MICHEL WEIL

Surlois d'entrée

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 486-493
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__486_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1973/74

SURLOIS D'ENTREE

par Michel WEIL

1. INTRODUCTION.-

D'habitude on construit un processus markovien de fonction de transition (P_t) à partir d'une loi d'entrée $(\lambda_t)_{t\geq 0}$. Nous voulons suivant T. LEVIATAN [2], faire une chose semblable mais à partir d'une surloi d'entrée $(\mu_s)_{s\geq 0}$ c'est-à-dire une famille de mesures finies telle que

$$\mu_{s+t} \geq \mu_s P_t \qquad s \geq 0 \text{ , } t \geq 0 \text{ .}$$

Naturellement on ne retrouve pas les processus markoviens classiques mais les processus de HELMS [1] , processus auxquels on injecte de la masse au fur et à mesure, et dont l'évolution est markovienne.

2. THEOREME DE T. LEVIATAN.

L'espace des états des processus est un espace localement compact à base dénombrable E , muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$. A E nous adjoindrons deux points :

- le point delta : ∂ qui sera soit un point isolé si E est compact, soit le point à l'infini dans le cas contraire.
- le point atled : 6 , point isolé différent de ∂.

Nous poserons

$$\tilde{E} = E \cup \{6\} \cup \{\partial\}$$

$$E_\partial = E \cup \{\partial\} \text{ ,}$$

et les tribus boréliennes correspondantes seront notées $\tilde{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}_\partial$.

Sur E nous nous donnons un semi-groupe sous markovien $(P_t)_{t\geq 0}$, rendu markovien au moyen du point ∂ et de la manière usuelle.

Introduisons les définitions :

SURLOI D'ENTREE.- C'est une famille $(\mu_t)_{t\geq 0}$ de mesures finies sur E_∂ et telle que

$$\mu_{s+t} \geq \mu_s P_t \qquad s \geq 0 \text{ , } t \geq 0 \text{ .}$$

PROCESSUS A CREATION ET ANNIHILATION (ou de HELMS).- C'est un processus stochastique $(Y_t, \mathcal{G}_t, t \geq 0)$ sur un espace de mesure σ-finie $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{P})$, à valeurs dans $\tilde{E}$ et tel que

1 a) ∂ est un point cimetière :

$$Y_t(\omega) = \partial \Rightarrow Y_s(\omega) = \partial \text{ pour } s \geq t \text{ , } \omega \in \tilde{\Omega} \text{ .}$$

1 b) 6 est un point de maternité :

$$Y_t(\omega) = 6 \Rightarrow Y_s(\omega) = 6 \text{ pour } s \leq t \text{ , } \omega \in \tilde{\Omega} \text{ .}$$

2) L'évolution des processus est (P_t)-markovienne : pour toute fonction $\tilde{\mathcal{E}}$-borélienne, nulle sur $\{6\}$ on a

$$\tilde{E}[f \circ Y_{s+t} \mid \mathcal{G}_t] = P_s f \circ Y_t \quad \tilde{P}\text{-p.s. sur } \{Y_t \in E_\partial\} \text{ .}$$

Remarquons que si l'on a un tel processus alors forcément la famille de mesures sur $\mathcal{E}_\partial$: $A \to \mu_s(A) = \tilde{P}\{Y_s \in A\}$, $s \geq 0$, est une surloi d'entrée. En effet

$$\mu_{s+t}(\cdot) = \tilde{P}\{Y_{s+t} \in \cdot\} \geq \tilde{P}\{Y_s \in E_\partial \text{ , } Y_{s+t} \in \cdot\}$$

$$= \int_{\{Y_s \in E_\partial\}} \tilde{P}\{Y_{s+t} \in \cdot \mid Y_s \in E_\partial\} \, d\tilde{P}$$

$$= \mu_s P_t(\cdot) \text{ .}$$

Inversement on a le très beau théorème de T. LEVIATAN :

