CLAUDE DELLACHERIE
PAUL-ANDRÉ MEYER

Ensembles analytiques et temps d'arrêt

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 373-389
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__373_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1973/74

ENSEMBLES ANALYTIQUES ET TEMPS D'ARRÊT

par C.Dellacherie et P.A.Meyer

Nous reprenons dans cet exposé, à l'intention des lecteurs probabilistes (qui doivent bien, après tout, former la majorité des lecteurs d'un séminaire de probabilités)l'essentiel de la démonstration du second théorème de séparation des ensembles analytiques. Celle-ci en effet, dans la rédaction de C.A. ROGERS, et dans l'exposé de DELLACHERIE figurant dans ce volume, se présente sous une forme peu suggestive pour les probabilistes, alors que l'on peut tout interpréter comme une analyse de la structure des temps d'arrêt sur l'espace mesurable $\Omega=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Non seulement alors le langage devient plus parlant, mais les détails mêmes de la démonstration prennent un sens nouveau. Soulignons tout de même qu'il ne s'agit que d'un exercice de traduction : si l'admirable démonstration de ROGERS se laisse ainsi exprimer dans un langage où elle semble couler toute seule, c'est parce qu'elle est extrêmement naturelle et profonde.

La forme que nous donnons ici à la démonstration de C.A.ROGERS suggère des relations avec la logique (fonctions récursives, hiérarchie de KLEENE) , évidentes par exemple à la lecture de H.ROGERS [4],[1] mais que notre ignorance nous interdit de développer. Il existe aussi des liens avec la théorie des jeux - qui elle même n'est pas sans rapport avec la logique ; en effet, BLACKWELL [1] a donné avant ROGERS une démonstration du second théorème de séparation (sous la forme relative à un couple d'ensembles, non à une suite infinie), assez proche au fond de celle de ROGERS, mais faisant appel à un résultat difficile de théorie des jeux lors de l'étape crucial correspondant à notre lemme 6 ci-dessous.

1. L'ESPACE DES TEMPS D'ARRÊT

Nous désignons par Ω à la fois le premier ordinal non dénombrable, et l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ - il n'y a évidemment aucun risque de confusion. Contrairement aux conventions habituelles, $\mathbb{N}=\{1,2...\}$ ne contient pas 0. Les applications coordonnées sur Ω sont notées X_n, la tribu borélienne de Ω s'appelle $\underline{\underline{F}}$, la tribu engendrée par $X_1,...X_n$ s'appelle $\underline{\underline{F}}_n$. On note θ_k l'opérateur de translation par k ($X_n(\theta_k\omega)=X_{n+k}(\omega)$).

On note Ω_n l'ensemble $\mathbb{N}^{\{1,..,n\}}$ des suites finies de longueur n, y compris $\Omega_0=\{\emptyset\}$. On pose $\mathfrak{S}=\bigcup_n \Omega_n$. La projection naturelle de Ω

1 Encore plus frappant : J.R.SHOENFIELD [5], p. 179-185.

sur Ω_n est notée $\omega \mapsto \omega|n$, et de même pour $m \geq n$ la projection de Ω_m sur Ω_n est notée $s \mapsto s|n$. Si $s \in \Omega_n$, $t \in \Omega_m$ ou $t \in \Omega$, la relation $s=t|n$ s'écrit $s \dashv t$ (" t commence par s").

Rappelons la définition traditionnelle des temps d'arrêt en probabilités :

DEFINITION 1. <u>Une fonction T sur Ω, à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}=\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, est un temps d'arrêt si, pour tout n, l'ensemble $\{T \leq n\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_n$</u> .

<u>On note $\underline{\underline{T}}$ l'ensemble des temps d'arrêt</u>.

Avec la définition que nous prenons, 0 n'est pas un temps d'arrêt. La tribu $\underline{\underline{F}}_n$ est engendrée ici par une partition dénombrable : une fonction est $\underline{\underline{F}}_n$-mesurable si et seulement si elle est constante sur les atomes de $\underline{\underline{F}}_n$, ce qui donne la caractérisation suivante : T est un temps d'arrêt si et seulement si

(1) $\quad T(\omega) \leq n$ et $\omega|n=\omega'|n \Rightarrow T(\omega') \leq n$ (ou : $\Leftrightarrow T(\omega') \leq n$)

qui équivaut à

(2) $\quad T(\omega)>n$ et $\omega|n=\omega'|n \Rightarrow T(\omega')>n$

et aussi à

(3) $\quad T(\omega) \leq n$ et $\omega|n=\omega'|n \Rightarrow T(\omega')=T(\omega)$.

Il résulte aussitôt de (3) que la fonction $\omega \mapsto T(\omega)\wedge(n+1)$ ne dépend que de $\omega|n$, et plus généralement que $T\wedge k$ ne dépend que de $\omega|n$ pour $k \leq n+1$. <u>Nous désignerons par $T^{[n]}$ l'unique fonction sur Ω_n telle que $T(\omega)\wedge(n+1)= T^{[n]}(\omega|n)$ pour tout ω</u> .

LEMME 1. <u>L'ensemble $\underline{\underline{T}}$ des temps d'arrêt est compact métrisable pour la topologie de la convergence simple sur Ω ($\overline{\mathbb{N}}$ étant muni de sa topologie compacte usuelle) et l'application $(T,\omega) \mapsto T(\omega)$ est continue sur $\underline{\underline{T}}\times\Omega$. $\underline{\underline{T}}$ est 0-dimensionnel</u> ("éparpillé" au sens de BOURBAKI).

