

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

GABRIEL MOKOBODZKI

Relèvement borélien compatible avec une classe d'ensembles négligeables. Application à la désintégration des mesures

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 437-442

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__437_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Relèvement borélien compatible avec
une classe d'ensembles négligeables.

Application à la désintégration des mesures

par Gabriel MOKOBODZKI

Notations, Définitions :

Soient (X, \mathfrak{B}) un espace mesurable, $\mathcal{N} \subset \mathfrak{B}$ une partie héréditaire ¹ τ -stable de \mathfrak{B} , $B(X)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques \mathfrak{B} -mesurables bornées.

On dira que \mathcal{N} est une classe d'ensembles négligeables. On dira qu'une propriété est vraie \mathcal{N} -presque-partout sur X si elle a lieu sauf sur un sous-ensemble A de X qui appartient à \mathcal{N} . Dans ce qui suit on supposera que $X \notin \mathcal{N}$.

Définition : Soit $H \subset B(X)$ un sous-espace vectoriel réticulé contenant les fonctions constantes, on dira qu'une application linéaire ρ de H dans $B(X)$ est un relèvement compatible avec \mathcal{N} si les conditions suivantes sont vérifiées

- a) $\rho(f) = f$ \mathcal{N} -presque partout $\forall f \in H$
- b) $(f \geq 0 \text{ } \mathcal{N}\text{-presque partout}) \Rightarrow (\rho(f) \geq 0) \quad \forall f \in H$
- c) $\rho(1) = 1$
- d) $\rho(\sup(f, g)) = \sup(\rho(f), \rho(g)) \quad \forall f, g \in H$

La condition d) implique évidemment la condition b).

En admettant l'hypothèse du continu, nous pouvons énoncer le

Théorème 1 : Soit (X, \mathfrak{B}) un espace mesurable, \mathfrak{B} ayant la puissance du continu, et soit $\mathcal{N} \subset \mathfrak{B}$ une classe d'ensembles négligeables. Il existe un relèvement ρ de $B(X)$ dans $B(X)$ compatible avec \mathcal{N} .

Remarquons au passage que si \mathfrak{B} est engendré par une famille (A_α) ayant la puissance du continu, alors \mathfrak{B} a la puissance du continu.

La démonstration du théorème 1 s'appuiera sur plusieurs lemmes.

Lemme 2 : Soit H un sous-espace réticulé de $B(X)$, $1 \in H$, et ρ un relèvement de H compatible avec \mathcal{N} .

Le relèvement ρ se prolonge par continuité en un relèvement $\bar{\rho}$ de \bar{H} dans $B(X)$ compatible avec \mathcal{N} .

¹ i.e. tout élément de \mathfrak{B} contenu dans un élément de \mathcal{N} appartient à \mathcal{N} .

Démonstration : Soit $f \in \bar{H}$, $f \gg 0$ \mathcal{A}^p -presque partout. et soit $(f_n) \subset H$, $\|f - f_n\| \leq 2^{-n}$; on a $\bar{\rho}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n + 2^{-n})$,

pour tout n , $f_n + 2^{-n} \gg 0$ \mathcal{A}^p -presque partout, par suite $\rho(f_n + 2^{-n}) \gg 0$ et $\bar{\rho}(f) \gg 0$.

Soient maintenant $f, g \in \bar{H}$, $(f_n), (g_n) \subset H$, avec $\|f_n - f\| \leq 2^{-n}$, $\|g_n - g\| \leq 2^{-n}$. De ces inégalités on tire

$$\| \sup f, g - \sup f_n, g_n \| \leq 2^{-n}, \text{ par suite}$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\sup f, g) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\sup f_n, g_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup(\rho(f_n), \rho(g_n)) \\ &= \sup(\bar{\rho}(f), \bar{\rho}(g)). \end{aligned}$$

Lemme 3 : Soient $H \subset B(X)$ un sous-espace réticulé fermé, de type séparable,

$1 \in H$, ρ un relèvement de H compatible avec \mathcal{A}^p .

