BERNARD MAISONNEUVE

Le comportement de dernière sortie

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 522-529
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__522_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

LE COMPORTEMENT DE DERNIERE SORTIE

par Bernard MAISONNEUVE

Le comportement d'un processus fortement markovien (X_t) à la sortie d'un ensemble aléatoire homogène M (en général, l'ensemble des visites de (X_t) dans un borélien) a fait l'objet de nombreuses études. Citons les articles de MOTOO [12], DYNKIN , [3] et [4], PITTENGER et SHIH [13], GETOOR et SHARPE [5], MAISONNEUVE et MEYER [10], ainsi qu'un article à paraître de KAROUI et REINHARD. Les notations ici seront celles de [10], que nous désignerons aussi par EAMH (ensembles aléatoires markoviens homogènes, exposés 1 à 5).

Le centre de la question semble résider dans le calcul de la projection duale bien-mesurable de mesures aléatoires du type

$$dA_t^f = \sum_{g>0,\, g\in M^{\rightarrow}} f\circ\theta_g \; \varepsilon_g(dt) \tag{1}$$

où $M^{\rightarrow}$ désigne l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à M, et f est une fonction positive sur Ω.

Dans EAMH le calcul de la projection bien-mesurable de dA_t^f résulte de la théorie du système de LEVY appliquée au processus d'incursion : $M^{\rightarrow}$ est un ensemble de sauts de ce processus. Cette méthode a l'avantage de dépouiller le problème de son aspect analytique, et en particulier d'éviter complètement l'usage de la transformation de Laplace, grâce à l'interprétation probabiliste des opérations effectuées. Toutefois, pour appliquer la version moderne de la théorie du système de LEVY due à BENVENISTE et JACOD, il nous avait fallu supposer que (X_t) satisfaisait aux hypothèses droites, et démontrer - au prix d'un travail considérable - qu'il en était de même du processus d'incursion.

Dans un article à paraître ([8]), nous établissons ce résultat central de projection sans utiliser le processus d'incursion, ni le système de LEVY. La démonstration se réduit pour l'essentiel à une application du théorème de continuité absolue de MOTOO. La simplicité provient de ce que les instants de $M^{\rightarrow}$ ne peuvent s'accumuler par la droite, ce qui est généralement faux pour les instants de sauts d'un processus de Markov.

A l'intention des auditeurs du séminaire, et aussi des puristes de la langue anglaise, nous résumons ci-dessous les résultats de [8], ainsi que ceux d'un autre article à paraître ([9]), où l'on établit la propriété de Markov forte du processus $(t-L_t, X_{L_t})$, L_t désignant sup $\{ s \leq t : s \in \overline{M} \}$. Ce résultat de renouvellement est même démontré pour des systèmes régénératifs plus généraux que les processus fortement markoviens.

I. PROCESSUS DE MARKOV

Soit $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{F}}_t, X_t, \theta_t, P^\mu)$ la réalisation continue à droite canonique d'un semi-groupe (P_t) sur E satisfaisant aux hypothèses droites . Les tribus des ensembles universellement mesurables dans E et Ω sont notées $\underline{\underline{E}}^*$ et $\underline{\underline{F}}^*$ respectivement.

Soit M un ensemble aléatoire dans $]0,\infty[\times\Omega$, que nous supposons homogène ($\theta_t^{-1}(M) = (M-t) \cap]0,\infty[$) et progressivement mesurable pour toutes les familles complétées $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$. On note

(2) $\qquad R = \inf \{ s>0 : s \in M \}$ (aussi noté D dans EAMH)

qui est un temps terminal parfait exact, et

(3) $\qquad F = \{ x \in E : P^x\{R=0\} = 1 \}$

Nous exigeons de plus que R soit une fonction <u>universellement mesurable</u> sur Ω, hypothèse anodine (cf. la fin de EAMH.1). Par comparaison avec les hypothèses de EAMH, p.213 , nous n'exigeons rien pour l'instant quant à la durée de vie, et nous n'exigeons pas que R soit un temps d'arrêt algébrique - hypothèse dont on peut montrer qu'elle ne restreint pas la généralité, mais seulement au prix de beaucoup d'efforts (fin de EAMH.1).

