ldots, \beta_t^d)$.

$\mathcal{F}_t^\circ$ désigne la tribu $\sigma(X_s; s \leq t)$ et $\mathcal{F}_t$ les tribus complétées de la manière habituelle.

Le semi-groupe du brownien est invariant par symétrie par rapport à l'hyperplan $\{x^1 = 0\}$. Un théorème de Dynkin prouve alors que le processus $\mathcal{X} = (\Omega, X_t, \mathcal{F}_t, \theta_t, P^x, x \in \bar{G})$ est un processus de diffusion conservatif à valeurs dans $\bar{G}$.

b) Influence de la réflexion : le temps local.

Pour toutes les lois P^x, $x \in \bar{G}$, $|\beta_t^1|$ est une sous-martingale des tribus $\mathcal{G}_t$ et des tribus $\mathcal{F}_t$. Il existe donc une fonctionnelle additive continue (f.a.c.) A_t telle que $M_t^1 = |\beta_t^1| - A_t$ soit une $\mathcal{F}_t$-martingale. La f.a. A ne charge que ∂G : en effet, désignons par σ le temps d'entrée dans ∂G. $\forall\, x \in \bar{G}$, $\beta_{t\wedge\sigma}^1 = |\beta_{t\wedge\sigma}^1| = M_{t\wedge\sigma}^1 + A_{t\wedge\sigma}^1$ est une P^x-martingale. Par suite $A_{t\wedge\sigma}^1$ est aussi une P^x-martingale, qui est donc nécessairement nulle, puisque $A_{t\wedge\sigma}^1$ est une f.a. continue.

On peut montrer qu'il existe une version de A qui est $\mathcal{F}_t^\circ$-mesurable. C'est cette version que nous considérons par la suite et que nous appellerons temps local.

c) La formule d'ITO.

Le processus $(M_t^1, \beta_t^2, \ldots, \beta_t^d)$ est un mouvement brownien d-dimensionnel. En effet, M_t^1 ne dépend manifestement que de β_t^1. Par suite les processus $M_t^1, \beta_t^2, \ldots, \beta_t^d$ sont indépendants et les martingales $M_t^1, \beta_t^1, \ldots, \beta_t^d$ deux à deux orthogonales.

Il reste à étudier le processus croissant associé à M_t^1.

Pour toute loi P^x, $(x \in \bar{G})$, nous avons que :

$$|\beta_t^1|^2 = |\beta_0^1|^2 + 2\int_0^t |\beta_s^1| \, dM_s^1 + dA_s + \langle M^1, M^1 \rangle_t$$

$$= |\beta_0^1|^2 + 2\int_0^t |\beta_s^1| \, dM_s^1 + \langle M^1, M^1 \rangle_t \, ,$$

car A ne charge que l'ensemble $\{|\beta_t^1| = 0\}$.

D'autre part, $\beta_t^{12} = 2\int_0^t \beta_s^1 \, d\beta_s^1 + (\beta_0^1)^2 + t$.

L'unicité du processus croissant associé à une martingale permet de conclure que $\langle M^1, M^1 \rangle_t = t$.

Mais alors, on déduit aisément de la formule d'Ito, que si f est une fonction de $C_b^2(\mathbb{R}^d)$,

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \Delta f(X_s)ds - \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^1} (X_s)dA_s$$

est une P^x-martingale pour tout x de $\overline{G}$.

C'est à cette propriété de martingale que nous allons nous attacher dans toute la suite.

I.B. DEFINITION D'UN PROCESSUS DE REFLEXION.

Plus généralement, on peut montrer qu'une vaste classe de processus de diffusion à valeurs dans $\overline{G}$ satisfait à une relation de type martingale comme ci-dessus, où l'opérateur Δ est remplacé par une opérateur elliptique L , et l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x^1}$ par un opérateur "frontière" Γ du type $\frac{\partial}{\partial x^1} + \mathcal{K}$ où $\mathcal{K}$ est un opérateur elliptique sur l'hyperplan $\partial G = \{x^1 = 0\}$.

Ceci a été démontré par Ventcell' puis Bony, Courrège et Priouret de manière analytique, sous des hypothèses assez restrictives.

Nous en avons donné une démonstration probabiliste récemment, à partir des techniques de balayage.

DEFINITION I.B.1. <u>Nous appelons processus de réflexion rapide à valeurs dans</u> $\overline{G}$, <u>associé à</u> (L,Γ) , <u>un processus de diffusion conservatif dans</u> $\overline{G}$, $\mathcal{X} = (\Omega^\circ, \mathcal{F}_t^\circ, X_t, \theta_t, P^x, x \in \overline{G})$ <u>pour lequel il existe une fonctionnelle additive continue</u> A , $\mathcal{F}_t^\circ$<u>-mesurable, de support</u> ∂G , <u>telle que</u>

pour toute f de $C_b^2(\bar{G})$,

$$E_x[f(X_t)] = f(x) + \int_0^t E_x[Lf(X_s)]ds + E_x \int_0^t \Gamma f(X_s)dA_s .$$

REMARQUE. Cette définition présente évidemment le gros inconvénient de ne pas s'exprimer uniquement en terme de semi-groupe du processus, mais nous verrons que c'est la plus opérative, du moins dans notre cadre.

La construction de ces processus a fait l'objet de nombreux travaux : le point de vue analytique, associé à des opérateurs très réguliers a été étudié par Sato-UENO puis Bony, Courrège et Priouret.

Ikéda puis Watanabe ont résolu, eux, des systèmes d'équations stochastiques.

