

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

## **Une caractérisation des quasimartingales**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 9 (1975), p. 420-424

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1975\\_\\_9\\_\\_420\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__420_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

UNE CARACTERISATION DES QUASIMARTINGALES

par C. STRICKER

Titchmarsh a montré dans [1] qu'une fonction  $f$  nulle en dehors de  $[a, b]$  est à variation bornée si et seulement si

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = o(h) .$$

Orey s'est alors posé la question suivante dans [2] : que peut-on dire des processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  continus à droite tels que

$$\int_0^\infty E|E[X_{t+h} - X_t | \mathcal{F}_t]| dt = o(h) .$$

Nous allons répondre à cette question dans l'exposé qui suit.

1. Définition d'une quasimartingale.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé muni d'une suite croissante de tribus  $(\mathcal{F}_t)$  continues à droite. Un processus stochastique  $(X_t)_{t \geq 0}$  adapté à la famille  $\mathcal{F}_t$  est une quasimartingale si  $\text{Var } X = \sup \sum_{i=0}^{n-1} E|X_{t_{i+1}} - E[X_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i}]|$  est fini, le sup étant pris sur l'ensemble des suites finies :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty .$$

Nous allons maintenant préciser dans le théorème suivant les analogies entre les quasimartingales et les fonctions à variation bornée.

2. THEOREME. Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus stochastique adapté à la famille  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  et continu à droite dans  $L^1$ . Alors

i) la fonction :  $t \rightarrow E|E[X_{t+h} - X_t | \mathcal{F}_t]|$  est continue à droite ;

ii)  $(X_t)_{t \geq 0}$  est une quasimartingale si et seulement si

$$\int_0^{\infty} E|E[X_{t+h} - X_t | \mathfrak{F}_t]| dt = O(h) ;$$

iii)  $(X_t)_{t \geq 0}$  est une martingale si et seulement si

$$\int_0^{\infty} E|E[X_{t+h} - X_t | \mathfrak{F}_t]| dt = o(h) .$$

De plus, dans les cas ii) et iii)  $\text{Var } X = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{E|E[X_{t+h} - X_t | \mathfrak{F}_t]|}{h} dt .$

Démonstration : i) résulte immédiatement de la continuité à droite dans  $L^1$  de  $(X_t)$  .

ii) si  $X$  est une quasimartingale, montrons que

$$\int_0^{\infty} \frac{E|E[X_{t+h} - X_t | \mathfrak{F}_t]|}{h} dt \leq \text{Var } X .$$

Pour calculer l'intégrale du membre de gauche utilisons une somme de Riemann associée aux intervalles de longueur  $\frac{h}{m}$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m} E|E[X_{\frac{kh}{m}+h} - X_{\frac{kh}{m}} | \mathfrak{F}_{\frac{kh}{m}}]| \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} E|E[X_{\frac{(k+1)h}{m}} - X_{\frac{kh}{m}} | \mathfrak{F}_{\frac{kh}{m}}]| \leq \text{Var } X . \end{aligned}$$

En faisant tendre  $m$  vers l'infini on obtient le sens direct de ii). Réciproquement : soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus continu à droite dans  $L^1$  vérifiant :  $\int_0^{\infty} E|E[X_{t+h} - X_t | \mathfrak{F}_t]| dt = O(h)$  . Etant donnés  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$  et  $Z_k \in \mathfrak{F}_{t_k}$  , définissons  $f$  et  $g$  de la manière suivante :

$$f(t) = E[Z_k \cdot X_t] \text{ si } t \in [t_k, t_{k+2}[ , k \text{ pair}$$

$$g(t) = E[Z_k \cdot X_t] \text{ si } t \in [t_k, t_{k+2}[ , k \text{ impair} .$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit, on a l'inégalité suivante :

$$\liminf_{h \rightarrow 0} [\sum_{k \text{ pair}} \int_{t_k}^{t_{k+1}+2\varepsilon} \frac{|f(t+h)-f(t)|}{h} dt + \sum_{k \text{ impair}} \int_{t_k}^{t_{k+1}+2\varepsilon} \frac{|g(t+h)-g(t)|}{h} dt] \\ \leq \liminf_{h \rightarrow 0} [\int_0^\infty \frac{E|E[X_{t+h} - X_t | \mathcal{F}_t]|}{h} dt + \sum_k \int_{t_k}^{t_k+2\varepsilon} \frac{E|E[X_{t+h} - X_t | \mathcal{F}_t]|}{h} dt] .$$

Cette limite inférieure est finie par hypothèse. Appelons-la  $M_\varepsilon$ . Posons :

$$\bar{\Phi}_p(x) = p \int_x^{x+\frac{1}{p}} f(t) dt = p \int_0^{\frac{1}{p}} f(x+t) dt$$

$$\bar{\Psi}_p(x) = p \int_x^{x+\frac{1}{p}} g(t) dt = p \int_0^{\frac{1}{p}} g(x+t) dt .$$