DEMONSTRATION. $\underline{\underline{T}}$ est fermé dans $\overline{\mathbb{N}}^{\Omega}$ d'après (1), donc compact. D'autre part, pour $s \in \Omega_n$, la fonction $T \mapsto T^{[n]}(s)$ est continue sur $\underline{\underline{T}}$, et ces fonctions en infinité dénombrable séparent $\underline{\underline{T}}$ puisque $T(\omega)=\lim_n T^{[n]}(\omega|n)$. Donc $\underline{\underline{T}}$ est métrisable.

On vérifie aussitôt que les ensembles $\{(T,\omega) : T(\omega) \leq n\}$, $\{(T,\omega) : T(\omega)>n\}$ sont fermés, d'où la seconde assertion.

Enfin, le fait que les fonctions continues sur $\underline{\underline{T}}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$ séparent les points entraîne que les ouverts fermés forment une base de la topologie de $\underline{\underline{T}}$.

Soit E un ensemble muni d'un pavage $\underline{\underline{E}}$ stable pour ($\cup f, \cap f$), contenant $\emptyset$ et E tout entier, et soit $\underline{\underline{M}}$ la classe monotone engendrée par $\underline{\underline{E}}$. Dans les cas usuels, E sera métrique séparable, et $\underline{\underline{E}}$ sera constitué par les fermés de E. Ce cas particulier suggère la terminologie suivante :

DEFINITION 2. <u>Une application</u> $x \mapsto T_x$ <u>de</u> E <u>dans</u> $\underline{\underline{T}}$ <u>est dite</u> semi-continue supérieurement ($\underline{\underline{E}}$-s.c.s., <u>ou</u> s.c.s.) <u>si pour tout</u> $\omega\in\Omega$ <u>et tout</u> n <u>l'ensemble</u> $\{ x : T_x(\omega)\geq n\}$ <u>appartient à</u> $\underline{\underline{E}}$. <u>Elle est dite</u> $\underline{\underline{E}}$-mesurable <u>si ces ensembles appartiennant à</u> $\underline{\underline{M}}$.

Une fonction $\underline{\underline{E}}$-s.c.s. est $\underline{\underline{E}}$-mesurable ; si $\underline{\underline{G}}$ est la tribu engendrée par $\underline{\underline{E}}$, une fonction $\underline{\underline{E}}$-mesurable est mesurable au sens usuel de $(E,\underline{\underline{G}})$ dans $(\underline{\underline{T}},\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{T}}))$. En effet, la tribu borélienne sur $\underline{\underline{T}}$ est engendrée par les fonctions $T \mapsto T(\omega)$ $(\omega\in\Omega)$, donc il suffit de vérifier que les fonctions $x \mapsto T_x(\omega)$ sont $\underline{\underline{G}}$-mesurables, ce qui est évident.

Lorsque E est un espace métrisable séparable <u>éparpillé</u> au sens de Bourbaki, $\underline{\underline{E}}$ étant le pavage des <u>fermés ouverts</u> de E, qui est une algèbre de Boole et une base de la topologie de E, toute fonction $\underline{\underline{E}}$-s.s.s. $x \mapsto T_x$ de E dans $\underline{\underline{T}}$ est même <u>continue</u> . En effet, les ensembles $\{ x : T_x(\omega)\geq n\}$, donc par différence $\{ x : T_x(\omega)=n\}$, sont ouverts et fermés dans E, et $x \mapsto T_x(\omega)$ est continue à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$ pour tout $\omega\in\Omega$. La topologie sur $\underline{\underline{T}}$ étant celle de la convergence simple, $x \mapsto T_x$ est continue.

Chaque fois que l'on rencontrera dans la suite les mots <u>s.c.s.</u> ou <u>mesurable</u> sans mention d'un pavage, il sera sous-entendu qu'ils sont relatifs au pavage des fermés d'un espace métrisable séparable.

Nous donnons un exemple fondamental d'application s.c.s. :

DEFINITION 3. <u>Soit</u> (A_s) <u>un schéma de Souslin sur</u> $\underline{\underline{E}}$, <u>c'est à dire une application de</u> $\mathfrak{S}$ <u>dans</u> $\underline{\underline{E}}$ <u>telle que</u> $A_\emptyset=E$, <u>et</u> $A_t\subset A_s$ <u>pour</u> $s \dashv t$. <u>On appelle</u> application associée à (A_s) <u>l'application de</u> E <u>dans</u> $\underline{\underline{T}}$ <u>qui fait correspondre à</u> $x\in E$ <u>le temps d'arrêt</u>

$$(4) \qquad A_x(\omega) = \inf \{ n : x\notin A_{\omega|n} \}$$

L'ensemble $\{x : A_x(\omega)\geq n\}$ est $A_{\omega|n-1}$ pour tout $n\geq 1$, donc l'application $x \mapsto A_x$ est $\underline{\underline{E}}$-s.c.s.. Inversement, toute application $\underline{\underline{E}}$-s.c.s. de E dans $\underline{\underline{T}}$ détermine un schéma de Souslin par la formule $A_s=\{x:A_x^{[n]}(s)>n\}$ pour $s\in\Omega_n$. On définit ainsi un couple de bijections naturelles, réciproques l'une de l'autre, entre les schémas de Souslin sur $\underline{\underline{E}}$ et les applications $\underline{\underline{E}}$-s.c.s. de E dans $\underline{\underline{T}}$. Si E est éparpillé, $\underline{\underline{E}}$ le pavage des fermés ouverts de E, on associe par ce procédé à tout schéma de Souslin sur $\underline{\underline{E}}$ une application <u>continue</u> de E dans $\underline{\underline{T}}$. (Tout schéma de