THEOREME.- <u>Soient</u> $(P_t)_{t \geq 0}$ <u>un semi-groupe sous markovien sur</u> E <u>et</u> $(\mu_t)_{t \geq 0}$ <u>une surloi d'entrée pour</u> (P_t) . <u>Alors il existe un processus à création et à annihilation</u> $(X_t, \mathcal{F}_t^\circ, t \geq 0)$ <u>sur un espace de mesure</u> σ<u>-finie</u> $(\Omega, \mathcal{F}^\circ, \tilde{P})$ <u>dont la fonction de transition est</u> $(P_t)_{t \geq 0}$ <u>et tel que</u>

$$\tilde{E}[f \circ X_t] = \mu_t f$$

<u>pour toute fonction borélienne sur</u> $\tilde{E}$, <u>nulle sur</u> $\{6\}$.

DEMONSTRATION.- La démonstration de T. Léviatan consiste en gros à suivre la preuve classique de construction de processus de Markov. Elle introduit un système projectif un peu plus compliqué et qui probabilistiquement, s'interprête très bien.

On désignera par $\mathfrak{J}$ l'ensemble de suites :

$$\mathfrak{J} = \{(t_1, \dots, t_n) : 0 < t_1 < \dots < t_n < \infty \text{ , } n \geq 1 \text{ , } t_i \in \mathbb{R}_+ \text{ , } 1 \leq i \leq n\} \text{ .}$$

<u>Notations</u> : si $\tau = (t_1, \dots, t_n) \in \mathfrak{J}$ <u>on</u> posera $\tau_k = (t_k, \dots, t_n)$. On notera $\tilde{E}^\tau$ (resp. $\tilde{\mathcal{E}}^\tau$) l'espace produit $\tilde{E}_1 \times \dots \times \tilde{E}_n$ (resp. la tribu produit).

On commencera par munir $(\tilde{E}^\tau, \tilde{\mathcal{E}}^\tau)$ d'une certaine mesure P_τ et l'on vérifiera ensuite que le système de mesure $(P_\tau)_{\tau \in \mathfrak{J}}$ est projectif .

Pour notre propos il y a quatre sortes de rectangles privilégiés dans $\tilde{\mathcal{E}}^\tau$:

1) Les rectangles qui " vivent " ou qui " ont vécu " , i.e. de la forme

$$A_1 \times \ldots \times A_n \qquad A_i \in \mathcal{E}_\partial \qquad 1 \leq i \leq n \ .$$

Ils seront crées suivant la loi μ_{t_1} et évoluront ensuite suivant (P_t) , d'où leurs mesures :

(1) $$P_\tau(A_1 \times \ldots \times A_n) = \int_{A_1} \ldots \int_{A_n} \mu_{t_1}(dy_1)\, P_{t_2-t_1}(y_1, dy_2) \ldots P_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1}, dy_n) \ .$$

2) Les rectangles qui ne " vivent " qu'à partir de l'instant t_k i.e. :

$$\{6\}_1 \times \ldots \times \{6\}_{k-1} \times A_k \times \ldots \times A_n \qquad \text{où } A_i \in \mathcal{E}_\partial \quad \text{si } k \leq i \leq n \ .$$

La mesure de ces rectangles, vaudra $P_{\tau_k}\{A_k \times \ldots \times A_n\}$ moins, " ce " qui aura vécu avant t_k :

(2) $$P_\tau\Big\{\{6\}_1 \times \ldots \times \{6\}_{k-1} \times A_k \times \ldots \times A_n\Big\} = P_{\tau_k}\{A_k \times \ldots \times A_n\} - P_{\tau_{k-1}}\{E_\partial \times A_k \times \ldots \times A_n\}$$

3) Les rectangles qui " n'ont pas encore vécu " . Pour des raisons analogues à celles de (2) on leur attribuera la valeur :

(3) $$P_\tau\Big\{\{6\}_1 \times \ldots \times \{6\}_n\Big\} = \lim_{t \uparrow \infty} \mu_t(E_\partial) - \mu_{t_n}\{E_\partial\} \ .$$

(Cette limite existe vu la propriété des surlois) .