Soit $M^{\to}$ l'ensemble des extrémités gauches d'intervalles contigus à $\overline{M}$. Voici le résultat principal de projection

THEOREME 1. <u>Il existe une mes.aléatoire bien-mesurable homogène</u> dB_t, <u>dont le noyau 1-potentiel est propre, et un noyau de transition</u> $\hat{P}$ <u>de</u> $(E,\underline{\underline{E}}^*)$ <u>dans</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}}^*)$, <u>tels que pour toute fonction</u> f <u>positive, bornée et</u> $\underline{\underline{F}}^*$<u>-mesurable sur</u> Ω <u>la projection duale bien-mesurable de la mesure aléatoire</u>

(4) $$\overline{\sum_{0<g\in M^{\to}}} f\circ\theta_g \, \varepsilon_g(dt)$$

<u>soit la mesure</u> $\hat{E}^{X_t}[f]dB_t$[1] . <u>On peut supposer de plus</u> (nous le ferons par la suite) <u>que l'on a</u> $\hat{P}^x = P^x$ <u>pour tout</u> $x \notin F$, <u>et que</u> $\hat{P}^x\{R=0\}=0$, $\hat{E}^x[1-e^{-R}] \leq 1$ <u>pour tout</u> $x \in E$.

---

1 Comme dans EAMH, nous notons $\hat{E}^x$ les intégrales par rapport à $\hat{P}^x$.

Dans [8], le couple $((B_t),\hat{P}^{\bullet})$ est appelé <u>système de sortie</u> du processus (X_t) relativement à l'ensemble M.

<u>Esquissons la démonstration de ce théorème</u>. L'ensemble $M^{\rightarrow}$ peut s'écrire $M_b^{\rightarrow}\cup M_\pi^{\rightarrow}$, où

(5) $$M_b^{\rightarrow}=M^{\rightarrow}\cap\{\ t\ :\ X_t\notin F\ \},\ M_\pi^{\rightarrow}=M^{\rightarrow}\cap\{\ t\ :\ X_t\in F\ \}$$

D'après la proposition 2 de EAMH.2, p.192 (voir aussi [8] pour une nouvelle démonstration), l'ensemble $M_b^{\rightarrow}$ est bien-mesurable, tandis que $M_\pi^{\rightarrow}$ ne contient aucun graphe de temps d'arrêt. La projection duale bien-mesurable de la mesure aléatoire $\sum_{0<g\in M_b^{\rightarrow}} f\circ\theta_g\ \varepsilon_g(dt)$ est alors, d'après la propriété de Markov forte , la mesure aléatoire

$$\sum_{0<g\in M_b^{\rightarrow}} E^{X_g}[f]\ \varepsilon_g(dt)$$

(écrire $M_b^{\rightarrow}$ comme une réunion dénombrable de graphes disjoints de temps d'arrêt : EAMH, p.192). Pour traiter la mesure aléatoire $\sum_{0<g\in M_\pi^{\rightarrow}} f\circ\theta_g\ \varepsilon_g(dt)$, regardons la fonction

$$v^f = E^{\bullet}[\sum_{0<g\in M_\pi^{\rightarrow}} e^{-g}(f(1-e^{-R}))\circ\theta_g\ ]$$

On vérifie que $v^f\leq \|f\|_\infty$, et que v^f est un 1-potentiel régulier - la régularité provenant de ce que $M_\pi^{\rightarrow}$ ne contient aucun graphe de temps d'arrêt - donc le 1-potentiel d'une fonctionnelle additive continue A^f. On montre facilement que A^f est portée par F, et absolument continue par rapport à la fonctionnelle $A=A^1$. D'après un théorème de MOTOO, étendu sans hypothèse (L) par MOKOBODZKI et GETOOR (voir EAMH.2 p. 199), il existe une densité Nf de A^f par rapport à A. Par un argument classique (voir l'exposé de GETOOR contenu dans ce volume, Ω étant universellement mesurable dans un compact métrisable), on peut "recoller" les densités Nf en un noyau sousmarkovien N de $(E,\underline{\underline{E}}^*)$ dans $(\Omega,\underline{\underline{F}}^*)$. Pour établir le théorème, il ne reste plus qu'à poser