En particulier, on peut écrire explicitement le schéma de Souslin (I_s), dit <u>universel</u>, associé à l'application identique de $\underline{\underline{T}}$: si $s\in\mathfrak{S}$ est de longueur n, on a

$$I_s = \{ T : T^{[n]}(s) > n \}$$

A quoi correspond maintenant le <u>noyau</u> A du schéma de Souslin (A_s), c'est à dire l'ensemble

$$A = \bigcup_{\omega} \bigcap_{s \dashv \omega} A_s \quad ?$$

On a $x \in A$ si et seulement s'il existe un $\omega \in \Omega$ tel que $A_x(\omega)=+\infty$. Autrement dit, A <u>est l'image réciproque</u>, par $x \longmapsto A_x$, <u>de l'ensemble</u> $\mathcal{P}$ <u>des temps d'arrêt non finis</u>. Cet ensemble jouera un rôle fondamental dans la suite. Noter qu'il est analytique dans $\underline{\underline{T}}$, en tant que noyau du schéma de Souslin (I_s), ou que projection sur $\underline{\underline{T}}$ du fermé $\{(T,\omega):T(\omega)=+\infty\}$.

2. THÉORIE DE L'INDICE

DEFINITION 4. <u>Soit</u> T <u>un temps d'arrêt</u>. <u>On désigne par</u> T^* <u>l'application de</u> Ω <u>dans</u> $\mathbb{N}$ <u>définie par</u>

(5) $\quad T^*(\omega)>n \iff \exists\omega',\ \omega'|n=\omega|n$ <u>et</u> $T(\omega')>n+1 \quad (n \geq 1)$

(Si ω n'appartient à aucun des ensembles $\{T^*>n\}$, $n\geq 1$, on pose $T^*(\omega)=1$).

LEMME 2. a) T^* <u>est un temps d'arrêt</u>, <u>et</u> $T^* \leq T \leq T^*+1$ (T^* <u>est le plus petit temps d'arrêt</u> $\geq T-1$). <u>On a</u> $(T+1)^*=T$.

b) <u>La relation</u> $S \leq T$ <u>entraîne</u> $S^* \leq T^*$.

c) <u>Pour tout couple</u> (S,T) <u>de temps d'arrêt</u>, <u>notons</u> $S \perp T$ <u>le temps d'arrêt</u> U <u>défini par</u>

(6) $\quad U(\omega)=S(\omega)+T(\theta_{S(\omega)}\omega)$ <u>si</u> $S(\omega)<+\infty$, $U(\omega)=+\infty$ <u>si</u> $S(\omega)=+\infty$

<u>Alors</u> $(S \perp T)^* = S \perp T^*$, <u>sauf si</u> $T\equiv 1$ ($(S+1)^* = S$, <u>non</u> $S+1$).

d) <u>Avec les notations de la définition</u> 2, <u>si</u> $x \longmapsto T_x$ <u>est</u> $\underline{\underline{R}}$-<u>mesurable</u>, <u>il en est de même de</u> $x \longmapsto T^*_x$. <u>En particulier</u>, <u>l'application</u> $T \longmapsto T^*$ <u>de</u> $\underline{\underline{T}}$ <u>dans</u> $\underline{\underline{T}}$ <u>est borélienne</u>.

DEMONSTRATION. Nous commençons par les calculs immédiats : $1^*=1$, puis $n^*=n-1$ si $n>1$. D'autre part

$$(T+1)^*(\omega)>n \iff \exists\omega',\ \omega'|n=\omega|n,\ T(\omega')+1>n+1 \iff T(\omega)>n$$

donc $(T+1)^*=T$. La relation $T^*(\omega)>n$ entraîne dans (5) $T(\omega')>n+1$, donc $T(\omega')>n$, donc $T(\omega)>n$, de sorte que $T^* \leq T$. La relation $T(\omega)>n+1$ entraîne dans (5) $T^*(\omega)>n$, donc $T \leq T^*+1$. Si $S \leq T$, la relation $S^*(\omega)>n$ entraîne $T^*(\omega)>n$, donc $S^* \leq T^*$.

Montrons que T^* est un temps d'arrêt : supposons $T^*(\omega)>n$, $\omega|n=\mu|n$, et comparons à (5) : nous avons aussi $\omega'|n=\mu|n$, donc $T^*(\mu)>n$. On conclut d'après (2). Noter que cela n'exige pas que T soit un temps d'arrêt !

Soit S l'enveloppe inférieure[1] de tous les temps d'arrêt $\geq T-1$: <u>c'est le plus petit</u> temps d'arrêt $\geq T-1$. Comme T^* est un temps d'arrêt

1 Il est évident sur (2) que l'enveloppe supérieure ou inférieure d'une famille quelconque de temps d'arrêt est un temps d'arrêt.

$\geqq T-1$, on a $S\leqq T^*$. Comme $T-1\leqq S$, on a $T\leqq S+1$, donc $T^*\leqq (S+1)^*=S$, et l'égalité.

Démontrons c). Prouvons d'abord que $U=S\perp T$ est un temps d'arrêt, c'est à dire que

$U(\omega)>n$, $\omega|n=\omega'|n \Rightarrow U(\omega')>n$

Il n'y a rien à vérifier si $S(\omega)>n$. Si $S(\omega)=k\leqq n$, on a d'abord $S(\omega')=k$, $\theta_k\omega|n-k=\theta_k\omega'|n-k$. $T(\theta_k\omega)>n-k$ entraîne $T(\theta_k\omega')>n-k$, d'où $U(\omega')>n$.