Stoock et Varadhan ont aussi abordé ce problème, généralisant l'approche utilisée pour les diffusions sans condition frontière. Leur article a été le point de départ de ce travail : lorsque la condition frontière est de la forme $\frac{\partial}{\partial x^1}$, ils ont montré que si L était continu, strictement elliptique, il y avait un et un seul processus de réflexion rapide associé à L et Γ .

Nous nous proposons de généraliser leur étude au cadre $\Gamma = \frac{\partial}{\partial x^1} + \tilde{\Lambda}$, en insistant particulièrement sur les équations différentielles stochastiques satisfaites par le processus X_t .

I.C. NOTATIONS ET HYPOTHESES.

La forme explicite de l'opérateur elliptique L sera :

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x)\, D^2_{i,j}f(x) + \sum_{j=1}^{d} b_j(x)\, D^j f(x) .$$

Celle de $\tilde{\Lambda}$ sera $\tilde{\Lambda}f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^{d} \alpha_{i,j}(x)\, D^2_{i,j}f(x) + \sum_{j=2}^{d} \gamma_j(x)\, D^j f(x)$. La matrice des $a_{i,j}(x)$ est désignée par $a(x)$, celle des $\alpha_{i,j}(x)$ par $\alpha(x)$. Le terme $b(x)$ désigne le vecteur $(b_j(x))$, le terme $\gamma(x)$, le vecteur $(1,\gamma_2(x),\dots,\gamma_d(x))$, le terme $\tilde{\gamma}(x)$, le vecteur $(\gamma_2(x),\dots,\gamma_d(x))$. Nous supposerons toujours que tous ces coefficients sont boréliens bornés.

L'espace canonique est l'espace Ω° des applications continues de R^+ dans $\overline{G}$, dont les coordonnées sont désignées par $X_t(\omega) = \omega(t)$. Comme toujours les tribus $\mathcal{F}_t^\circ$ sont les tribus $\sigma(X_s; s \leq t)$.

Si P est une loi de probabilité sur Ω°, nous noterons $\mathcal{F}_t$ tribu $\mathcal{F}_t^\circ$ complétée à l'aide des ensembles P-négligeables de $\mathcal{F}_\infty^\circ$, et $\mathcal{F}_t^+$, la famille des tribus $\mathcal{F}_t$ rendue continue à droite.

DEFINITION I.C.1. <u>Nous dirons qu'une loi</u> P <u>sur</u> Ω° <u>est une solution au problème des martingales partant de</u> x <u>à l'instant</u> 0 (x- PBM) <u>s'il existe un processus croissant continu</u> $\mathcal{F}_t^\circ$<u>-mesurable</u> A_t, <u>ne chargeant que</u> ∂G <u>tel que</u> :

1) $P(X_0 = x) = 1$

2) <u>pour toute</u> f <u>de</u> $C_b^2(\overline{G})$

$$C_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)dx - \int_0^t \Gamma f(X_s)dA_s \tag{2}$$

<u>est une P-martingale</u>.

REMARQUE. L'image sur l'espace canonique d'un processus de réflexion rapide associé à (L,Γ) est pour tout x de $\overline{G}$, une solution du x- PBM.

Nous nous proposons de montrer que réciproquement l'existence et l'unicité des solutions des x- PBM pour tout x de $\overline{G}$, sont équivalentes à celles des processus de réflexion rapide associé à $(L,\Gamma.)$, puis de décrire des situations dans lesquelles nous savons vérifier ces propriétés.

Dans un premier temps, nous donnons des formes équivalentes de la condition (2), qui nous permettrons de montrer que X_t est nécessairement solution d'un système d'équations stochastiques, dont la résolution nous permettra de répondre en partie au second point annoncé.

II. LE PROBLEME DES MARTINGALES.

II.A. FORMES EQUIVALENTES.

Le théorème que nous allons énoncer est l'équivalent du théorème 1 de [5] (p. 242), pour les diffusions.

THEOREME 1. Soit P une solution du x - PBM . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) pour toute fonction f de $C_b^2(\overline{G})$

$$C_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds - \int_0^t \Gamma f(X_s)dA_s$$

est une P-martingale ;

2) pour toute fonction f de $C^2(\overline{G})$, C_t^f est une P-martingale locale ;

3) notons N_t le processus $X_t - X_0 - \int_0^t b(X_s)ds - \int_0^t \gamma(X_s)dA_s$. D'autre part, si $\theta \in R^d$, $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_d)$, nous notons $\tilde{\theta} = (\theta_2,\ldots,\theta_d)$. Pour tout θ de R^d , $< \theta,N_t >$ est une P-martingale de processus croissant $A_t^\theta = \int_0^t < \theta,a(X_s)\theta > ds + \int_0^t < \tilde{\theta},\alpha(X_s)\tilde{\theta} > dA_s$;

4) pour tout θ de R^d , $X_t^\theta = \exp[< \theta,N_t > - \frac{1}{2} A_t^\theta]$ est une P-martingale.

REMARQUE. Nous noterons avec des primes, les énoncés dans lesquels martingale est remplacé par martingale locale.

Démonstration : La preuve des équivalences suivantes est analogue à celle donnée dans [5] (p. 243).

1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3' $\Leftrightarrow$ 4') .

Remarquons que le caractère borné de a et α entraîne que si $< \theta,N_t >$ est une martingale locale de processus croissant A_t^θ , $< \theta,N_t >$ est en réalité une vraie martingale.

Il reste à montrer que X_t^θ est une vraie martingale.

Nous aurons besoin pour le faire, comme dans le cas de R^d, d'une majoration fondamentale qui entraîne en particulier qu'on a une probabilité petite d'être en dehors d'une compact suffisamment gros.