4) Enfin il existe des rectangles " aberrants " , où l'on vit avant de naître , et leur mesure sera très simple :

(4) $$P_\tau\{\ldots A_k \times \{6\} \times \ldots\} = 0 \qquad \text{où } A_k \in \mathcal{E}_\partial \text{ pour un } k \ .$$

On vérifie grâce aux propriétés des surlois d'entrée que P_τ est une fonction positive sur ces rectangles . D'autre part cette fonction s'étend facilement à tous les rectangles élémentaires de $\tilde{E}^\tau$, elle est σ - additive .

(5) Par le théorème de prolongement de Carathéodory P_τ s'étendra, alors, en une mesure σ-additive sur la tribu $\tilde{\mathcal{E}}^\tau$.

Il faut alors vérifier que le système $(\tilde{E}^\tau , \tilde{\mathcal{E}}^\tau , P_\tau)_{\tau \in \mathfrak{J}}$ est projectif. Soit donc $\tau = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathfrak{J}$ et $(A_1 \times \ldots \times A_n)$ un rectangle de $\tilde{E}^\tau$. Supposons $A_j = \tilde{E}$ (où j est un entier fixé) et vérifions que le rectangle obtenu en supprimant A_j a même mesure que le rectangle original. Trois cas sont à considérer suivant que A_j est au début, au milieu, ou à la fin ; et dans chacun de ces cas il suffit d'envisager les quatre sortes de rectangles vus plus haut .

<u>cas a</u> : $j = 1$, $A_1 = \tilde{E}$.

Si $A_i \subset E_\partial$, $i \geq 2$, on a en utilisant (2) , et en notant $\tau_2 = (t_2, \ldots, t_n)$:

$$\begin{aligned}
P_\tau\{\tilde{E}\times A_2\times\ldots\times A_n\} &= P_\tau\{E_\partial\times A_2\times\ldots\times A_n\} + P_\tau\Big\{\{\delta\}\times A_2\times\ldots\times A_n\Big\}\\
&= P_\tau\{E_\partial\times A_2\times\ldots\times A_n\} + P_{\tau_2}\{A_2\times\ldots\times A_n\} - P_\tau\{E_\partial\times A_2\times\ldots\times A_n\}\\
&= P_{\tau_2}\{A_2\times\ldots\times A_n\}\ .
\end{aligned}$$

S'il existe un $i \geq 2$ tel que $A_i = \{\partial\}$ on aboutit à la même conclusion en utilisant les équations (3) et (4) .

__cas b__ : $1 < j < n$: c'est soit le cas classique de la construction des processus de Markov , soit un cas tout à fait trivial .

__cas c__ : $j = n$, $A_n = \tilde{E}$.

Alors ou bien $A_{n-1} \subset E_\partial$ et le résultat est évident : soit grâce aux équations (2) , (3) et (4) , soit de la manière classique grâce à la propriété de semi-groupe de (P_t) ,

ou bien $A_{n-1} = \{\delta\}$ et dans ce cas :

$$P_\tau\Big\{A_1\times\ldots\times\{\delta\}\times\tilde{E}\Big\} = P_\tau\Big\{A_1\times\ldots\times\{\delta\}\times E_\partial\Big\} + P_\tau\Big\{A_1\times\ldots\times\{\delta\}\times\{\delta\}\Big\}\ .$$

