Christophe Stricker

Mesure de Föllmer en théorie des quasimartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 408-419
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__408_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1973/74

MESURE DE FÖLLMER EN THEORIE DES QUASIMARTINGALES

par C. STRICKER

Grâce à un théorème de PARTHASARATHY [1], FÖLLMER [2] a démontré qu'à toute quasimartingale $X = (X_t)_{t \geq 0}$ définie sur un "bon" espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ muni d'une famille de sous-tribus $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ correspond une mesure signée P^X sur les ensembles prévisibles de $\Omega \times [0, +\infty]$ telle que $P^X[A \times]t, +\infty]] = E[X_t . A]$ pour tout $t \geq 0$ et tout $A \in \mathfrak{F}_t$.

L'objet de cet exposé est de donner une démonstration de ce résultat fondée sur la convergence vague de mesures et sur le critère de Prokhorov.

I. EXISTENCE DE MODIFICATIONS CONTINUES A DROITE DES QUASIMARTINGALES.

Considérons un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. On ne suppose pas que la tribu $\mathfrak{F}$ est complète.

1.1. DEFINITION. Soit $X = (X_t)_{t \in [0, +\infty]}$ un processus stochastique adapté à une famille de tribus $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$, croissante et continue à droite, qui engendre $\mathfrak{F}$, tel que X_t soit intégrable pour tout t . On dit que X est une quasimartingale si :

$\text{Var } X = \sup \sum_{i=0}^{n-1} E|X_{t_i} - E[X_{t_{i+1}} | \mathfrak{F}_{t_i}]|$ est fini, le sup étant pris sur l'ensemble des suites finies :

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = +\infty .$$

Si nous posons $X_\infty = 0$, nous retrouvons la définition de FÖLLMER [2] .

Dans la suite de l'exposé (X_t) désignera toujours une quasimartingale.

OREY [3] a démontré que ces processus avaient des propriétés analogues à celles des surmartingales.

1.2. LEMME. - <u>Soit</u> I <u>un sous-ensemble dénombrable de</u> $\mathbb{R}^+$. <u>Alors pour tout</u> $\lambda \geq 0$, <u>on a</u> :

$$\lambda P[\sup_{i\in I} X_i \geq \lambda] \leq \operatorname{Var} X + E|X_\infty|$$

$$\lambda P[\inf_{i\in I} X_i \leq -\lambda] \leq \operatorname{Var} X + E|X_\infty|$$

1.3. LEMME. - <u>Soit</u> I <u>un sous-ensemble dénombrable de</u> $\mathbb{R}^+$. <u>Si</u> $a < b$ <u>alors l'espérance du nombre de montées de</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>sur l'intervalle</u> $[a,b]$ <u>est majorée par</u> $\dfrac{\operatorname{Var} X + E|X_\infty|}{b-a}$.

1.4. LEMME. - <u>Soit</u> $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>une suite décroissante de nombres réels positifs</u>. <u>Alors la famille</u> $(X_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ <u>est uniformément intégrable</u>.

Ces trois lemmes ont permis à FÖLLMER de démontrer le théorème suivant qui contrairement aux régularisations habituelles ne suppose pas la complétion des tribus $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}_t$.

1.5. THEOREME. - <u>Il existe une version continue à droite de la quasimartingale</u> X <u>si et seulement si pour tout</u> t_0 , $\lim_{t\downarrow t_0} E|X_t - X_{t_0}| = 0$.

<u>Démonstration.</u> * Le lemme 1.4 montre que l'existence d'une version continue à droite entraîne la continuité à droite dans L^1 .

* Démontrons la réciproque. Soit $H_{t,a,b}$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que la fonction $X_r(\omega)(0 \leq r \leq t$, r rationnel) soit non bornée ou traverse une infinité de fois l'intervalle $[a,b]$. $H_{t,a,b}$ appartient à $\mathfrak{F}_t$. Posons alors : $X_t^0(\omega) = \lim_{r \downarrow t} X_r(\omega)$ (r rationnel) pour $\omega \notin H_t$ et ∞ pour $\omega \in H_t$ où

$H_t = \bigcap_{s>t} \bigcup_{\substack{a<b \\ a,b \text{ rationnels}}} H_{s,a,b}$ est un élément de $\mathfrak{F}_t$. Comme H_t croît avec t , le processus X_t^0 a des trajectoires continues à droite dans $[0,+\infty[$, des limites à gauche avant d'atteindre ∞ et est adapté à $\mathfrak{F}_t$. De plus, les lemmes 1.2 et 1.3 montrent que $P(H_t) = 0$. Puisque X_t est continu à droite dans L^1, $P[X_t^0 \neq X_t] = 0$ pour tout t .