(6) $$dB_t = dA_t + \sum_{0<g\in M_b^{\rightarrow}} \varepsilon_g(dt)$$
$$\hat{E}^x[f] = E^x[f] \text{ si } x\notin F\ ,\ \hat{E}^x[f]=N(x,f/1-e^{-R}) \text{ si } x\in F$$

La fonctionnelle A_t a un 1-potentiel borné par construction. Soit u la fonction $E^{\bullet}[1-e^{-R}]$, qui est strictement positive sur F^c ; nous avons

$$E^{\bullet}[\sum_{0<g\in M_b^{\to}} e^{-g}(1-e^{-R})\circ\theta_g] \leqq 1$$

donc, en appliquant la propriété de Markov forte

$$E^{\bullet}[\sum_{0<g\in M_b^{\to}} e^{-g}u\circ X_g] \leqq 1$$

La fonction v égale à u sur F^c, à 1 sur F est partout >0, et on a $E^{\bullet}[\int_0^{\infty} e^{-s}v\circ X_s dB_s] \leqq 2$ (même $\leqq 1$, si on regarde bien). On en déduit bien que la mesure aléatoire dB_t a un noyau 1-potentiel propre, et le théorème est établi.

REMARQUES. La partie importante de l'énoncé concerne la sommation sur $M_{\pi}^{\to}$ - et malheureusement, c'est l'autre partie qui nous a obligés à parler de " mesures aléatoires homogènes bien-mesurables " au lieu de " fonctionnelles additives".

Nous ne reviendrons pas sur la propriété de Markov des mesures $\hat{P}^x$ relativement au semi-groupe (P_t), pour dB-presque tout x. Il n'y a pas lieu de modifier à cet égard l'exposition de EAMH.4 à partir de la proposition 1, p.234-237. Nous allons plutôt utiliser le théorème 1 pour établir divers résultats liés aux décompositions de dernière sortie, et en particulier pour retrouver (sans transformation de Laplace) les résultats de GETOOR-SHARPE.

Posons d'abord

(7) $\qquad Q_t(x,h) = E^x[h\circ X_t\, I_{\{R>t\}}] \qquad (t\geqq 0)$

Ces noyaux forment le semi-groupe "tué à R" .

(8) $\qquad \hat{Q}_t(x,h) = \hat{E}^x[h\circ X_t\, I_{\{R>t\}}] \qquad (t\geqq 0)$

Ces noyaux sont portés par F^c et les mesures $\hat{Q}_t(x,.)$ constituent, pour dB-presque tout x (on peut supposer, d'ailleurs, que cela a lieu pour tout x, mais c'est sans importance pour nous), une loi d'entrée pour le semi-groupe (Q_t), non bornée si $x\in F$.

(9) $\qquad L_t = \sup \{ s\leqq t \ :\ s\in\overline{M} \} \qquad (t\geqq 0)$

(10) $\qquad dB_t^0 = dB_t + I_{\{R>0\}}\varepsilon_0(dt)$

Enfin, rappelons que la famille complétée $\underline{\underline{F}}_t^{\mu}$ satisfait, pour toute loi initiale μ, aux conditions habituelles de la théorie générale des processus. Nous désignerons par $\check{\underline{\underline{F}}}_t^{\mu}$ la tribu $\underline{\underline{F}}_{L_t}^{\mu}$, constituée des $A\in\underline{\underline{F}}^{\mu}$ tels que I_A puisse s'écrire Z_{L_t} pour au moins un processus bien-mesurable Z (de la famille $(\underline{\underline{F}}_t^{\mu})$). Comme d'habitude on écrira $\check{\underline{\underline{F}}}_t=\bigcap_{\mu}\check{\underline{\underline{F}}}_t^{\mu}$.