II.B. UNE MAJORATION FONDAMENTALE.

THEOREME 2. Soit M_t la martingale vectorielle définie au théorème 1.

$$P(\sup_{s\leq t} \|M_s\| > c) \leq 2d \exp - \frac{c^2}{2d^2K(t+h(c))} + \exp - \frac{(h(c)-1-K''t)^2}{2K't.}$$

où $h(c)$ est une fonction positive convenablement choisie, qui tend vers $+\infty$, si c tend vers $+\infty$ et où les constantes K, K', K'' ne dépendent que des bornes de a, α, b, γ.

Cette majoration repose sur le théorème 2 de [5] (p. 247), que nous rappelons pour plus de clarté.

LEMME 3. Soit Y une martingale vectorielle d-dimensionnelle, dont les processus croissants B^i des composantes sont majorées par une constante k. Alors,

$$P(\sup_{s} \|Y_s\| > c) \leq 2d \exp - \frac{c^2}{2Kd^2} .$$

Démonstration du théorème 2 : Nous désignerons par $M_t^* = \sup_{s\leq t} \|M_s\|$. La difficulté pour établir cette majoration provient de ce que le processus croissant associé à M_t n'est pas borné.

On considère alors les deux expressions suivantes :

$$P(A_t \leq h(c), M_t^* > c) \quad \text{et} \quad P(A_t > h(c), M_t^* > c) \leq P(A_t > h(c)) .$$

* Pour majorer la première, on adapte la démonstration du lemme 3 (cf. [5], p. 247), en remarquant que sur $A_t \leq h(c)$, les processus croissants des composantes de M sont majorés par $K(t+A_t) \leq K(t+h(c))$.

$$P(A_t \leq h(c), M_t^* > c) \leq 2d \exp - \frac{c^2}{2Kd^2(t+h(c))} .$$

** On cherche à majorer exponentiellement $P(A_t > h(c))$.

Soit $\Phi(x) = 1.e^{-x^1}$, $\Gamma\Phi \equiv 1$ sur ∂G et $\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \equiv 0$, $\forall\, j \geq 2$.

$$\Phi(X_t) = \Phi(X_0) + \int_0^t L\Phi(X_s)dx + A_t + C_t^\Phi ,$$

où C_t^Φ est une martingale de processus croissant

$$\int_0^t < \text{grad}\,\Phi \ , \quad a\ \text{grad}\,\Phi > ds + \int_0^t < \widetilde{\text{grad}}\,\Phi \ , \ \alpha\ \widetilde{\text{grad}}\,\Phi > dA_s$$

d'après la formule d'Ito et la condition 3) du théorème 1.

Or $\widetilde{\text{grad}}\,\Phi \equiv 0$.

Par suite C_t^Φ est une martingale dont le processus croissant est borné sur $[0,t]$.

$$P(A_t > h(c)) = P(-C_t^\Phi > h(c) - \Phi(X_t) + \Phi(X_0) + \int_0^t L\Phi(X_s)ds)$$

$$\leq P[-C_t^\Phi > h(c) - (1+K''t)]$$

où K'' est un majorant de $|L\Phi|$.

Si $h(c) > 1 + K''t$, et si K' est un majorant de $|< \text{grad}\,\Phi, a\ \text{grad}\,\Phi >|$.

$$P(A_t > h(c)) \leq \exp - \frac{[h(c) - (1+K''t)]^2}{2K't} .$$

COROLLAIRE 4. $X_t^\theta = \exp[< \theta, M_t > - \frac{A_t^\theta}{2}]$ <u>est une vraie martingale</u>.

<u>Démonstration</u> : $E[(X_t^\theta)^2] \leq E(\exp 2 < \theta, M_t >) \leq E(\exp 2|\theta|M_t^*)$. Il suffit donc de montrer que pour tout $\theta > 0$, $E(\exp \theta\, M_t^*) < +\infty$. Remarquant que $\int_{M_t^* \geq c} \exp \theta\, M_t^*\, dP = e^{\theta c}\, P(M_t^* \geq c) + \theta \int_c^{+\infty} e^{\theta u}\, P(M^* \geq u)du$, on choisit h de la forme $h(c) = c^\alpha$ $(\frac{1}{2} < \alpha < 1)$ et on vérifie facilement que le membre de droite est fini.

REMARQUE. On montre de même que $E(\exp \theta\, A_t) < +\infty$.

II.C. LE PROBLEME DES SOUS-MARTINGALES.

Dans un certain nombre de situations, en particulier pour les résultats obtenus à l'aide de convergence des mesures de probabilité, il est intéressant d'avoir une caractérisation des solutions des x- PBM , ne faisant pas intervenir le temps local.

C'est le point de vue qu'on utilisé Stroock et Varadhan, dans leur étude, le résultat est fort et long à démontrer. Son seul inconvénient est d'exiger Γ continu.

THEOREME 5. *Supposons que les coefficients de* I *soient continus bornés. Les deux propositions suivantes sont équivalentes* :

a) P *est solution du* x- PBM ;

b) *pour toute* f *de* $C_b^2(\overline{G})$ *satisfaisant à* $\Gamma f \geq 0$ *sur* ∂G ,

$H_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds$ *est une* P-*sous-martingale*.

Nous ne démontrerons pas ce théorème. La démonstration peut se te retrouver en généralisant les résultats de [7] .

II.D. PROPRIETES DU PROCESSUS CROISSANT.

Nous nous proposons de donner la forme explicite du processus croissant, et d'en déduire ensuite certaines propriétés de mesurabilité et d'additivité.