1.6. <u>Remarques</u>. a) Comme nous n'avons pas supposé que les tribus $\mathfrak{F}_t$ sont complètes, nous ne pouvons pas obtenir une modification continue à droite et ayant des limites à gauche en tout point t . En effet prenons : $\Omega = [0,1]$, $\mathfrak{F}$ tribu borélienne sur Ω , P mesure de Lebesgue, $B_i = [0,\frac{1}{2^i}]$.

Posons : $\mathfrak{F}_t$ tribu engendrée par $B_1,\ldots,B_n$ si $\frac{n-1}{n} \leq t < \frac{n}{n+1}$

$\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}$ si $t \geq 1$.

$X_t(\omega) = 0$ si $\omega \notin B_n$ et $\frac{n-1}{n} \leq t < \frac{n}{n+1}$

$X_t(\omega) = (-1)^n$ si $\omega \in B_n$ et $\frac{n-1}{n} \leq t < \frac{n}{n+1}$

Ce processus est continu à droite ; de plus sa variation est finie. Cependant si X_t^0 est une modification de $X_t, X_t^0 = X_t$ sur B_n si $\frac{n-1}{n} \leq t < \frac{n}{n+1}$. On ne peut donc pas éliminer la trajectoire $t \to X_t(0)$ qui n'a pas de limite à gauche en $t = 1$.

b) L'énoncé de FÖLLMER [2] comporte une légère erreur. Contrairement aux surmartingales, il ne suffit pas de supposer que $t \to E(X_t)$ est continue à droite. En effet prenons $\Omega = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, P la mesure de Lebesgue et $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ = tribu borélienne sur Ω. Posons :

$$X_t = 0 \quad \text{si} \quad t \leq 1$$

$$\left.\begin{aligned} X_t(\omega) &= 1 \quad \text{si} \quad \omega \geq 0 \\ X_t(\omega) &= -1 \quad \text{si} \quad \omega < 0 \end{aligned}\right\} \text{pour} \quad t > 1$$

On vérifie facilement que X_t est une quasimartingale et que $E(X_t) = 0$ pour $t \geq 0$. Mais il n'existe pas de modification continue à droite.

II. CONSTRUCTION DE LA MESURE DE FÖLLMER POUR DES QUASIMARTINGALES ELEMENTAIRES.

2.1. DEFINITION. - La tribu prévisible $\mathcal{P}$ est la tribu sur $\overline{\mathbb{R}}^+ \times \Omega$ engendrée par les rectangles $]u,v] \times A$ où $A \in \mathcal{F}_u$.

Remarquons que les tribus $\mathcal{F}_u$ ne sont pas complètes contrairement aux définitions classiques. Dans ce paragraphe $\bar{\Omega}$ désigne $\overline{\mathbb{R}}^+ \times \Omega$.

2.2. Quasimartingales élémentaires :

Soient $0 < a \leq \infty$ et Y une variable aléatoire intégrable. Posons :

$$X_t = 0 \quad \text{pour} \quad t < a$$

$$X_t = E[Y | \mathcal{F}_t] \quad \text{pour} \quad a \leq t \leq \infty .$$

Ce processus est évidemment une quasimartingale.

2.3. Mesure associée à X :

Soit $\mu(]u,v] \times A) = E[(X_u - X_v).A]$ pour $A \in \mathcal{F}_u$ et $0 \le u < v \le \infty$

$\mu(\{0\} \times A) = 0$ pour $A \in \mathcal{F}_0$.