On retrouve alors les résultats de GETOOR-SHARPE :

PROPOSITION 1. Soient Z un processus bien-mesurable (de $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$) positif, F,g,h des fonctions universellement mesurables positives $\mathbb{R}_+\times\Omega$, $\mathbb{R}_+\times E$ et E respectivement. On a alors les relations suivantes

(11) $E^\mu[\sum_{s\in M^\to} Z_s(\omega)F(s,\theta_s\omega)] = E^\mu[\int_{[0,\infty[} Z_s(\omega)dB_s^o(\omega)\int F(s,w)\hat{P}^{X_s(\omega)}(dw)]$

Ici on considère que $0\in M^\to$ si $R>0$.

(12) $E^\mu[\, Z_{L_t} g(t-L_t,X_{L_t})h\circ X_t\, I_{\{L_t<t\}}]$

$$= E^\mu[\int_{[0,t[} Z_s g(t-s,X_s)\hat{Q}_{t-s}(X_s,h)\; dB_s^o\;]$$

(13) $P_t(x,h) = Q_t(x,h)+E^x[h\circ X_t I_M(t)]+E^x[\int_{]0,t]}\hat{Q}_{t-s}(X_s,h)dB_s]\quad (t>0)$

(décomposition de dernière sortie).

(14) $E^\mu[h\circ X_t|\check{\underline{\underline{F}}}_t^\mu] = q_{t-L_t}(X_{L_t},h)\;\; P^\mu$-p.s., où

(15) $q_u(x,h) = \hat{Q}_u(x,h)/\hat{Q}_u(x,1)$ si $u>0$, $= h(x)$ si $u=0$.

(11) se démontre par un argument de classes monotones. (12) se déduit de (11) en prenant

$$F(s,\omega) = g(t-s,X_0(\omega))h\circ X_{t-s}(\omega)I_{\{0<t-s<R\}}(\omega)$$

(13) se déduit de (12) en prenant $Z=1$, $g=1$. (14) résulte de (13) en y prenant successivement $g(u,x)=q_u(x,h)$ et $h=1$, puis $g=1$, h ayant le même sens dans les deux formules, selon l'argument de GETOOR-SHARPE [5].

Soit maintenant T un temps d'arrêt de la famille $(\check{\underline{\underline{F}}}_t^\mu)$[1]; on définit L_T, $\check{\underline{\underline{F}}}_T^\mu$ de la manière naturelle, et on obtient par approximation dyadique de T

THEOREME 2. Pour tout temps d'arrêt de la famille $(\check{\underline{\underline{F}}}_t^\mu)$ on a

(16) $\hat{Q}_{T-L_T}(X_{L_t},1)\;>\;0\quad P^\mu$-p.s. sur $\{L_T<T<\infty\}$

(17) $E^\mu[h\circ X_T|\check{\underline{\underline{F}}}_T] = q_{T-L_T}(X_{L_T},h)\;\; P^\mu$-p.s. sur $\{T<\infty\}$

De ce théorème nous allons dériver la propriété de Markov du processus $\check{X}_t=(t-L_t,X_{L_t})$[2], comme nous l'avions fait dans le chapitre IX de [7].

1 Cette famille est croissante.

2 Ce processus est noté $\overline{X}_t$ dans [7], chap.IX, et L_t y est noté G_t .

Les améliorations par rapport à [7] sont ici les suivantes : nous savons établir la propriété de Markov <u>forte</u> de $(\check{X}_t)$, et écrire une fonction de transition $(\check{P}_t)$ qui est un vrai semi-groupe (comme on le voit par un calcul simple, à partir de la forme explicite de q_u).