THEOREME 6. *Soit* P *une solution du* x- PBM .

a) $\int_0^t 1_{\partial G}(X_s)a_{11}(X_s)ds = 0 \quad P$- p.s.

b) *Notons* $G_\varepsilon = \{x \in \overline{G} \; ; \; 0 \leq x^1 < \varepsilon\}$.

$A_t^\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t 1_{G_\varepsilon}(X_s)a_{11}(X_s)ds - \int_0^t 1_{\partial G}(X_s)b^1(X_s)ds$ *converge dans* L^2 *vers* A_t .

Il existe une sous-suite ε_n *telle que* $A_t^{\varepsilon_n}$ *converge p.s. uniformément sur* $[0,T]$.

REMARQUE. La propriété a) justifie le nom de rapide donné au processus de réflexion. Elle montre bien que nous sommes loin d'avoir décrit tous les processus à valeurs dans $\bar{G}$.

En effet, même pour le brownien réfléchi, il suffit de faire le changement de temps associé à $t+A_t$ pour construire un processus qui séjourne sur ∂G . C'est pour simplifier l'exposé que nous avons abordé ce point de vue.

Toutefois, l'étude faite jusqu'à maintenant se généralise facilement à condition de poser un problème de martingales différent.

<u>Démonstration du théorème 6</u> :

a) Soit $\Phi(x) = 1-e^{-x_1}$.

D'après le théorème 1, $\Phi(X_t) = \Phi(X_0)+C_t^\Phi+\int_0^t L\Phi(X_s)ds+A_t$
$$= \Phi(X_0)+C_t^\Phi+V_t ,$$

où C_t^Φ a pour p.c. $\int_0^t <\text{grad}\,\Phi\ ,\ a\ \text{grad}\,\Phi>ds$.

On se propose de montrer que ce p.c ne charge pas ∂G .

Comme Φ est positive ou nulle, on peut calculer par Ito,

$$\Phi(X_t)^{2+r} = \Phi(X_0)^{2+r}+(2+r)\int_0^t \Phi(X_s)^{1+r}(dC_t^\Phi+dV_s)$$
$$+\frac{(2+r)(1+r)}{2}\int_0^t [L\Phi(X_s)]^2 d<C_s^\Phi,C_s^\Phi> .$$

Regardons la limite de cette expression lorsque r tend vers zéro. Il est facile de voir que chacun des termes converge dans L^2 et qu'à la limite, on obtient :

$$\Phi(X_t)^2 = \Phi(X_0)^2+2\int_0^t \Phi(X_s)[dC_s^\Phi+dV_s]+\int_0^t 1_{\{\Phi(X_s)\neq 0\}}d<C_s^\Phi,C_s^\Phi> ,$$

ce qui entraîne que $\int_0^t 1_{\{\Phi(X_s)\neq 0\}}d<C_s^\Phi,C_s^\Phi> = <C^\Phi,C_\cdot^\Phi>_t$, soit encore $\int_0^t 1_{\partial G}(X_s) <\text{grad}\,\Phi\ ,\ a\ \text{grad}\,\Phi>ds = 0$, P-p.s. sur ∂G grad $\Phi\equiv 1$ donc

$$\int_0^t 1_{\partial G}(X_s)a_{11}(X_s)ds = 0 .$$

b) Considérons les fonctions $\Phi^\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} x^2 + \frac{\varepsilon}{2}$ si $0 \le x < \varepsilon$.

$= x$ si $x \ge \varepsilon$.

Φ^ε est de classe C_b^2 sauf au point $x = \varepsilon$, où sa dérivée seconde admet une discontinuité du premier ordre.

On peut vérifier que la formule d'Ito est néanmoins valable.

Mais alors

$$\Phi^\varepsilon(X_t) = \Phi^\varepsilon(X_0) + \int_0^t 1_{\{X_s^1 \ge \varepsilon\}} (dM_s^1 + b^1(X_s)ds)$$

$$+ \int_0^t 1_{\{X_s^1 < \varepsilon\}} \left(\frac{X_s^1}{\varepsilon}\right)(dM_s^1 + b^1(X_s)ds)$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{G_\varepsilon}(X_s) a_{11}(X_s) ds + \int_0^t \Phi'^\varepsilon(X_s) dA_s .$$

M_t^1 représente la martingale $X_t^1 - X_0^1 - \int_0^t b^1(X_s)ds - A_t$, de processus croissant $\int_0^t a_{11}(X_s)ds$.

$\Phi'^\varepsilon(0) = 0$ donc le terme $\int_0^t \Phi'^\varepsilon(X_s)dA_s$ est identiquement nul.

Lorsque ε tend vers zéro, la martingale $M_t^1 - \int_0^t 1_{\{X_s^1 \ge \varepsilon\}} dM_s^1$ a un processus croissant égal à $\int_0^t 1_{\{X_s^1 < \varepsilon\}} a_{11}(X_s)ds$, qui tend vers vers $\int_0^t 1_{\partial G}(X_s) a_{11}(X_s)ds = 0$.

Par suite $\int_0^t 1_{\{X_s^1 \ge \varepsilon\}} dM_s^1$ converge dans L^2 vers M_t^1 et on peut extraire une sous-suite qui converge p.s. uniformément vers M_t^1 . On montre de même que la martingale $\int_0^t 1_{\{X_s^1 < \varepsilon\}} \left(\frac{X_s^1}{\varepsilon}\right) dM_s^1$, dont le processus croissant est majoré par $\int_0^t 1_{\{0 < X_s^1 < \varepsilon\}} a_{11}(X_s)ds$ converge dans L^2 vers zéro, et qu'on peut extraire une sous-suite qui converge p.s. uniformément.