On obtient ainsi une mesure sur l'algèbre $\mathcal{G}$ engendrée par les rectangles $]u,v] \times A$ $(A \in \mathcal{F}_u)$, qui admet pour extension à $\mathcal{P}$ la mesure, que nous noterons encore μ , définie par :

si (Z_t) est un processus prévisible positif , $\mu(Z) = -E(Z_a.Y)$.

2.4. LEMME. - Soit $|\mu|(\overline{\Omega}) = \sup \sum_i |\mu(\overline{C_i})|$, le sup étant pris sur l'ensemble des partitions finies de Ω dans $\mathcal{G}$. Alors

$$|\mu|(\overline{\Omega}) = E|E[Y|\mathcal{F}_{a-}]| .$$

Démonstration. - posons $\overline{C_i} \cap \{a\} \times \Omega = \{a\} \times A_i$. Nécessairement $A_i \in \mathcal{F}_{a^-}$. D'où

$$\sum_i |\mu(\overline{C_i})| = \sum_i |E[E[Y|\mathcal{F}_{a-}]. A_i]|$$

$$\le E|E[Y|\mathcal{F}_{a-}]| .$$

Réciproquement : soit $u < a$. Considérons la partition

$$\overline{C_1} =]u,a] \times \{E[Y|\mathcal{F}_u] > 0\}$$

$$\overline{C_2} =]u,a] \times \{E[Y|\mathcal{F}_u] \le 0\}$$

$$\overline{C_3} = \text{ complémentaire de } \overline{C_1} \cup \overline{C_2}$$

$$|\mu(\overline{C_1})| + |\mu(\overline{C_2})| + |\mu(\overline{C_3})| = E|E[Y|\mathcal{F}_u]|$$

En faisant tendre u vers a , on obtient :

$$|\mu|(\overline{\Omega}) \ge E|E[Y|\mathcal{F}_{a-}]|$$

Nous avons ainsi établi la proposition suivante :

2.5. PROPOSITION. - Soit (X_t) une quasimartingale élémentaire. Il existe une mesure unique μ^X sur la tribu prévisible $\mathcal{P}$ telle que

$$E[(X_t - X_\infty).A] = \mu^X(]t,+\infty] \times A) \quad \text{pour} \quad t \geq 0 \quad \text{et} \quad A \in \mathcal{F}_t \ .$$

De plus $|\mu^X|(\bar{\Omega}) = E\,|\,E[Y|\mathcal{F}_{a-}]|$

On étend aisément cette proposition à une somme finie de quasimartingales élémentaires : si $X^1,\dots,X^n$ sont des quasimartingales élémentaires et $\mu^{X_1},\dots,\mu^{X_n}$ les mesures associées, on pose $\mu^{X^1+\dots+X^n} = \mu^{X^1} + \mu^{X^2} + \dots + \mu^{X^n}$ et on vérifie que si $X^1+\dots+X^n = X'^1+\dots+X'^P$, alors $\mu^{X^1+\dots+X^n} = \mu^{X'^1+\dots+X'^P}$

Nous aimerions maintenant étendre cette proposition à des quasimartingales quelconques en approchant celles-ci par des sommes finies de quasimartingales élémentaires. Afin de pouvoir utiliser le critère de convergence étroite de Prokhorov, nous allons définir une "bonne" topologie sur $\bar{\Omega}$.

III. LA TRIBU PREVISIBLE $\mathcal{P}$ EST UNE "BONNE" TRIBU.

3.1. Notations. - nous allons maintenant préciser l'ensemble Ω et les tribus $\mathcal{F}_t$. Soit (E,d) un espace métrique compact. Ω sera l'ensemble des applications continues à droite de $\mathbb{R}^+$ dans E . Y_t désignera la coordonnée d'indice t sur Ω la tribu engendrée par les Y_t est noté $\mathcal{F}$, celle qui est engendrée par les $Y_t (t \leq s)$ est notée $\mathcal{F}_s^0$ et $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^0$.

3.2. Définition d'une topologie sur $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$. Application à $\mathcal{P}$.