Posons $\hat{E}=\mathbb{R}_+\times E$, $\hat{E}_\Delta = \hat{E}\cup\{(+\infty,\partial)\}$. Définissons le noyau K de $\hat{E}$ dans $\hat{E}_\Delta$ par la formule

(18) $$K((u,x),g) = q_u(x, E^{\cdot}[g(R,X_R)])$$

THEOREME 3. *Pour $t\geqq 0$, définissons les noyaux $\check{P}_t$ sur $\hat{E}$ en posant, si f est positive sur $\hat{E}$*

(19) $$\check{P}_t((u,x),f) = f(a+t,x)K((u,x),(]t,\infty[\times E)\cup\{(+\infty,\partial)\}) + K((u,x),\check{f}_t)$$

où $\check{f}_t$ est définie sur $\hat{E}_\Delta$ par

(20) $$\check{f}_t(r,y) = E^y[f\circ\check{X}_{t-r}] \text{ si } r\leqq t \text{ , } 0 \text{ si } r>t \text{ .}$$

Alors $(\check{P}_t)$ est un semi-groupe sur $\hat{E}$, et pour toute mesure P^μ le processus $(\check{X}_t)$ est fortement markovien par rapport à la famille $(\check{\underline{F}}_t)$, avec $(\check{P}_t)$ comme semi-groupe de transition.

Rappelons que le processus tué au temps R,

$$Y_t=X_t \text{ si } t<R, \ \partial \text{ si } t\geqq R$$

admet (Q_t) comme semi-groupe de transition. Si au lieu du temps de première entrée de M on considère le temps de dernière sortie de M

(21) $$L = \sup \{ s : s\in M \}$$

alors , d'après un résultat de MEYER, SMYTHE et WALSH [11], le processus $(X_{L+t})_{t>0}$ est encore un processus de Markov, de fonction de transition (Q_t^φ), où φ est la fonction $P^{\cdot}\{R=\infty\}$, invariante pour (Q_t). Nous avons montré dans EAMH.2, p.211, que cela résulte facilement - et sans discrétisation - du théorème 1 et de la propriété de Markov des mesures $\hat{P}^x$. On trouvera dans [8] l'extension de ce résultat à la première excursion de longueur > a :

THEOREME 4. *Soit L^a le début de la première excursion de (X_t) de longueur > a. Posons $\varphi_t = P^{\cdot}\{R\geqq a-t\}$ pour $0<t<a$ et*

(22) $$Q_s^t(x,h) = \frac{1}{\varphi_s(x)} Q_{t-s}(x,h\varphi_t) \qquad \left(\frac{0}{0}=0 \right)$$

Alors pour toute loi P^μ le processus $(X_{L^a+t})_{0<t<a}$ est un processus de Markov non homogène, de fonction de transition $(Q_s^t)_{0<s\leqq t<a}$

REMARQUE. Pour $t \geq a$, le processus(X_{L^a+t}) admet (P_t) comme fonction de transition, car L^a+a est un temps d'arrêt.

On trouvera enfin dans [8] des considérations sur le temps local, et le point de vue des excursions changées de temps.

II. SYSTEMES REGENERATIFS QUELCONQUES

Une grande partie des résultats précédents peuvent être étendus aux systèmes régénératifs sous des hypothèses que nous allons préciser.

Nous appellerons <u>système régénératif</u> un terme $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{F}}_t, X_t, \theta_t, P^\mu ; M)$, où la première partie des notations est familière en théorie des processus de Markov. à ceci près que les mesures P^μ ne sont plus construites à partir d'un semi-groupe (P_t), et où M est un <u>fermé droit</u> aléatoire, universellement progressif, homogène dans $]0,\infty[$.

Pour tout temps d'arrêt T de $(\underline{\underline{F}}_t)$ dont le graphe passe dans M, on exige la propriété de Markov, ou de régénération

(23) $\quad E^\mu[f\circ\theta_T | \underline{\underline{F}}_T] = E^{X_T}[f] \quad$ p.s. sur $\{T<\infty\}$ [1]

Les axiomes de [7] ou [10] (EAMH p.213) reviennent à supposer que l'on y considère un ensemble de régénération fermé droit <u>minimal</u>.