$\int_0^t 1_{\{X_s^1 \ge \varepsilon\}} b^1(X_s)ds$ converge p.s. et dans L^2 vers $\int_0^t 1_{\{X_s^1 > 0\}} b^1(X_s)ds$. De même, $\int_0^t 1_{\{0 < X_s^1 < \varepsilon\}} \left(\frac{X_s^1}{\varepsilon}\right) b^1(X_s)ds$ converge p.s. et dans L^2 vers zéro. $\Phi^\varepsilon(X_t)$ converge p.s. et dans L^2 vers X_t^1 .

Par suite, $\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{G_\varepsilon}(X_s) a_{11}(X_s)ds$ converge dans L^2 vers un processus croissant B_t . Il existe aussi une sous-suite qui converge p.s. uniformément sur $[0,T]$ vers B_t . B_t satisfait à l'équation

$$X_t^1 = X_0^1 + M_t^1 + \int_0^t 1_{\{X_s^1 > 0\}} b^1(X_s)ds + B_t .$$

C'est-à-dire que $A_t = B_t - \int_0^t 1_{\{X_s^1 = 0\}} b^1(X_s)ds$.

$$\text{Soit} \quad A_t + \int_0^t 1_{\{X_s^1 = 0\}} b^1(X_s)ds = \lim_{\varepsilon_n \to 0} \frac{1}{2\varepsilon_n} \int_0^t 1_{G_{\varepsilon_n}}(X_s) a_{11}(X_s)ds .$$

REMARQUES. a) La démonstration est valable même si on a des martingales par rapport à des tribus plus grosses que $\mathcal{F}_t^\circ$. Elle permet alors de prouver qu'on peut toujours choisir une version $\mathcal{F}_t^\circ$-mesurable de A , et que cette version détermine alors une fonctionnelle additive, en ce sens que si θ_t désigne les opérateurs de translation sur Ω° ,

$$A_{t+s} - A_t = A_s \circ \theta_t \qquad \text{P-p.s.}$$

b) Supposons a_{11} minoré. Alors $\int_0^t 1_{\partial G}(X_s)ds = 0$ P-p.s. et $A_t = \lim \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{G^\varepsilon}(X_s) a_{11}(X_s)ds$. La forme explicite de A_t est alors tout à fait analogue à celle d'un temps local de brownien.

III. LE PROBLEME DES MARTINGALES ET LES EQUATIONS STOCHASTIQUES.

On y arrive enfin. Pour aller plus loin, nous sommes amenés à supposer a_{11} minoré. Enonçons tout de suite le théorème.

III.A. LE SYSTEME STOCHASTIQUE.

THEOREME 7. Les deux propositions suivantes sont équivalentes si a_{11} est minoré.

1) Il existe une solution P au x-PBM .

2) Il existe a) un espace de probabilité $(\hat{\Omega},\hat{\mathcal{G}}_t,\hat{P})$ complet

b) un processus croissant continu $\hat{A}_t$ localement intégrable.

c) Un $\hat{P}$-mouvement brownien issu de 0 d-dimensionnel $\hat{\beta}_t = (\hat{\beta}_t^i)$.

d) Un $\hat{P}$-mouvement brownien issu de 0 $(d-1)$-dimensionnel indépendant du précédent $\hat{\hat{\beta}}_t$, tels que le système suivant ait au moins une solution $\hat{Z}_t$, $\hat{P}$-p.s. continue à valeurs dans $\overline{G}$:

$$\text{i) } \hat{Z}_0 = x$$

$$\text{ii) } \int_0^t 1_{\partial G}(\hat{Z}_s)d\hat{A}_s = \hat{A}_t$$

$$\text{iii) } \hat{Z}_t = x + \int_0^t \sigma(\hat{Z}_s)d\hat{\beta}_s + \int_0^t b(\hat{Z}_s)ds$$

$$+ \int_0^t \gamma(\hat{Z}_s)d\hat{A}_s + \int_0^t \tilde{\sigma}(\tilde{Z}_s)d\hat{\hat{\beta}}_{\hat{A}_s}$$

où σ est une racine carrée de a $(\sigma\sigma^* = a)$

et $\tilde{\sigma}$ est une racine carrée de α $(\tilde{\sigma}\,\tilde{\sigma}^* = \alpha)$

REMARQUE. Nous verrons au cours de la démonstration de $1 \Rightarrow 2$ que X_t lui-même est solution de ce système stochastique.

Ce théorème est une conséquence de la proposition suivante [6].

PROPOSITION 8. Soit $(\Omega,\mathcal{G}_t,P)$ un espace de probabilité et Y_t une martingale vectorielle d-dimensionnelle, continue, telle que $Y_0 = 0$, et pour tout θ de R^d , $<\theta,Y_t>$ a un processus croissant absolument continu par rapport à un même