Ensuite, supposons $T\not\equiv 1$. Alors la relation (5) est vraie aussi pour $n=0$. Montrons que $U^*(\omega)>n \iff S(\omega)+T^*(\theta_{S(\omega)}(\omega))>n$. Tout d'abord, il n'y a rien à vérifier si $S(\omega)>n$, car $U\geqq S+1$, donc $U^*\geqq S$. Supposons donc $S(\omega)=k\leqq n$. La première condition équivaut à

$\exists\omega'$: $\omega'|n=\omega|n$, $U(\omega')=S(\omega')+T(\theta_{S(\omega')}\omega')>n+1$

Mais comme $\omega'|n=\omega|n$, $S(\omega')=k$, et $U(\omega')=k+T(\theta_k\omega')$, et la condition s'écrit

$\exists\mu$: $\mu|n-k = \theta_k\omega|n-k$, $T(\mu)>n+1-k$

ou encore $T^*(\theta_k\omega)>n-k$, le résultat cherché (noter que la valeur $k=n$ est permise, il nous a fallu avoir (5) aussi pour $n=0$).

Démontrons enfin d). Il s'agit de démontrer que pour tout $n\geqq 1$ et tout $s\in\Omega_n$, l'ensemble $\{ x : T_x^{*[n]}(s)>n\}$ appartient à $\underline{\underline{M}}$. Or c'est la réunion, sur les $t\in\Omega_{n+1}$ tels que $s\dashv t$, des ensembles $\{ x : T_x^{[n+1]}(t) >n+1 \}$, et $\underline{\underline{M}}$ est stable par réunion dénombrable. La dernière phrase s'obtient en prenant pour $x\mapsto T_x$ l'application identique de $\underline{\underline{T}}$.

Nous définissons maintenant une notion auxiliaire, dont la motivation apparaîtra plus tard :

DEFINITION 5. <u>Un</u> pliage <u>est une famille</u> $f=(f_n)_{n\geqq 0}$ <u>d'applications</u> f_n : $\Omega_n\to\Omega_n$ <u>telles que pour tout</u> n

(7) $\quad\forall s\in\Omega_{n+1}$, $f_n(s|n)=f_{n+1}(s)|n$

On peut aussi considérer f comme une application unique de Ω dans Ω telle que $\omega|n=\omega'|n \Rightarrow f(\omega)|n = f(\omega')|n$ pour tout n . Nous appellerons C l'ensemble des pliages (ceux-ci s'appelant aussi Codages) ; C est fermé dans l'espace polonais $\prod_n \Omega_n^{\Omega_n}$, et l'application $(\omega,f)\mapsto f(\omega)$ de $\Omega\times C$ dans Ω est continue.

LEMME 3. <u>Si</u> f <u>est un pliage</u>, <u>et</u> T <u>est un temps d'arrêt</u>, $T\circ f$ <u>est un temps d'arrêt</u>, <u>et on a</u> $(T\circ f)^*\leqq T^*\circ f$.

DEMONSTRATION. Supposons que $T\circ f(\omega)>n$, $\omega'|n=\omega|n$; alors $f(\omega)|n = f(\omega')|n$, donc $T\circ f(\omega')>n$, et $T\circ f$ est bien un temps d'arrêt. Posons $S=T\circ f$; $S^*(\omega)>n$ entraîne l'existence d'un ω' tel que $S(\omega')>n+1$, $\omega'|n=\omega|n$, donc $T(f(\omega'))>n+1$, $f(\omega)|n=f(\omega')|n$, et finalement $T^*(f(\omega))>n$, et il en résulte que $S^*\leqq T^*\circ f$.

On arrive maintenant à la définition cruciale. L'indice que nous définissons ici est lié à celui de l'autre exposé par la relation $j(T)+1=i(T)$.

DEFINITION 6. Pour tout temps d'arrêt T, on définit par récurrence transfinie les temps d'arrêt T^α suivants

(8) $\quad T^0=T\ ;\ T^{\alpha+1}=(T^\alpha)^*\ ;$ si α est de seconde espèce, $T^\alpha=\inf_{\beta<\alpha} T^\beta$

On appelle alors indice de T, et on note $j(T)$, le plus petit ordinal α tel que $T^\alpha\equiv 1$, ou le premier ordinal non dénombrable Ω s'il n'en existe pas.

LEMME 4. a) L'indice de T est dénombrable si et seulement si T est fini.

b) Si S et T sont deux temps d'arrêt finis, et $U=S\perp T$ (lemme 2, c)), on a $j(U)=j(S)+1+j(T)$ [1] .

c) Avec les notations de la définition 2, supposons que $x\longmapsto T_x$ soit mesurable. Alors $\{x : j(T_x)>\alpha\}$ appartient à $\underline{\underline{M}}$ pour tout ordinal dénombrable α. En particulier, $\{T : j(T)>\alpha\}$ est borélien dans $\underline{\underline{T}}$.[2]

DEMONSTRATION. a) Si $T(\omega)=+\infty$, on a $T^*(\omega)=+\infty$, donc $T^\alpha(\omega)=+\infty$ pour tout α dénombrable, et $j(T)=\Omega$. Si T est partout fini, remarquons que les fonctions $T^{\alpha[n]}$ sur Ω_n forment une famille décroissante de fonctions à valeurs entières sur un ensemble dénombrable . Il existe donc un ordinal α_n tel que $(T^{\alpha_n})^{[n]}=(T^{\alpha_n+1})^{[n]}$ sur Ω_n . Posons $\alpha=\sup_n \alpha_n$, $R=T^\alpha$; nous avons $R^*=R$, et R est partout fini. Montrons que cela entraîne $R\equiv 1$, ce qui établira a).