Deux choses peuvent se produire : ou tous les A_i valent $\{\delta\}$, $1 \leq i \leq n-1$ et par (2) et (3) on aura

$$\begin{aligned}
P_\tau\Big\{A_1\times\ldots\times\{\delta\}\times\tilde{E}\Big\} &= P_{\tau_n}\{E_\partial\} - P_{\tau_{n-1}}\{E_\partial\times E_\partial\} + \lim_{t\uparrow\infty}\mu_t(E_\partial) - \mu_{t_n}(E_\partial)\\
&= \mu_{t_n}(E_\partial) - \mu_{t_{n-1}}(E_\partial) + \lim_{t\uparrow\infty}\mu_t(E_\partial) - \mu_{t_n}(E_\partial)\\
&= P_{(t_1,\ldots,t_{n-1})}\Big\{A_1\times\ldots\times\{\delta\}\Big\}\ ;
\end{aligned}$$

ou bien il y a un $i < n-1$ tel que $A_i \subset E_\partial$ et alors

$$P_\tau\Big\{A_1\times\ldots\times\{\delta\}\times\tilde{E}\Big\} = 0 = P_{(t_1,\ldots,t_{n-1})}\Big\{A_1\times\ldots\times A_i\times\ldots\times\{\delta\}\Big\}\ .$$

Ceci prouve que le système ($\tilde{E}^\tau$, $\tilde{\mathcal{E}}^\tau$, P_τ , $\tau \in \mathfrak{J}$) est projectif . Il reste à montrer que la limite projective des mesures (P_τ) existe et a les bonnes propriétés .

EXISTENCE DE LA LIMITE PROJECTIVE.- Si l'on suppose que

(6) $\lim_{t\uparrow\infty}\mu_t(E_\partial) < \infty$, alors les P_τ sont des mesures finies sur un compact et l'existence de la limite mesure projective sur $\tilde{E}^{\mathbb{R}_+}$, notée $\tilde{P}$, est bien connue .

Lorsque l'hypothèse (6) n'est pas vérifiée , on procède ainsi : soit $c \geq 0$ et $(\mu_t^c)_{t\geq 0}$ la nouvelle surloi d'entrée

$$\mu_t^c = \begin{cases}\mu_c & \text{si } t \leq c\\ \mu_c P_{t-c} & \text{si } t > c\end{cases}\ .$$

(Elle correspond à une création de masse seulement jusqu'à l'instant c) .

Cette surloi vérifie précisément (6) : en effet

$$\lim_{t\uparrow\infty} \mu_t^c(E_\partial) = \lim_{t\uparrow\infty} \mu_c P_{t-c}(E_\partial) \leq \mu_c(E_\partial) < \infty .$$

Notons alors par P_τ^c les mesures introduites en (5) et correspondant à la surloi d'entrée (μ_t^c) . La limite projective $\lim\limits_{\overleftarrow{\tau}} P_\tau^c = \tilde{P}^c$ existe sur $\Omega_1 = \tilde{E}^{\mathbb{R}_+}$. Or

PROPOSITION 1.- Les mesures $\tilde{P}^c$ sont des fonctions croissantes de c .

PREUVE de la proposition : C'est d'abord vrai pour les mesures de la surloi (μ_t^c) : si $t > 0$ et $0 < c_1 < c_2$ on a

$$t \leq c_1 \qquad \mu_t^{c_1} = \mu_t = \mu_t^{c_2}$$

$$c_1 < t \leq c_2 \quad \mu_t^{c_1} = \mu_{c_1} P_{t-c_1} \leq \mu_t = \mu_t^{c_2}$$

$$c_2 < t \qquad \mu_t^{c_1} = \mu_{c_1} P_{t-c_1} = \mu_{c_1} P_{c_2-c_1} P_{t-c_2} \leq \mu_{c_2} P_{t-c_2} = \mu_t^{c_2} .$$

C'est ensuite vrai pour les mesures P_τ^c : cela résulte de ce qui précède immédiatement et des équations de construction (1), (2), (3) et (4) .