<u>p.c.</u> C_t . <u>On note</u> $d(s)$ <u>la matrice des densités</u> $d_{ij}(s)$ <u>c'est-à-dire</u>

$$< Y^i, Y^j >_s = \int_0^t d_{ij}(s) dC_s \ .$$

Soit d'autre part $(\Omega^\circ, \overline{\beta}_t, \mathcal{F}_t^\circ, W)$ le mouvement brownien canonique. Définissons $\hat{\Omega} = \Omega \times \Omega^\circ$, $\hat{\mathcal{G}}_t^\circ = \mathcal{G}_t \otimes \mathcal{F}_t^\circ$, $\hat{P} = P \otimes W$, $\hat{\mathcal{G}}_t$ la complétée de $\mathcal{G}_t$ pour P . Si $\delta(s)$ désigne une racine carrée de $d(s)$, il existe une martingale vectorielle $\hat{N}_t$, dont les composantes, orthogonales entre elles, ont pour processus croissant $\hat{C}_t(\omega,\omega') = C_t(\omega)$, telle que

$$\hat{Y}_t(\omega,\omega') = Y_t(\omega) = \int_0^t \hat{\delta}(s)(\omega) d\hat{N}_s(\omega,\omega') \ .$$

La martingale $\hat{N}_t$ est obtenue de la manière suivante : soit δ_1 l'unique matrice telle que $\delta\delta_1 = Id$ où Id est la matrice identité sur l'image de d . On note $Id^\perp$ l'identité sur l'orthogonal de l'image de d .

$$\text{Alors} \quad \hat{N}_t(\omega,\omega') = \int_0^t \delta_1(s,\omega) dY_s(\omega) + \int_0^t Id^\perp(s,\omega) d\overline{\beta}_{C_s(\omega)}(\omega') \ .$$

<u>Démonstration du théorème 7</u> :

a) 1) $\Rightarrow$ 2). Pour ne pas trop alourdir l'écriture nous ne préciserons pas que nous aggrandissons l'espace.

$$\text{Soit} \quad M_t = X_t - X_0 - \int_0^t b(X_s) ds - \int_0^t \gamma(X_s) dA_s \quad \text{et définissons}$$

$$Y_t^1 = \int_0^t 1_G(X_s) dM_s \ , \ Y_t^2 = \int_0^t 1_{\partial G}(X_s) dM_s \ .$$

Nous appliquons la proposition 8 aux martingales Y^1 et Y^2 .

i) $< \theta, Y^1 >_t$ a pour processus croissant $\int_0^t 1_G(X_s) < \theta, a(X_s)\theta > ds$ qui est égal à $\int_0^t < \theta, a(X_s)\theta > ds$ puisque a_{11} étant minoré, $\int_0^t 1_{\partial G}(X_s) ds = 0$.

Soit σ une racine carrée de a . Il existe un mouvement brownien d-dimensionnel tel que $Y_t^1 = \int_0^t \sigma(X_s) d\hat{\beta}_s$ où $\hat{\beta}$ est défini par :

$$\hat{\beta}_t = \int_0^t 1_G(X_s)\sigma_1(X_s) dM_s + \int_0^t I_{a^\perp}(X_s) d\hat{\beta}_s \ .$$

ii) Y_t^2 est une martingale (d-1)-dimensionnelle.

En effet, si M^1 désigne la première composante de M_t , $\int_0^t 1_{\partial G}(X_s)dM_s^1$ a pour processus croissant $\int_0^t 1_{\partial G}(X_s)a_{11}(X_s)ds = 0$. D'autre part, pour tout $\tilde{\theta}$ de R^{d-1} , $<\tilde{\theta},Y^2>_t$ a pour processus croissant

$$\int_0^t 1_{\partial G}(X_s) <\tilde{\theta},a(X_s)\tilde{\theta}> ds + \int_0^t <\tilde{\theta},\alpha\tilde{\theta}> dA_s \ .$$

Mais le séjour sur le bord est nul, donc $<\tilde{\theta},Y_t^2>$ a pour processus croissant $\int_0^t <\tilde{\theta},\alpha(X_s)\tilde{\theta}> dA_s$.

D'après la proposition 8, si $\tilde{\sigma}$ est une racine carrée de α ,

il existe une martingale $\hat{N}_t$ dont les composantes satisfont à $<\hat{N}^d,\hat{N}^i>_t = \delta_{i,j}A_t$ qui est définie par

$$\hat{N}_t = \int_0^t 1_{\partial G}(X_s)\tilde{\sigma}_1(X_s)d\tilde{M}_s + \int_0^t Id^{\perp}(X_s)d\bar{\bar{\beta}}_{A_s}$$

et qui est telle que $Y_2(t) = \int_0^t \tilde{\sigma}(X_s)d\hat{N}_s$.

X_t s'écrit donc sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \gamma(X_s)dA_s + \int_0^t \sigma(X_s)d\hat{\beta}_s + \int_0^t \tilde{\sigma}(X_s)d\hat{N}_s \ .$$

Il reste à vérifier que $\hat{\beta}_t$ et $\hat{N}_t$ sont orthogonales. Or $\int_0^t 1_G(X_s)dM_s$ est orthogonale à $\int_0^t 1_{\partial G}(X_s)dM_s$. Les browniens $\bar{\beta}_t$ et $\bar{\bar{\beta}}_t$ sont indépendants et indépendants de $\mathcal{F}^\circ$, d'où le résultat.

La martingale (2d-1)-dimensionnelle $(\hat{\beta}_t,\hat{N}_t)$ a ses composantes orthogonales. Soit $\tau(t)$ l'inverse de A_t et $\tilde{\beta}_t = \hat{N}_{\tau(t)}$.

D'après un théorème de Knight (Séminaire de Probabilités V, p. 191), le processus $(\hat{\beta}_t,\tilde{\beta}_t)$ est un mouvement brownien (2d-1)-dimensionnel, ce qui entraîne $\hat{\beta}_t$ et $\tilde{\beta}_t$ sont indépendants.

<u>Réciproque</u> : Soit $\hat{Z}_t$ une solution du système stochastique et P la loi image de $(\hat{Z}_t,\hat{P})$ sur l'espace canonique.