Supposons en effet qu'il existe un ω tel que $R(\omega)>1$. Comme $R=R^*$

$R^*(\omega)>1 \Rightarrow \exists\omega_1\ ,\ \omega_1|1=\omega|1,\ R(\omega_1)>2$

$R^*(\omega_1)>1 \Rightarrow \exists\omega_2\ ,\ \omega_2|2=\omega_1|2,\ R(\omega_2)>3$

$R^*(\omega_2)>1 \Rightarrow \ldots$

Si μ est l'élément de Ω tel que $\mu|n=\omega_n|n$ pour tout n, on a $R(\mu)>n$ pour tout n, et R n'est pas fini.

L'assertion b) résulte aussitôt du lemme 2, c).

Passons à c). On vérifie aussitôt, par récurrence transfinie, que $x\longmapsto T_x^\alpha$ est $\underline{\underline{E}}$-mesurable. L'ensemble $\{ x : j(T_x)>\alpha\}$ s'écrit aussi $\{ x : T_x^\alpha\not\equiv 1\}$, c'est aussi la réunion sur tous les $s\in\Omega_1$ des ensembles $\{ x : T_x^{\alpha[1]}(s)>1\}$, qui appartiennent à $\underline{\underline{M}}$ d'après la définition des applications $\underline{\underline{E}}$-mesurables.

---

1 En posant $\iota(T)=j(T)$ si $j(T)$ est infini, $j(T)+1$ si $j(T)$ est fini, on a de plus jolies formules : $\iota(n)=n$ au lieu de $n-1$, et ci-dessus $\iota(U)=\iota(S)+\iota(T)$.

2 Les ensembles disjoints $\{T:j(T)=\alpha\}=(\bigcap_{\beta<\alpha}\{T:j(T)>\beta\})\setminus\{T:j(T)>\alpha\}$ sont boréliens, et leur réunion est ρ^c. On les appelle les constituants de ρ^c.

LEMME 5. <u>Pour tout ordinal dénombrable</u> α , <u>il existe un temps d'arrêt d'indice</u> α .

DEMONSTRATION . On a $j(1)=0$. Si T est d'indice α , $T+1$ est d'indice $\alpha+1$. Soit α un ordinal de seconde espèce, rangeons en une suite β_n tous les ordinaux $<\alpha$, et supposons que pour tout n il existe un temps d'arrêt T_n d'indice β_n ; définissons

$$T(\omega) = T_n(\Theta_1\omega) \text{ si } \omega|1=n$$

Alors T est un temps d'arrêt, et $T^*(\omega)=T_n^*(\Theta_1\omega)$ si $\omega|1=n$. Il en résulte aussitôt que l'indice de T est α.

Bien que l'énoncé suivant s'appelle "lemme", c'est la clef de tout l'exposé.

LEMME 6. <u>Soient</u> S <u>et</u> T <u>deux temps d'arrêt</u>. <u>Alors</u> $j(S)\leq j(T)$ <u>si et seulement s'il existe un pliage</u> f <u>tel que</u> $S\leqq T\circ f$.

DEMONSTRATION. La relation $S\leqq T\circ f$ entraîne $j(S)\leq j(T)$ d'après le lemme 2, b) et le lemme 3. C'est la réciproque qui est intéressante.
Si $j(T)=\Omega$, il existe ω_0 avec $T(\omega_0)=+\infty$ (lemme 4, a)), et le pliage cherché est tout simplement donné par $f(\omega)=\omega_0$. Nous pouvons donc supposer $j(T)<\Omega$, ou encore S et T partout finis. Avant d'aborder la démonstration proprement dite , nous étudions une notion auxiliaire.

Pour tout $s\in\Omega_n$, tout $\omega\in\Omega$, notons $s.\omega$ l'élément de Ω défini par

$$X_k(s\cdot\omega) = X_k(s) \text{ si } k\leqq n \quad , \quad X_k(s\cdot\omega)=X_{k-n}(\omega) \text{ si } k>n$$

(on rappelle que les X_k sont les coordonnées sur Ω). Posons

$$T_s(\omega) = 1\vee(T(s\cdot\omega)-n)$$

Je dis que T_s est un temps d'arrêt. D'abord on a $s\cdot\omega|n = s$, de sorte que si $T^{[n]}(s)\leqq n$ on a $T(s.\omega)\leqq n$, et $T_s\equiv 1$. Supposons donc $T^{[n]}(s)>n$. Alors $T(s.\omega)>n$ pour tout ω, et $T_s(\omega)$ vaut simplement $T(s.\omega)-n$. La relation $T_s(\omega)>k$, $\omega'|k=\omega|k$ entraîne alors $T(s.\omega)>n+k$, $s.\omega'|n+k= s.\omega|n+k$, donc $T(s.\omega')=T_s(\omega')+n>n+k$, et T_s est bien un temps d'arrêt.

Montrons ensuite que $(T_s)^*=(T^*)_s$: pour tout $p\geqq 1$

$$\begin{aligned}(T_s)^*(\omega)>p &\iff \exists\omega',\ \omega'|p=\omega|p \text{ et } T_s(\omega')>p+1\\ &\iff \exists\omega',\ \omega'|p=\omega|p \text{ et } T(s.\omega')>n+p+1\\ &\iff \exists w',\ w'|n+p=s.\omega|n+p \text{ et } T(w')>n+p+1\end{aligned}$$

(on passe de w' à ω' par la formule $w'=s.\omega'$)

$$\begin{aligned}&\iff T^*(s.\omega)>n+p\\ &\iff (T^*)_s(\omega)>p\end{aligned}$$

Désormais, nous écrirons simplement T_s^* . La notation T_s^α se comprend alors bien pour tout ordinal α.