Pour tout $A \in \mathcal{B}$, il existe un relèvement $\check{\rho}$ compatible avec \mathcal{A}^p de l'espace vectoriel, réticulé \check{H} engendré par H et 1_A , avec $\check{\rho} = \rho$ sur H .

Démonstration : On remarque tout d'abord que \check{H} est égal à l'ensemble des fonctions de la forme

$1_A \cdot f + 1_{\bar{A}} \cdot g$, ou $f, g \in H$; 1_A , $1_{\bar{A}}$ sont les fonctions indicatrices de A et \bar{A} respectivement.

Posons alors $h_1 = \sup \{ \rho(f) ; 0 \leq f \leq 1_A \}$ \mathcal{A}^p -presque partout, $f \in H$
 $h_2 = \inf \{ \rho(f) ; f \gg 1_A \}$ \mathcal{A}^p -presque partout, $f \in H$.

L'espace H étant séparable, h_1 et h_2 sont \mathcal{B} -mesurables, les fonctions h_1 et h_2 sont à valeurs 0 ou 1, et $h_1 \leq 1_A \leq h_2$ \mathcal{A}^p -presque partout, $h_1 \leq h_2$ partout.

Posons $A_1 = \{ h_1 = 1 \}$, $A_2 = \{ h_2 = 1 \}$ puis $A' = (A \cup A_1) \cap A_2$, on a $A + A' \in \mathcal{A}^p$.

L'opérateur $\check{\rho}$ défini sur \check{H} par

$$\check{\rho}(1_A \cdot f + 1_{\bar{A}} \cdot g) = 1_A \cdot \rho(f) + 1_{\bar{A}} \cdot \rho(g) \text{ répond aux conditions cherchées.}$$

Démonstration du théorème 1.

Soit $[0, \mathcal{N}]$ l'ensemble des ordinaux de seconde classe et soit $\alpha \rightarrow A_\alpha$ une surjection de $[0, \mathcal{N}]$ sur \mathcal{B} . Pour tout $\alpha < \mathcal{N}$, désignons par H_α l'espace vectoriel réticulé engendré par 1 et la famille (1_{A_β}) , $\beta < \alpha$. D'après le lemme 3, on peut construire par récurrence transfinie une famille (p_α) , $\alpha < \mathcal{N}$ ou p_α est un relèvement de H_α compatible avec \mathcal{A}^p , la famille (p_α) vérifiant la condition de récurrence. $p_\alpha|_{H_\beta} = p_\beta$ si $\beta < \alpha$. Posons $H = \cup H_\alpha$, $p = \lim p_\alpha$, l'application linéaire p est un relèvement de H , et comme $\bar{H} = B(X)$, le prolongement par continuité \bar{p} de H à $B(X)$ répond aux conditions cherchées.

Remarques:

1) Disons qu'une fonction numérique f est \mathcal{A}^p -presque borélienne s'il existe $g \in B(X)$; $A \in \mathcal{A}^p$ tels que $(f \neq g) \subset A$. On peut alors définir des relèvements boréliens sur l'espace des fonctions \mathcal{A}^p -presque boréliennes.

2) Supposons que l'on ait un relèvement p compatible avec \mathcal{A}^p défini sur un sous-espace séparable réticulé $H \subset B(X)$, tel que $1 \in H$. Il existe alors un relèvement \bar{p} de $B(X)$ compatible avec \mathcal{A}^p tel que $\bar{p}|_H = p$.

Extension :

On suppose maintenant que X est un espace compact, que \mathcal{B} est la tribu borélienne de X . On se donne une classe \mathcal{A} d'ensembles négligeables vérifiant les conditions suivantes.

- a) \mathcal{A} ne contient aucun ouvert non vide.
- b) Pour tout $A \in \mathcal{B}$, il existe un plus petit fermé \tilde{A} de X tel que $A \setminus \tilde{A} \in \mathcal{A}$.

Exemples : 1) Si μ est une mesure ≥ 0 sur X de support X tout entier, on prend pour \mathcal{A} la classe des ensembles μ -négligeables.

2) Pour une famille $(\mu_\alpha) \subset \mathcal{M}^+(X)$ telle que $\overline{\cup S \mu_\alpha} = X$, on prend pour \mathcal{A} la classe des ensembles μ_α -négligeables pour tout α .