La seule difficulté réside dans la définition de l'image de $\hat{A}$. On peut montrer qu'on a la même forme explicite de $\hat{A}_t$ que celle définie au théorème 6, ne dépendant que de $\hat{Z}_s$. Le reste s'en déduit aisément.

III.B. DEFINITIONS RELATIVES AUX SOLUTIONS DU SYSTEME STOCHASTIQUE.

Nous redonnons ici des définitions introduites par Yamada-Watanabe et Watanabe dans [8] et [9] .

DEFINITIONS. On appelle solution un terme $Z = (\hat{\Omega},\hat{\mathcal{G}}_t,\hat{P},\hat{Z}_t,\hat{A}_t,\hat{\beta}_t,\hat{\hat{\beta}}_t)$ où les différents éléments ont les propriétés énoncées au théorème 7.

On dit qu'il y a unicité trajectorielle, si Z^1 et Z^2 étant deux solutions définies sur un même espace de probabilité, $\hat{\beta}^1 \equiv \hat{\beta}^2$, $\hat{\hat{\beta}}^1_{A^1_t} \equiv \hat{\hat{\beta}}^2_{A^2_t}$ implique $Z^1 \equiv Z^2$, $A^1 \equiv A^2$.

On dit qu'on a unicité en loi si les lois induites sur l'espace canonique sont les mêmes.

On a alors le théorème suivant qui est une simple extension de [9].

THEOREME 9. L'unicité trajectorielle entraîne l'unicité en loi.

Pour montrer qu'on obtient un processus de Markov fort, il faudrait étudier le problème des martingales avec départ aléatoire.

Cela se fait sensiblement de la même façon que dans le cas des diffusions. On a alors le théorème suivant (cf. [9]).

THEOREME 10. L'unicité en loi est équivalente à celle des solutions au PBM . Si pour toute loi μ il y a unicité et existence de la solution de loi initiale μ , le processus $\mathcal{X} = (\Omega^\circ,\mathcal{F}^\circ_t,X_t,\theta_t,P_x)$ est un processus de Markov fort dont le semi-groupe est universellement mesurable.

IV. SITUATIONS D'EXISTENCE ET D'UNICITE.

Pour montrer l'existence et l'unicité des solutions du système stochastique, nous sommes amenés à faire des hypothèses sur la régularité des coefficients, mais non sur la stricte ellipticité des opérateurs.

Les résultats qui suivent sont dus essentiellement à Watanabe dans [8] .

THEOREME 11. Supposons les coefficients de σ , $\tilde{\sigma}$, b et γ lipschitziens bornés. Le système stochastique admet alors une et une seule solution au sens de l'unicité en loi.

REMARQUE. On pourrait affaiblir les hypothèses de régularité sur b et γ en établissant une formule de Comeron-Martin à l'aide de la majoration fondamentale.

Démonstration : a) On commence par supposer $a_{11} = 1$ et $b_1 = 0$.

X_t^1 est alors solution de l'équation.

$$X_t^1 = X_0^1 + \beta_t^1 + A_t \ .$$

Cette équation admet une solution, définie par

$$A_t = \sup_{s \leq t} \ [\sup(-(X_0^1 + \beta_t^1),0)] \ .$$

A_t est un processus croissant continu, qui ne croît manifestement que lorsque $X_0^1 + \beta_t^1 + A_t = 0$.

On a donc bien construit une solution de cette équation, qui n'admet qu'une seule solution.

En effet, si X_t^1 et Y_t^1 sont deux solutions positives et A_t^1 , A_t^2 les processus croissant associés, on a

$$X_t^1 - Y_c^1 = A_t^1 - A_t^2$$

ce qui entraîne que

$$(X_t^1 - Y_t^1)^2 = 2\int_0^t (A_s^1 - A_s^2)(dA_s^1 - dA_s^2) = 2\int_0^t (X_s^1 - Y_s^1)(dA_s^1 - dA_s^2)$$

$$= -2\int_0^t (Y_s^1\ dA_s^1 + X_s^1\ dA_s^2)\ ,$$

car A^1 ne charge que $\{X^1 = 0\}$ et A^2 que $\{Y^1 = 0\}$.

On a donc P-p.s. $(X_t^1 - Y_t^1)^2 \le 0$, ce qui implique que les deux processus continus X_t^1 et Y_t^1 sont indistinguables.

Remarquons que le problème des martingales associé à X_t^1 était le problème associé à l'opérateur Δ sur R^+ et $\frac{d}{dx_1}$ en zéro. Nous avons vu en introduction que le brownien réfléchi était solution de ce problème. Comme il y a unicité trajectorielle, il y a unicité en loi et la loi de X_t^1 est celle d'un module de brownien issu de X_0^1 à l'instant 0 .

b) Notons H l'espace des processus de norme { } finie, où $\{Z\}_t^2 = E\int_0^t Z_{\tau(s)}^2\ ds < +\infty$, $\tau(s)$ étant l'inverse du processus $t+A_t$.
On peut définir alors, l'opérateur S défini sur H par :

$$S(Z)(t) = x + \int_0^t \sigma(Z_s)\ d\beta_s + \int_0^t b(Z_s)\ ds + \int_0^t \gamma(Z_s)\ dA_s + \int_0^t \tilde{\sigma}(Z_s)\ d\tilde{\beta}_{A_s}\ .$$