Soient $s\in\Omega_n$, $s'\in\Omega_{n+1}$ tel que $s'|n=s$. Le résultat technique qui nous est nécessaire consiste à montrer que si $T_{s'}\neq 1$

(9) $\qquad j(T_s) \geqq j(T_{s'})+1$

A cet effet, posons $a=X_{n+1}(s')$ et, pour tout $\omega\in\Omega$, soit $\overline{\omega}=a.\omega$ (de sorte que $s'.\omega = s.\overline{\omega}$). Je dis d'abord que

(9a) $T_{s'}\neq 1 \Rightarrow T_{s'}>1$ identiquement $\Rightarrow T_s(\overline{\omega})>1$ pour tout ω

En effet, soit un w tel que $T_{s'}(w)>1$. Alors $T(s'.w)>n+2$, et $T(w')>n+1$ pour tout w' tel que $w'|n+1 = s'.w|n+1=s'$. En particulier, on a $s.\overline{\omega}|n+1 = s'$, donc $T(s.\overline{\omega})>n+1$ et $T_s(\overline{\omega})>1$.

Ensuite, si $T^*_{s'}\neq 1$ (hypothèse plus forte que $T_{s'}\neq 1$) on a

(9b) $\qquad T^*_s(\overline{\omega}) = 1+T^*_{s'}(\omega)$

En effet, on a pour tout $p>0$

$$T^*_s(\overline{\omega})>p \iff \exists\overline{w},\ \overline{w}|p=\overline{\omega}|p \text{ et } T^*_s(\overline{w})>p+1$$

comme $p>0$, $\overline{w}$ commence par a, et on peut poser $\overline{w}=a.w$, de sorte que $\overline{w}|p=\overline{\omega}|p \iff w|p-1=\omega|p-1$. D'autre part $T^*_s(\overline{w})>p+1 \iff T(s.\overline{w})>n+p+1$ $\iff T(s'.w)>n+1+p \iff T_s(w)>p-1$. Ainsi

$$T^*_s(\overline{\omega})>p \iff \exists w : w|p-1=\omega|p-1 \text{ et } T_{s'}(w)>p \iff T^*_{s'}(\omega)>p-1$$

pour $p>1$ cela résulte de (5), et pour $p=1$ du fait que l'équivalence (5) vaut aussi pour $n=0$ du fait que $T^*_{s'}\neq 1$.

De (9b) nous déduisons que, pour tout $\alpha<j(T_{s'})$, et tout ω

(9c) $\qquad T^\alpha_s(\overline{\omega})= 1+T^\alpha_{s'}(\omega)$

Si $j(T_{s'})=\beta$ est de première espèce, posons $R=T^{\beta-1}$. Nous avons $R_{s'}\neq 1$, donc il existe ω tel que $R_{s'}(\omega)\geqq 2$, et la formule ci-dessus entraîne que $R_s(\overline{\omega})\geqq 3$, donc $R^*_s(\overline{\omega})\geqq 2$, $T^\beta_s\neq 1$, et $j(T_s)\geqq\beta+1$. Si β est de seconde espèce, la formule (9c) vaut pour tous les $\alpha<\beta$, et le passage à la limite montre que $T^\beta_s(\overline{\omega})\geqq 2$ pour tout ω, de sorte qu'ici aussi $j(T_s)\geqq\beta+1$.

Nous passons à la démonstration proprement dite. Nous construisons par récurrence des applications $f_n : \Omega_n \to \Omega_n$ telles que $f_{n+1}(t)|n = f_n(t|n)$ pour $t \in \Omega_{n+1}$, et que

(10) $\qquad j(S_s) \leqq j(T_{f_n(s)})$ pour $s \in \Omega_n$

La première étape de la récurrence est immédiate : $f_0(\emptyset)=\emptyset$ satisfait bien à $j(S_\emptyset)=j(S)\leqq j(T)=j(T_\emptyset)$. Supposons la construction faite au rang n , soient $s \in \Omega_n$, $t=f_n(s)$, $s' \in \Omega_{n+1}$ tel que $s'|n=s$; le problème consiste à trouver $t' \in \Omega_{n+1}$ tel que $t'|n=t$, $j(S_{s'})\leqq j(T_{t'})$, car on pourra alors poser $f_{n+1}(s')=t'$. Si $j(S_{s'})=0$, n'importe quel t' tel que $t'|n=t$ convient. Si $j(S_{s'})=\alpha>0$, $S_{s'}\neq 1$, et (9) nous dit que $j(S_s)\geqq\alpha+1$. D'après l'hypothèse de récurrence, $j(T_t)\geqq\alpha+1$, donc il existe ω tel que $T_t^{\alpha+1}(\omega)>1$, on prend $t'=(t\cdot\omega)|n+1$, et on a $j(T_{t'})\geqq\alpha$.

Voici la principale conséquence du lemme 6. En particulier, elle entraîne à nouveau le fait (assez trivial, nous l'avons vu) que l'ensemble P des temps d'arrêt non finis est analytique : prendre S_0 non fini, alors $P= \{ T : j(S_0) \leqq j(T) \}$.