Nous conservons les notations relatives à M : $M^{\rightarrow}, M_b^{\rightarrow}$, $M_\pi^{\rightarrow}$ (formule (5)), L_t(fle.(9)), R (fle.(2)), F (fle.(3)). Dans l'article [9] nous montrons que <u>si</u> M <u>est fermé</u>, <u>et si l'ensemble</u> $\{t : X_t \in F\}$ <u>est bien-mesurable</u>, les propriétés de $M_b^{\rightarrow}$ et $M_\pi^{\rightarrow}$ utilisées plus haut subsistent, et <u>l'énoncé du théorème 1 reste vrai</u> sans modification.

La démonstration de [9] repose sur le caractère fortement markovien du processus $\hat{X}_t = (R, X_R)\circ\theta_t$ (EAMH.3, p.220). Mais ce processus ne satisfait pas nécessairement aux hypothèses droites (?), et on ne peut donc utiliser les résultats de projection classiques sur les fonctionnelles additives : il faut un résultat récent de BENVENISTE et JACOD [2]. A part ces difficultés, la démonstration est analogue à celle du théorème 1. En fait, [9] ne contient pas le théorème 1 dans toute sa force, mais pour des fonctions f du type $g(R, X_R)$: pour atteindre

---

1 Comme dans EAMH.3, p.213, il faut supposer que (23) a lieu aussi pour T=0, ou convenir que M contient 0.

le cas général, il faudrait utiliser le processus d'incursion tout entier, et le lemme 1 de EAMH.4, p.236.

REMARQUE. On aimerait traiter les systèmes régénératifs sans avoir à prendre de réalisations compliquées des processus $(\hat{X}_t)$ ou $(\bar{X}_t)$. Il faudrait pour cela disposer de versions mieux adaptées des résultats de [2] et du théorème de MOTOO.

Nous étudions aussi dans [9] la propriété de Markov forte du processus $(\check{X}_t)$, qui n'a plus lieu en tous les temps d'arrêt. Dans [6], JACOD donne des résultats analogues, en supposant M fermé droit minimal, par une méthode qui semble moins directe, puisqu'elle repose sur la théorie du temps local selon [7], mais qui semble exiger un peu moins de limites à gauche sur le processus (X_t).

REFERENCES

[1]. A.BENVENISTE et J.JACOD (1973). Systèmes de Lévy des Processus de Markov. Invent. Math. 21, 183-198.

[2]. A.BENVENISTE ET J.JACOD (1973). Projection des fonctionnelles additives et représentation des potentiels d'un processus de Markov. C.R.A.S. Paris, série A, t.276, p.1365.

[3]. E.B.DYNKIN (1968). On extensions of a Markov process. Theory of probability 13, p.672-676.

[4]. E.B.DYNKIN (1971). Wanderings of a Markov process. Theory of probability 16, p.401-428.

[5]. R.K.GETOOR et M.J.SHARPE (1973). Last exit decompositions and distributions. Indiana Univ. Math. J., 23, p.

[6]. J.JACOD (1974). Systémes régénératifs et prócessus semi-markoviens.

[7]. B.MAISONNEUVE (1974). Systèmes régénératifs. Société Math. de France, Astérisque n°15.

[8]. B.MAISONNEUVE. Exit systems. A paraître dans Annals of Prob.

[9]. B.MAISONNEUVE. Exit results for semi-regenerative processes. A paraître.

[10]. B.MAISONNEUVE et P.A.MEYER (1974). Ensembles aléatoires markoviens homogènes, Séminaire de Strasbourg VIII, Lecture Notes in M. (Springer) vol.381, p.172-261.

[11]. P.A.MEYER, R.T.SMYTHE et J.B.WALSH (1972). Birth and Death of Markov processes. 6th Berkeley Symp.,III, p.295-306.

[12]. M.MOTOO (1967). Application of additive functionals to the boundary problem of Markov processes. 5th Berkeley Symp., II.2, p.

[13]. A.O.PITTENGER et C.T.SHIH. Coterminal families and the strong Markov property. Trans. Amer. Math. Soc.,182, 1973, p.1-42.