Soit  $(x_k, x'_k)$  un couple de points de l'intervalle  $[t_k, t_{k+1} + \varepsilon[$ . On a les inégalités suivantes :

$$\sum_{k \text{ pair}} |\bar{\Phi}_p(x_k) - \bar{\Phi}_p(x'_k)| + \sum_{k \text{ impair}} |\bar{\Psi}_p(x_k) - \bar{\Psi}_p(x'_k)| \\ = \sum_{k \text{ pair}} \left| \int_{x_k}^{x'_k} \bar{\Phi}'_p(x) dx \right| + \sum_{k \text{ impair}} \left| \int_{x_k}^{x'_k} \bar{\Psi}'_p(x) dx \right| \\ \leq \sum_{k \text{ pair}} \int_{x_k}^{x'_k} |\bar{\Phi}'_p(x)| dx + \sum_{k \text{ impair}} \int_{x_k}^{x'_k} |\bar{\Psi}'_p(x)| dx \\ \leq \liminf_{h \rightarrow 0} [\sum_{k \text{ pair}} \int_{t_k}^{t_{k+1}+\varepsilon} \frac{|\bar{\Phi}_p(x+h) - \bar{\Phi}_p(x)|}{h} dx + \sum_{k \text{ impair}} \int_{t_k}^{t_{k+1}+\varepsilon} \frac{|\bar{\Psi}_p(x+h) - \bar{\Psi}_p(x)|}{h} dx] \\ \leq M_\varepsilon \text{ dès que } \frac{1}{p} < \varepsilon .$$

Mais  $\lim_{p \rightarrow \infty} \bar{\Phi}_p(x) = f(x)$  et  $\lim_{p \rightarrow \infty} \bar{\Psi}_p(x) = g(x)$  presque partout pour la mesure de Lebesgue.

Grâce à la continuité à droite dans  $L^1$  de  $(X_t)$ , il en résulte que

$$\sum_k |E[Z_k(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})]| \leq M_\varepsilon .$$

D'où, en prenant :

$$Z_k = 1 \text{ si } E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} | \mathfrak{F}_{t_k}] \geq 0$$

$$Z_k = -1 \text{ si } E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} | \mathfrak{F}_{t_k}] < 0$$

nous obtenons :

$$(1) \quad \sum_k E |E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} | \mathfrak{F}_{t_k}]| \leq M_\varepsilon.$$

Par conséquent,  $(X_t)$  est une quasimartingale. Nous allons améliorer ce résultat et démontrer iii) grâce aux deux lemmes suivants :

**LEMME.** Si  $(X_t)$  est une quasimartingale continue à droite dans  $L^1$  alors

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_a^{a+\varepsilon}(X) = 0$  où  $V_a^{a+\varepsilon}(X) = \sup_k \sum E |E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} | \mathfrak{F}_{t_k}]|$  le sup étant pris sur l'ensemble des subdivisions  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = a + \varepsilon$ .

Démonstration : En vertu de la continuité à droite dans  $L^1$ , pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que  $E|X_t - X_a| < \frac{\eta}{2}$  si  $0 < t-a < \alpha$ .

Il existe aussi une subdivision :  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = a+1$  telle que  $t_1 - a < \alpha$  et  $\sum_{k=0}^{n-1} E |E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} | \mathfrak{F}_{t_k}]| \geq V_a^{a+1}(X) - \frac{\eta}{2}$ . Comme  $E|X_{t_1} - X_a| < \frac{\eta}{2}$ , on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} E |E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} | \mathfrak{F}_{t_k}]| \geq V_a^{a+1}(X) - \eta.$$

Puisque  $V_a^{a+1} = V_a^{t_1} + V_{t_1}^{a+1}$ , nous obtenons pour tout  $t < t_1$  l'inégalité  $V_a^t < \eta$ . Donc  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_a^{a+\varepsilon} X = 0$ .

**LEMME 2.** Si  $(X_t)$  est une quasimartingale continue à droite dans  $L^1$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \sup_{h>0} \int_a^{a+\varepsilon} \frac{E |E[X_{t+h} - X_t | \mathfrak{F}_t]|}{h} dt \right) = 0.$$

Pour démontrer ce lemme, il suffit d'utiliser le lemme 1 et la majoration démontrée au début de ii) :

$$\int_a^{a+\varepsilon} \frac{E|E[X_{t+h} - X_t | \mathfrak{F}_t]|}{h} dt \leq V_a^{a+\varepsilon}(X).$$

Le lemme 2 entraîne que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sup_{h > 0} \sum_{k=1}^n \int_{t_k}^{t_{k+2\varepsilon}} \frac{E|E[X_{t+h} - X_t | \mathfrak{F}_t]|}{h}) = 0.$$

Par conséquent, l'inégalité (1) :  $\sum_{k=1}^n E|E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} | \mathfrak{F}_{t_k}]| \leq M_\varepsilon$  peut être remplacée par

$$\sum_{k=1}^n E|E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} | \mathfrak{F}_{t_k}]| \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{E|E[X_{t+h} - X_t | \mathfrak{F}_t]|}{h} dt.$$

Il en résulte que :

$$\text{Var } X \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{E|E[X_{t+h} - X_t | \mathfrak{F}_t]|}{h} dt$$

et d'après la majoration démontrée au début de ii) :

$$\text{Var } X \geq \limsup_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{E|E[X_{t+h} - X_t | \mathfrak{F}_t]|}{h} dt.$$

D'où :

$$\text{Var } X = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{E|E[X_{t+h} - X_t | \mathfrak{F}_t]|}{h} dt.$$

#### REFERENCES

- |                       |   |
|-----------------------|---|
| [1] TITCHMARSH, E. E. | The Theory of functions.<br>London, Oxford, University Press,<br>1939 (2d ed.).   |
| [2] OREY, S.          | F - processes . Proc. 5th Berkeley<br>Symposium on Math. Stat. and Prob.<br>University of California, 1965-66,<br>vol. II , part. 1 , 301 - 313 . |