LEMME 7. <u>L'ensemble des</u> $(S,T)\in \underline{\underline{T}}\times\underline{\underline{T}}$ <u>tels que</u> $j(S)\leqq j(T)$ <u>est analytique</u>.
DEMONSTRATION. L'ensemble A des $(U,V)\in\underline{\underline{T}}\times\underline{\underline{T}}$ tels que $U\leqq V$ est fermé. L'ensemble B des triples $(S,T,f)\in\underline{\underline{T}}\times\underline{\underline{T}}\times C$ tels que $S\leqq T\circ f$ est l'image réciproque de A par $(S,T,f)\mapsto(S,T\circ f)$, il est fermé. Enfin, l'ensemble cherché est la projection de B sur $\underline{\underline{T}}\times\underline{\underline{T}}$.

3. THÉORÈMES DE SÉPARATION

Nous commençons par redonner, de manière rapide, la démonstration de ROGERS qui figure dans l'exposé précédent, afin d'illustrer la manière dont le langage des temps d'arrêt simplifie les raisonnements.

THEOREME 1. <u>Soit</u> (A_n) <u>une suite d'ensembles analytiques dans</u> E <u>métrisable séparable</u>. <u>Il existe alors des ensembles analytiques</u> A'_n <u>tels que</u>

(11) $\qquad A_n\subset A'_n \ , \ \bigcap_n A_n=\bigcap_n A'_n \ , \quad A'_n\cup A'_m = E$ <u>si</u> $n\neq m$.

DEMONSTRATION. Représentons chaque A_n comme noyau d'un schéma de Souslin (A^n_s), et soit $(A^n_\cdot)$ l'application borélienne correspondante de E dans $\underline{\underline{T}}$ (4). Pour tout n, soit L_n un temps d'arrêt d'indice $\gamma+n$, où γ est un ordinal de seconde espèce. Posons $B^n_x = A^n_x \perp L_n$, $j_n(x)=j(B^n_x)$.

Il est facile de voir que l'application $T\mapsto T\perp L_n$ de $\underline{\underline{T}}$ dans $\underline{\underline{T}}$ est borélienne, de sorte que $x\mapsto B^n_x$ est borélienne, de même que $x\mapsto(B^n_x,B^m_x)$ pour tout couple (n,m). D'après le lemme 7, l'ensemble

$$\{ x : j_n(x)\leqq j_m(x) \}$$

est analytique dans E. D'autre part,

si $x\in A_n$, A^n_x est non fini, B^n_x est non fini, $j_n(x)=\Omega$

si $x\notin A_n$, $j_n(x)$ est un ordinal dénombrable de la forme $\rho+n$, où ρ est de seconde espèce. On a donc $j_n(x)\neq j_m(x)$ pour tout $m\neq n$, que $j_m(x)$ soit égal à Ω ou dénombrable (car alors $j_m(x)=\rho'+m$, ρ' de 2e espèce).

Les ensembles analytiques cherchés sont alors donnés par

$$A'_n = \{ x : \exists m\neq n\ ,\ j_m(x)\leqq j_n(x) \}$$

Pour les détails, voir l'exposé précédent.

ENSEMBLES COANALYTIQUES NON ANALYTIQUES

Il existe des exemples simples d'ensembles coanalytiques non boréliens, construits par la méthode des " ensembles universels" - mais ils sont relativement artificiels. Il existe aussi des exemples naturels : l'ensemble des compacts dénombrables de [0,1], l'ensemble des fonctions continues partout dérivables sur [0,1] - mais il n'est pas facile de prouver qu'ils ne sont pas boréliens. Le fait que tout ensemble analytique dans E métrisable séparable soit image réciproque de $\mathcal{P}$ par une application s.c.s. de E dans $\underline{\underline{T}}$ va nous donner immédiatement le théorème suivant . Nous avons déjà dit que $\mathcal{P}$ est analytique.

THEOREME 2. <u>L'ensemble coanalytique $\mathcal{P}^c$ n'est pas analytique</u>.

DEMONSTRATION. Supposons que $\mathcal{P}^c$ soit analytique. Il existe alors une application s.c.s. f de $\underline{\underline{T}}$ dans $\underline{\underline{T}}$, telle que $x\in\mathcal{P}^c \Leftrightarrow f(x)\in\mathcal{P}$. Posons alors $g(x)=f(x)\wedge x$; c'est une fonction s.c.s. finie sur $\mathcal{P}$ puisque f(x) est fini si $x\in\mathcal{P}$, et sur $\mathcal{P}^c$ puisque x est alors fini. Pour tout ω, la fonction $x\mapsto g_x(\omega)$ est s.c.s. à valeurs finies sur le compact $\underline{\underline{T}}$, elle est donc bornée , et le temps d'arrêt

$$T(\omega) = \sup_x g_x(\omega)$$

est fini. Posons x=T+1 . Comme $x>T\geqq g(x)=f(x)\wedge x$ en tout point de Ω, nous avons $f(x)\wedge x = f(x)$, donc $f(x)\leqq T$. C'est absurde, car T est fini, x aussi, donc f(x) n'est pas fini, et $f(x)\leqq T$ est impossible.

LE PREMIER THEOREME DE SEPARATION

Grâce au théorème 2, et à une admirable astuce que nous avons trouvée dans le livre de KURATOWSKI, nous allons obtenir le théorème suivant

THEOREME 3. <u>Sur tout ensemble analytique</u> A <u>de</u> $\underline{\underline{T}}$, <u>disjoint de</u> ρ, <u>l'indice est borné par un ordinal dénombrable</u>.

DEMONSTRATION. Supposons le contraire. Alors

$$\rho^c = \{ S : \exists T \in A , j(S) \leq j(T) \}$$

Donc ρ^c est projection sur $\underline{\underline{T}}$ de l'ensemble

$$\{(S,T) : T\in A\} \cap \{(S,T) : j(S) \leq j(T)\}$$

analytique d'après le lemme 7. ρ^c est alors analytique, contrairement au théorème 2 .