3) La famille des ensembles maigres de X vérifie les conditions a et b.

La condition a) assure que l'application identique de $\mathcal{E}(X)$ dans $B(X)$ est un relèvement compatible avec \mathcal{A} .

Soit H un sous-espace réticulé de $B(X)$, $H \supset \mathcal{E}(X)$. On dira qu'un relèvement ρ de H , compatible avec \mathcal{A}^ρ , est un relèvement fort si $\rho(f) = f \quad \forall f \in \mathcal{E}(X)$.

Soit \mathcal{B}_0 une sous-tribu de \mathcal{B} , $B_0(X)$ l'espace des fonctions numériques \mathcal{B}_0 -mesurables-bornées.

Théorème 4 : Si la sous-tribu \mathcal{B}_0 est de puissance inférieure à la puissance du continu il existe un relèvement fort compatible avec \mathcal{A}^ρ de l'espace vectoriel réticulé H_0 engendré par $\mathcal{E}(X)$ et $B_0(X)$.

Démonstration : Comme précédemment on remplace $B_0(X)$ par un sous-espace dense plus maniable $B'_0(X)$:

$$B'_0(X) = \left\{ f = \sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{A_i}, \quad A_i \in \mathcal{B}_0 \right\} .$$

Cet espace est celui des fonctions étagées construit sur \mathcal{B}_0 . L'espace vectoriel réticulé engendré par $B'_0(X)$ et $\mathcal{E}(X)$ est composé de fonctions g de la forme

$$g = \sum_{i=1}^n 1_{A_i} f_i \quad \text{ou } (A_i)_{i \leq n} \text{ est une partition finie de } X, \quad A_i \in \mathcal{B}_0$$

et $f_i \in \mathcal{E}(X)$ pour tout $i \leq n$.

Soit $P = (A_n)$ une suite d'éléments de \mathcal{B}_0 , soit H l'espace vectoriel réticulé engendré par $\mathcal{E}(X)$ et la suite (1_{A_n}) et soit ρ un relèvement fort de H .

Nous aurons besoin des lemmes suivants.

Lemme 4.1 : Pour tout $A \in \mathcal{B}$, la fonction numérique

$$t_A = \inf \left\{ \rho(g) ; g \in H, g \geq 1_A \text{ } \mathcal{A}^\rho\text{-presque partout} \right\} \quad \text{est mesurable,}$$

$$t_A \text{ prend les valeurs } 0 \text{ ou } 1, \text{ et } (A \setminus \{t_A = 1\}) \in \mathcal{A}^\rho.$$

Démonstration du lemme 4.1 : On peut supposer que la suite (A_n) ci-dessus est stable par réunion finie et passage au complémentaire de sorte que tout élément $g \in H$ s'écrit sous la forme :

$$g = \sum_{k=1}^p 1_{A_k} \cdot f_k \quad \text{où } P_\alpha = (A_k)_{k \leq p} \text{ est une partition finie de } X,$$

$P_\alpha \subset P$, et $f_k \in \mathcal{E}(X)$.

Pour une fonction g comme ci-dessus, la relation $g \geq 1_A$ \mathcal{A}^ρ -presque partout équivaut à $f_k \geq 1_{A \cap A_k}$ \mathcal{A}^ρ -presque partout sur $A \cap A_k$, $k=1, 2, \dots, p$. et par conséquent $\{f_k \geq 1\} \supset \overline{A \cap A_k}$.

Si l'on associe à la partition $P_\alpha = (A_k)$ la fonction

$t_\alpha = \sum_{k=1}^p \rho(1_{A_k}) \cdot 1_{\widetilde{A \cap A_k}}$ on voit que l'on aura $t_\alpha \geq 1_A$ \mathcal{A} -presque

partout et comme ρ est un relèvement fort,

$$\rho(g) = \sum_{k=1}^p \rho(1_{A_k}) \cdot f_k \geq t_\alpha \quad \text{partout et finalement } \rho(g) \geq t_\alpha \geq 1_A.$$

On en déduit que $t_A = \inf t_\alpha$ où α parcourt la famille des partitions finies de X qui sont contenues dans $P = (A_n)$, de sorte que t_A est mesurable, $(A \setminus \{t_A = 1\}) \in \mathcal{A}$; la fonction t_A ne prend que les valeurs 0 ou 1 parce que H est réticulé et $1 \in H$.