On a manifestement, pour tout temps d'arrêt τ borné,

$$E\|S(Z^1)(\tau) - S(Z^2)(t)\|^2 \le K[E\int_0^\tau \|\sigma(Z_s^1) - \sigma(Z_s^2)\|^2 ds + E\int_0^\tau \|b(Z_s^1) - b(Z_s^2)\|^2 ds$$

$$+ E\int_0^\tau \|\gamma(Z_s^1) - \gamma(Z_s^2)\|^2 ds + E\int_0^t \|\tilde{\sigma}(Z_s^1) - \tilde{\sigma}(Z_s^2)\|^2 dA_s$$

soit encore

$$E\|S(Z^1(\tau)) - S(Z^2(t))\|^2 \le K\ E\int_0^\tau \|Z_s^1 - Z_s^2\|^2 ds + dA_s\ .$$

$\tau(t)$ est un temps d'arrêt borné, par suite pour tout t ,

$$E\|S(Z^1)(\tau(t)) - S(Z^2)(\tau(t))\|^2 \le K\ E\int_0^t \|Z_{\tau(s)}^1 - Z_{\tau(s)}^2\|^2 ds\ .$$

S est bien un opérateur à valeurs dans H qui sera contractant à partir d'un certain moment.

En effet,

$$\|S^n(Z^1)(\tau(t)) - S^n(Z^2)(\tau(t)\|^2 \leq K^n \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n+1)!} E\int_0^t \|Z^1_{\tau(s)} - Z^2_{\tau(s)}\|^2 ds .$$

S^{n_0} pour n_0 assez grand est donc un opérateur de contraction, qui admet un point fixe, $\bar{\xi}_t$. Si on a deux processus tels que $\{\xi^1 - \xi^2\}^2_t = 0$, les processus $S(\xi^1)_t$ et $S(\xi^2_t)$ sont définis et continus et presque sûrement égaux. Par suite $\xi_t = S(\bar{\xi}_t)$ est encore un point fixe pour S^{n_0}, qui est un processus continu. On a manifestement

$$\{\xi(t) - S(\xi)_t\}^2 = \{S^{k n_0}(\xi_t) - S^{k n_0+1}(\xi)_t\}^2 \leq \frac{K^{k n_0}}{(k_{n_0})!} \{\xi(t) - S(\xi)_t\}^2 .$$

Ce qui entraîne que pour la norme $\{\ \}$ $\xi(t) = S(\xi(t))$.

La continuité entraîne que les processus $\xi(\tau(t))$ et $S(\xi(\tau(t))$ sont indistinguables, mais comme $\tau(t)$ est strictement croissant et tend vers $+\infty$, donc $\xi(t) = S(\xi(t))$.

Si nous avons deux solutions au système, elles sont nécessairement p.s. égales pour la norme $\{\ \}$, et les mêmes remarques que ci-dessus prouvent qu'elles sont égales.

c) Supposons maintenant a_{11} minoré et $b_1 \equiv 0$.

On se ramène par changement de temps inverse de $\int_0^t a_{11}(X_s)ds$ à la situation précédente et réciproquement.

Si b_1 n'est pas nul et a_{11} minoré, d'après la formule de Cameron-Martin $R_t = \exp - \int_0^t \frac{b_1}{a_{11}}(X_s)\, dX^1_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{b_1^2}{a_{11}}(X_s)ds$, est une P-martingale, et pour la loi $R_t \cdot P$, $\beta^1_t + \int_0^t b_1(X_s)ds$ est un mouvement brownien, et réciproquement, en introduisant "formellement" R_t^{-1}. D'où encore l'existence et l'unicité. Remarquons que ce type de démonstration nous permet de supposer b_1 seulement borélien.

Il est sûr qu'il existe d'autres situations d'existence et d'unicité des solutions au problème des martingales. S. Nakao et T. Shiga ont prouvé ces résultats dans le cas où les opérateurs L et $\mathcal{K}$ sont strictement elliptiques à coefficients continus.

Pour répondre au problème posé initialement, c'est-à-dire de construire des processus de réflexion rapide, il reste à montrer qu'on peut choisir une version commune des processus croissants A_t^x , associés au x-PBM , ce qui se fait sans trop de mal à l'aide des techniques markoviennes.

Il y aurait beaucoup de choses à dire encore : entre autres que le semi-groupe envoie C_0 dans C_0 , et surtout que l'on sait travailler sur un domaine fermé de R^d , en localisant puis en recollant les processus obtenus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BONY, COURREGE et PRIOURET — Semi-groupe de Feller sur une variété à bord compacte. Annales de l'Inst. Fourier, tome XVIII, Fasc. 2, 1969.

[2] IKEDA — On the construction of two-dimensional diffusion processes. Mem. of College of Sc., Univ. of Kyoto, Série A, Vol. XXXIII, Math. n° 3, 1961.

[3] PRIOURET — Processus de Markov sur une variété à bord compacte. Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. IV, n° 3, 1968, p. 193-253.

[4] SATO-UENO — Multidimensional diffusion process and the Markov process on the boundary. J. Math. Kyoto Univ., t. 14, 1965, p. 529-605.

[5] SEMINAIRE de PROBABILITES IV Lecture Notes in Math., 1970, n° 124, Diffusions à coefficients continus.

[6] SEMINAIRE de PROBABILITES VII Springer Verlag, n° 321. Processus de diffusion dans R^n .

[7] STROOCK et VARADHAN Diffusion Processes with boundary condition.

[8] S. WATANABE On stochastic differential equations for Multidimensional Diffusion processes with boundary condition. J. of Math. of Kyoto Univ., vol. 11, n° 1 et n° 3, 1971.

[9] YAMADA et WATANABE On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. J. of Math. of Kyoto Univ., fin 1970, et vol. 11, n° 3, 1971.