Considérons le système suivant de voisinages sur $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$.

$$V(0,\omega) = [0,u[\times \Omega \qquad u \in \overline{\mathbb{R}^+}$$

$$V(t,\omega) =]u,v] \times \{\omega' \in \Omega,\ d(\omega(t_1),\omega'(t_1)) < \varepsilon_1,\dots,d(\omega(t_n),\omega'(t_n)) < t_n\}$$

où $0 \leq u < t < v$ et $t_1,\dots,t_n$ une suite de rationnels positifs strictement inférieurs à u .

$$V(\infty,\omega) =]u,+\infty] \times \{\omega' \in \Omega, d(\omega'(t_1)) < \varepsilon_1,\dots,d(\omega(t_n),\omega'(t_n) < \varepsilon_n\}$$

les $t_1,\dots t_n$ étant choisis comme avant.

LEMME 1. - <u>Ce système de voisinages définit une topologie à base dénombrable non séparée sur</u> $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$. <u>De plus</u> $\mathcal{P}$ <u>est la tribu borélienne de</u> $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$ <u>muni de cette topologie</u>.

<u>Considérons la relation d'équivalence sur</u> $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$ <u>définie par les atomes de</u> $\mathcal{P}$:

$(r,\omega) \sim (r',\omega')$ <u>si et seulement si</u> $r = r'$ et $\omega_{|[0,r[} = \omega'_{|[0,r[}$ <u>(restriction de</u> ω à $[0,r[$) .

LEMME 2. - $\dfrac{\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega}{\sim}$ <u>muni de la topologie quotient est un espace métrique à base dénombrable</u>.

<u>Démonstration</u>. - Remarquons d'abord que $\dfrac{\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega}{\sim}$ muni de la topologie quotient est un espace séparé et à base dénombrable. Si on munit $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$ de la topologie produit,(la topologie de Ω étant celle induite par $E^{\mathbb{Q}+}$), la projection canonique $p : \overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega \to \dfrac{\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega}{\sim}$ est continue. En particulier si on remplace dans la construction précédente Ω par $E^{\mathbb{Q}+}$, il en résulte que $\dfrac{\overline{\mathbb{R}^+} \times E^{\mathbb{Q}+}}{\sim}$ est un compact métrisable et en plongeant $\dfrac{\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega}{\sim}$ dans $\dfrac{\overline{\mathbb{R}^+} \times E^{\mathbb{Q}+}}{\sim}$, nous en concluons que $\dfrac{\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega}{\sim}$ est métrisable.

Nous désignerons $\dfrac{\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega}{\sim}$ par $\overline{\Omega}$.

3.3. Régularité des mesures sur $(\bar{\Omega},\mathcal{P})$

LEMME 1. - Ω plongé dans le compact métrisable $E^{\mathbb{Q}+}$ est universellement mesurable et la tribu $\mathcal{F}$ est la tribu borélienne dans ce plongement. Toute mesure bornée sur $(\Omega,\mathcal{F})$ est alors intérieurement régulière .

Ce lemme est démontré dans MEYER [4]

LEMME 2. - Soit Γ un compact de Ω muni de la topologie précédente. Alors :

i) L'ensemble $\tilde{\Gamma}_r = \{\omega \in \Omega \ , \ \exists\ \omega' \in \Gamma \ , \omega_{|[0,r[} = \omega'_{|[0,r[}\}$ appartient à $\mathcal{F}_{r-}$

ii) $\bar{\Gamma}_r = \{r\} \times \tilde{\Gamma}_r$ est un compact de $\bar{\Omega}$.

Démonstration. -

i) $\mathcal{F}_{r-}$ est la tribu borélienne sur Ω si Ω est muni de la topologie dont les ouverts sont des réunions d'ensemble du type $\{Y_{t_1} \in \underset{\sim}{0}_1,\ldots,Y_{t_n} \in 0_n\}$ où $t_1<t_2<\ldots<t_n<r$ et $0_1,\ldots,0_n$ ouverts de E . Comme Γ_r est fermé dans cette topologie, il appartient à $\mathcal{F}_{r-}$.

ii) est évident.