Vérifions le par exemple sur l'équation (2) . Avec les notations de (2) et en remplaçant μ par μ^c on a

$$P_\tau^c\{\partial \times \ldots \times \partial \times A_k \times \ldots \times A_n\} = P_{\tau_k}^c\{A_k \times \ldots \times A_n\} - P_{\tau_{k-1}}^c\{E_\partial \times A_k \times \ldots \times A_n\} .$$

Un simple calcul, utilisant (1) , montre que le 2^{è} membre vaut

$$\int_{A_k} \cdots \int_{A_n} \left(\mu_{t_k}^c - \mu_{t_{k-1}}^c P_{t_k - t_{k-1}}\right)(dy_k) P_{t_{k+1}-t_k}(y_k, dy_{k+1}) \ldots P_{t_n - t_{n-1}}(y_{n-1}, dy_n)$$

qui est une fonction croissante de c d'après le lemme :

LEMME.- Pour s et t fixés , $s \leq t$, la mesure positive sur $(E_\partial , \mathcal{E}_\partial)$

$$\nu^c \equiv \mu_t^c - \mu_s^c P_{t-s}$$

est une fonction croissante de c .

PREUVE du lemme.- D'abord remarquons que

$$(7) \qquad \nu^c \equiv \mu_t^c - \mu_s^c P_{t-s} = \begin{cases} 0 & \text{si } c < s \leq t \\ \mu_c P_{t-c} - \mu_s P_{t-s} & \text{si } s \leq c < t \\ \mu_t - \mu_s P_{t-s} & \text{si } s \leq t \leq c \end{cases}$$

Soit alors $c_1 < c_2$ et montrons le lemme d'après les positions de c_1, c_2, s , t sur la droite réelle .

1) Lorsque $c_1 \leq s \leq t$ la mesure ν^{c_1} est nulle donc automatiquement $\nu^{c_1} \leq \nu^{c_2}$.

2) Pour $s \leq t \leq c_1 < c_2$ les deux mesures ν^{c_1} et ν^{c_2} sont égales .

3) Si $s \leq c_1 < c_2 \leq t$ on a $\mu_{c_1} \leq \mu_{c_2}$, puis $\mu_{c_1} P_{t-c_2} \leq \mu_{c_2} P_{t-c_2}$,

d'où $\mu_{c_1} P_{t-c_2} P_{c_2-c_1} \leq \mu_{c_2} P_{t-c_2}$ puisque $P_{c_2-c_1}$ est markovien , donc

(8) $$\mu_{c_1} P_{t-c_1} \leq \mu_{c_2} P_{t-c_2} .$$

Or par l'équation (7) :

$$\nu^{c_1} = \mu_{c_1} P_{t-c_1} - \mu_s P_{t-s} \quad \text{et} \quad \nu^{c_2} = \mu_{c_2} P_{t-c_2} - \mu_s P_{t-s} .$$

Cela prouve, grâce à (8), que $\nu^{c_1} \leq \nu^{c_2}$.

4) Enfin si $s \leq c_1 \leq t \leq c_2$ on a , par l'équation (7)

$$\nu^{c_2} = \mu_t - \mu_s P_{t-s}$$

$$\nu^{c_1} = \mu_c P_{t-c_1} - \mu_s P_{t-s}$$

et la propriété caractéristique des surlois (μ_s) entraîne la conclusion .

De ce qui précède on conclut facilement la preuve de la proposition 1 .

Par conséquent la mesure

$$\tilde{P} = \lim_{c \uparrow \infty} \tilde{P}^c$$

est bien définie sur $\Omega_1 = \tilde{E}^{\mathbb{R}_+}$, et on vérifie facilement que c'est effectivement la limite projective du système $(P_\tau , \tilde{E}^\tau , \tilde{\mathcal{E}}^\tau , \tau \in \mathfrak{J})$.