On remarquera que pour $g \in H$, la relation $g \geq 0$ \mathcal{A} -presque partout sur A implique que $\rho(g) \geq 0$ partout sur $A \cap \{t_A = 1\}$.

Lemme 4.2 : Pour tout $A \in \mathcal{B}$, il existe un relèvement fort compatible avec \mathcal{A} de l'espace vectoriel réticulé engendré par H et 1_A qui prolonge ρ .

Démonstration du lemme 4.2 : Considérons les fonctions

$$t_A = \inf \{ \rho(g) \mid g \in H ; g \geq 1_A \text{ } \mathcal{A}\text{-presque partout} \} \quad \text{et}$$

$$l_A = \sup \{ \rho(g) \mid g \in H ; g \leq 1_A \text{ } \mathcal{A}\text{-presque partout} \}.$$

D'après le lemme précédent on a

$l_A \leq 1_A \leq t_A$ \mathcal{A} -presque partout et l_A, t_A sont mesurables, à valeurs 0 ou 1.

Posons alors $A' = (A \cup \{l_A = 1\}) \cap \{t_A = 1\}$.

L'espace vectoriel réticulé H_1 engendré par H et $1_{A'}$ se compose de fonctions g de la forme

$$g = 1_{A'} \cdot f + 1_{C_{A'}} \cdot h \quad \text{où } f, h \in H$$

L'application ρ_1 définie sur H_1 par

$\rho_1(g) = 1_{A'} \cdot \rho(f) + 1_{C_{A'}} \cdot \rho(h)$ est alors un relèvement fort de H_1 , compatible avec \mathcal{A} , qui prolonge ρ .

Démonstration du théorème 4 : à l'aide des deux lemmes précédents on reprend sans difficulté la démonstration du théorème 1.

Application à la désintégration des mesures.

Soit X un espace compact, μ une mesure ≥ 0 sur X de support X . On suppose que la topologie de X est engendrée par une famille (ω_α) d'ouverts dont la puissance est inférieure à celle du continu. Dans ces conditions, la tribu de Baire \mathfrak{B}_0 de X , engendrée par les ouverts qui sont des K_σ , est aussi de puissance inférieure à celle du continu et l'on sait que tout élément de $L^\infty(X, \mu)$ possède un représentant \mathfrak{B}_0 -mesurable.

Théorème 5 : Il existe un relèvement ρ de $L^\infty(X, \mu)$ dans $B(X)$ vérifiant les conditions

- a) pour tout $f \in L^\infty(X, \mu)$, $\rho(f) \in B(X)$ et $\rho(f) \in f$
- b) pour tout $g \in \mathcal{C}(X)$, $\rho(g) = g$
- c) $\rho(\sup f, g) = \sup(\rho(f), \rho(g))$

Rappelons comment l'on passe des relèvements aux désintégrations :

Soit Y un espace compact, ν une mesure ≥ 0 sur Y , φ une application de Y sur X telle que $\mu = \varphi(\nu)$.

Pour tout $h \in \mathcal{C}(Y)$, la mesure $\varphi(h.\nu)$ peut se mettre sous la forme $\varphi(h.\nu) = p(h).\mu$ où $p(h) \in L^\infty(X, \mu)$.

Soit alors ρ un relèvement fort de $L^\infty(X, \mu)$, compatible avec la classe des ensembles μ -négligeables et posons, pour $h \in \mathcal{C}(Y)$ $K(h) = \rho(p(h))$; pour $x \in X$, l'application $h \mapsto K(h)(x)$ définit une mesure σ_x sur Y , $\sigma_x \in \mathcal{M}^1(Y)$, σ_x portée par $\varphi^{-1}(x)$, et l'on a

$$\nu = \int \sigma_x d\mu(x) .$$