IV. THEOREME DE FÖLLMER.

4.1. Approximation dyadique de X :

Soit X une quasimartingale continue à droite. Posons :

$$\text{Si } \ 0 \leq k < n\,2^n : \quad Z_t^{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ t < k/2^n \\ E\left[X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}} \mid \mathcal{F}_t\right] & \text{si } \ t \geq \frac{k}{2^n} \end{cases}$$

Si $k = n\,2^n$ $\quad Z_t^{n,k} = \begin{cases} 0 \text{ si } t < n \\ E[X_\infty - X_n | \mathcal{F}_t] \text{ si } t \geq n . \end{cases}$

Soient $X_t^n = \sum_{k=0}^{n\,2^n} Z_t^{n,k}$ et μ_n la mesure associée à X_t^n .

En vertu du lemme 2.4. nous avons :

$$|\mu_n|(\bar{\Omega}) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} E|E[X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}} | \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}-}] + E|E[X_\infty - X_n | \mathcal{F}_{n-}]|$$

4.2. LEMME. - <u>la suite</u> $|\mu_n|(\bar{\Omega})$ <u>croît vers</u> Var X .

<u>Démonstration</u>. - Soient $a < b < c$. On a :

$$E|E[X_a - X_c | \mathcal{F}_{a-}]| \leq E|E[X_a - X_b | \mathcal{F}_{a-}]| + E|E[X_b - X_c | \mathcal{F}_{a-}]|$$

Or d'après l'inégalité de convexité des espérances conditionnelles :

$$E|E[X_b - X_c | \mathcal{F}_{a-}] \leq E|E[X_b - X_c | \mathcal{F}_{b-}]|$$

d'où :

$$E|E[X_a - X_b | \mathcal{F}_{a-}]| \leq E|E[X_a - X_b | \mathcal{F}_{a-}]| + E|E[X_b - X_c | \mathcal{F}_{b-}]|$$

Ceci montre la croissance de $|\mu_n|(\bar{\Omega})$.

D'autre part, soit $0 = t_o < t_1 < \ldots < t_p = +\infty$ une subdivision de $[0,\infty]$.

Prenons n assez grand pour que $\frac{1}{2^n} < \mathrm{Min}(t_{i+1} - t_i)$.

Appelons r_k^n le premier rationnel dyadique après t_k . Alors :

$$\sum_{k=0}^{p-1} E|E[X_{r_{k+1}^n} - X_{r_k^n} | \mathcal{F}_{t_k}]| \leq |\mu_n|(\bar{\Omega}) \leq \lim_{n\to\infty} |\mu_n|(\bar{\Omega})$$

Comme X_t est continu à droite,

$$\sum_{k=0}^{p-1} E|E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k}|\mathcal{F}_{t_k}]| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{p-1} E|E[X_{r^n_{k+1}} - X_{r^n_k}|\mathcal{F}_{t_k}]| \le \lim_{n\to\infty} |\mu_n|(\bar{\Omega})$$

D'autre part, il est clair que $|\mu_n|(\bar{\Omega}) \le \text{Var } X$. Donc $\text{Var } X = \lim_{n\to\infty} |\mu_n|(\bar{\Omega})$

4.3. <u>Convergence de la suite</u> μ_n <u>vers une mesure</u> μ .

Fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_o tel que $|\mu_{n_o}|(\bar{\Omega}) \ge \text{Var } X - \varepsilon$.

D'après le lemme 1 de 3.3. les mesures sur Ω sont intérieurement régulières. Donc il existe un compact Γ^k de Ω tel que :

$$E|E[X_{\frac{k}{2^{n_o}}} - X_{\frac{k+1}{2^{n_o}}} |\mathcal{F}_{\frac{k}{2^{n_o}}-}]| \le E|E[X_{\frac{k}{2^{n_o}}} - X_{\frac{k+1}{2^{n_o}}}|\mathcal{F}_{\frac{k}{2^{n_o}}-}].\Gamma^k| + \frac{\varepsilon}{n_o 2^{n_o}+1}$$

D'après le lemme 2 de 3.3. il en résulte que si $\bar{\Gamma} = \bigcup_{0\le k\le n_o 2^{n_o}} \bar{\Gamma}^k_{k.2^{-n_o}}$ on a $|\mu_{n_o}|(\bar{\Gamma}) \ge \text{Var } X - 2\varepsilon$.