Enfin l'on pose

$\Omega = \{\omega \in \Omega_1 : \omega(t) = \partial \Rightarrow \omega(s) = \partial \ s \geq t$ et $\omega(r) = 6 \Rightarrow \omega(h) = 6 \ h \leq r \}$

X_t = application coordonnée d'indice t de Ω

$\mathcal{F}^\circ_t = \mathfrak{T}(X_s , s \leq t)$

$\mathcal{F}^\circ = \mathfrak{T}(X_s , s \geq 0)$

et il reste à prouver les propriétés annoncées :

<u>La mesure $\tilde{P}$ restreinte à Ω est σ-finie</u> : En effet, notons [6] la trajectoire $s \mapsto \{6\}$; on a d'une part

$$\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{ X_i \in E_\partial \} \cup [6]$$

et d'autre part

$$\tilde{P}\{X_i \in E_\partial\} = \mu_i(E_\partial) < \infty$$

$$\tilde{P}\{[6]\} = \lim_{c \uparrow \infty} \tilde{P}^c\{[6]\} \leq \lim_{c \uparrow \infty} \lim_{i \uparrow \infty} \tilde{P}^c\{X_i = 6\}$$

$$\leq \lim_{c \uparrow \infty} \lim_{n \uparrow \infty} \left\{ \lim_{t \uparrow \infty} \mu^c_t(E_\partial) - \mu^c_n(E_\partial) \right\} = 0 .$$

Quant à <u>la propriété de Markov</u> elle résulte directement de la construction en (1), de la mesure $\tilde{P}$.

Ceci termine la preuve du théorème de T. Léviatan.

3. RELATIONS AVEC LES TRAVAUX DE HELMS.

Dans [1] Helms s'était donné un semi-groupe (P_t) markovien sur $E_\partial \times \mathcal{E}_\partial$ et une mesure de création $\Phi_x(ds,dy)$ sur $\mathcal{B}_+ \otimes \mathcal{E}_\partial$ (où $\mathcal{B}_+$ est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}_+$) telle que

1) l'application $x \to \Phi_x$ de E dans $\mathbb{R}_+$ est $\mathcal{E}_\partial$-mesurable.

2) si $A \in \mathcal{E}_\partial$ alors $\Phi_x([0,t[\times A) < \infty$ pour tout $t > 0$.

3) $\Phi_x(\{0\} \times A) = 0$.

La deuxième condition est pour éviter une explosion prématurée et $\Phi_x(ds,dy)$ représente la masse créée, à partir de $x \in E$, dans le temps ds au volume dy.

Posons avec Helms :

$$\mu_t^x(A) \equiv P_t(x,A) + \int_0^t \int_{E_\partial} P_{t-s}(y,A)\, \Phi_x(ds,dy) \qquad A \in \mathcal{E}_\partial$$

(la notation μ_t^x n'a pas de relation avec la notation μ_t^c du § précédent).

Alors il est facile de voir que

1) $\{\mu_t^\cdot(\cdot)\}_t$ est un semi-groupe <u>sur</u>-markovien sur $E_\partial \times \mathcal{E}_\partial$.

2) pour x fixé $(\mu_t^x)_{t\geq 0}$ est une <u>surloi</u> d'entrée pour le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$. En effet d'une part les mesures sont finies :

$$\mu_t^x(E_\partial) = P_t(x, E_\partial) + \Phi_x(]0,t[\times E_\partial) < \infty \quad ,$$

et d'autre part, si f est une fonction borélienne bornée sur E_∂, on a

$$\mu_t^x f = P_t f^x + \int_0^t \int_{E_\partial} P_{t-r} f(y)\, \Phi_x(dr,dy)$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu_s^x P_{t-s}(\cdot) &= P_s P_{t-s}(x,\cdot) + \int_0^s \int_{E_\partial} P_{s-r} P_{t-s}(y,\cdot)\ \Phi_x(dr,dy) \\ &\leq P_t(x,\cdot) + \int_0^t \int_{E_\partial} P_{t-r}(y,\cdot)\, \Phi_x(ds,dy) \\ &= \mu_t^x(\cdot)\ . \end{aligned}$$

Le théorème de T. LEVIATAN entraîne alors l'existence d'une famille de processus créateurs et annihilateurs associés à (P_t) et à la création Φ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L.L. HELMS (1967) . Markov processes with creation of mass. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 7, 225-234 .

[2] T. LEVIATAN (1973) . On Markov processes with random starting time. The annals of Probability 1973 vol 1 n° 2 , 223-230 .