Le théorème de Prokhorov entraîne que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est étroitement relativement compacte. On peut donc en extraire une sous-suite étroitement convergente vers une mesure μ (en réalité le théorème suivant nous montrera que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute entière converge vers μ) .

4.5. <u>Théorème de FÖLLMER</u> : il existe une mesure μ sur la tribu prévisible $\mathcal{P}$ telle que :

$$(4.6) \quad E[(X_t - X_\infty).A] = \mu(]t,+\infty] \times A) \qquad \forall\, t \ge 0 \quad \forall\, A \in \mathcal{F}_t .$$

<u>Démonstration</u>. - On a $\mu_n(]t,+\infty] \times A) = E[(X^n_t - X^n_\infty).A]$

$$= E[(X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_\infty).A]$$

si $\frac{k}{2^n} \leq t < \frac{k+1}{2^n}$ et $A \in \mathcal{F}_t$. $(k < n 2^n)$.

En vertu de la continuité à droite dans L^1 de $(X_t)_{t \geq 0}$

$\lim\limits_{n \to \infty} E[(X_t^n - X_\infty^n).A] = E[(X_t - X_\infty).A]$.

Or $\mu_n(]t,+\infty] \times A)$ tend vers $\mu(]t,+\infty] \times A)$ si la frontière du borélien n'est pas chargée par $|\mu|$. Prenons :

$A_{\omega_o}^{\epsilon,r} = \{\omega' \in \Omega\,,\ d(\omega_o(r),\omega'(r)) \leq \epsilon\}$ où $r \in \mathbb{Q}^+$ et $r < t$.

La frontière de $]t,+\infty] \times A_{\omega_o}^{\epsilon,r}$ est :

$$\{t\} \times A_{\omega_o}^{\epsilon,r} \cup\ ]t,+\infty] \times \{\omega' \in \Omega : d(\omega_o(r),\omega'(r)) = \epsilon\}$$

Il existe alors un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ partout dense tel que $|\mu|$ ne charge pas la frontière de $]t,+\infty] \times A_{\omega_o}^{\epsilon,r}$ pour $(t,\epsilon) \in D$. Dans ce cas, on a :

$$E[(X_t - X_\infty).A_{\omega_o}^{\epsilon,r}] = \mu(]t,+\infty] \times A_{\omega_o}^{\epsilon,r})$$

Pour obtenir 4.6 il suffit d'utiliser la continuité à droite dans L^1 et de remarquer que les deux membres sont des mesures sur $\mathcal{F}_t$.

4.7. COROLLAIRE. - <u>Pour tout temps d'arrêt</u> T <u>et tout</u> $A \in \mathcal{F}_T$ <u>on a</u> :

$$\mu(]T,+\infty] \times A) = E[(X_T - X_\infty).A]$$

Le corollaire est démontré dans FÖLLMER .

En utilisant la décomposition de Jordan d'une mesure signée, FÖLLMER [2] a démontré que toute quasimartingale continue à droite est la différence de deux surmartingales positives, ce qui permet de ramener l'étude des quasimartingales à des mesures positives.

4.8. THEOREME. - <u>Une surmartingale positive est de la classe</u> D <u>si et seulement si la mesure associée ne charge pas les ensembles évanescents.</u>

Le théorème, dû lui aussi à FÖLLMER [2], montre qu'on ne peut pas étendre le théorème 4.5 à des tribus quelconques. Il explique en particulier pourquoi nous n'avons pas complété les tribus $\mathcal{F}_t$ lors des régularisation de I .

L'article de FÖLLMER [2] comporte un grand nombre d'applications de 4.5 .

<u>REFERENCES</u>

[1] PARTHASARATHY, K.R. Probability measures on metric spaces, New York - London : Academie Press (1967)

[2] FÖLLMER, H. On the representation of semi-martingales. The Annals of Probability, Vol 1, n° 4 580 - 589 (1973)

[3] OREY, S. F - processes. Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statis. Prob. 2 Univ. California Press 301 - 313 (1965 - 66)

[4] MEYER, P.A. Le retournement du temps d'après CHUNG et WALSH. Séminaire de Prob. de Strasbourg V, Lecture Notes in Math. vol. 191, Springer. (1971)