Voici le premier théorème de séparation. Nous l'énonçons dans un espace métrisable compact, mais l'extension à deux <u>sousliniens</u> d'un espace métrisable séparable est immédiate par plongement.

THEOREME 4. <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>deux ensembles analytiques disjoints dans</u> E <u>métrique compact</u>. A <u>et</u> B <u>sont alors séparables par deux ensembles boréliens disjoints</u>.

DEMONSTRATION. Il nous suffit évidemment de construire un borélien contenant A et disjoint de B . Désignons par H une application borélienne de E dans $\underline{\underline{T}}$, telle que $B=H^{-1}(\rho)$. D'après le th. 3, l'indice est borné par un ordinal dénombrable α sur l'ensemble analytique H(A) disjoint de ρ , et l'ensemble borélien cherché est (lemme 4, c)) $\{ x : j(H_x) \leqq \alpha \}$.

REMARQUE. Soit (B_s) un schéma de Souslin sur E, formé d'ensembles boréliens , et soit $x \mapsto T_x$ l'application correspondante de E dans $\underline{\underline{T}}$. Si le noyau B de (B_s) est borélien, l'indice $j(T_x)$ est borné sur B^c par un ordinal dénombrable α. Inversement, si cette propriété a lieu, $B = \{ x : j(T_x) > \alpha \}$ est borélien. On a donc un critère pour que le noyau d'un schéma de Souslin borélien soit borélien. Nous ne donnerons pas les détails, mais on peut utiliser cela pour montrer que l'image de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ par une application borélienne injective est borélienne.

LE THEOREME DE NOVIKOV (ESPACES COMPACTS)

Nous démontrons une variante du théorème 3 :

THEOREME 5. <u>Soit</u> A <u>une partie analytique de</u> $\underline{\underline{T}}^{\mathbb{N}}$ <u>possédant la propriété suivante</u>

(12) <u>Pour tout</u> $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$, <u>il existe</u> n <u>tel que</u> T_n <u>soit fini</u>.
<u>Alors il existe un ordinal dénombrable</u> α <u>tel que</u>

(13) <u>Pour tout</u> $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$, $\inf_n j(T_n) \leqq \alpha$.

DEMONSTRATION. Supposons le contraire. Alors

$$\rho^c = \{ S : \exists (T_n) \in A , \forall n \; j(S) \leqq j(T_n) \}$$

Comme dans la démonstration du théorème 3, ρ^c serait alors projection de
$$\{(S,(T_n)) : (T_n)\epsilon A \ , \ \forall n \quad j(S)\leqq j(T_n) \ \}$$
et serait donc analytique, contrairement au théorème 2.

On en tire une démonstration d'une forme du théorème de NOVIKOV, qui entraîne le théorème 4, mais dont on ne peut déduire le théorème 1 (il faudrait pour cela la forme générale de l'exposé précédent, où E est métrisable séparable, et les B_n sont <u>bianalytiques</u>).

THEOREME 6. <u>Soient</u> A_n <u>des ensembles analytiques dans</u> E <u>métrisable compact</u>, <u>tels que</u> $\bigcap_n A_n = \emptyset$. <u>Il existe alors des boréliens</u> B_n <u>tels que</u> $A_n \subset B_n$ <u>pour tout</u> n, $\bigcap_n B_n = \emptyset$.

DEMONSTRATION. Pour tout n soit $x \mapsto T^n_x$ une application borélienne de E dans $\underline{\underline{T}}$, telle que $A_n = \{x : T^n_x \epsilon \rho\}$. Comme $\bigcap_n A_n = \emptyset$, l'un au moins des T^n_x est fini, quel que soit le point $x\epsilon E$. D'après le théorème 5,[1] il existe un ordinal α bornant $\inf_n j(T^n_x)$ uniformément en x. Les boréliens cherchés sont alors (lemme 4, c))
$$B_n = \{ x : j(T^n_x) \geqq \alpha+1 \} .$$

FORME ABSTRAITE DU RESULTAT PRECEDENT

On sait qu'il existe une forme du premier théorème de séparation relative aux ensembles analytiques par rapport à un pavage <u>compact</u> $\underline{\underline{E}}$. Il est naturel de se demander si l'énoncé du th.6 reste valable dans ces conditions, les boréliens étant remplacés par des éléments du stabilisé de $\underline{\underline{E}}$ pour les réunions et les intersections dénombrables. Nous supposerons ici $\underline{\underline{E}}$ stable pour $(\cup f, \cap f)$, ce qui ne restreint pas la généralité ; le stabilisé est alors la classe monotone $\underline{\underline{M}}$ engendrée par $\underline{\underline{E}}$, et nous utilisons les notions introduites dans la définition 2.

Soient A_n des ensembles $\underline{\underline{E}}$-analytiques , $x \mapsto T^n_x$ les applications $\underline{\underline{E}}$-s.c.s. correspondantes. Supposons que $\bigcap_n A_n = \emptyset$, et montrons qu'il existe un ordinal α majorant $\inf_n j(T^n_x)$ pour tout x . Ce point étant établi, la démonstration du th.6 restera valable sans aucun changement.

Comme dans le th.5, supposons qu'il n'existe pas de tel α. Alors nous aurons en revenant au lemme 6 (et non au lemme 7 cette fois)
$$\rho^c = \{ T : \exists \ x\epsilon E, \ \exists (f^n)\epsilon C^{\mathbb{N}}, \ T \leqq \inf_n T^n_x \circ f^n \ \}$$
et nous pourrons en déduire l'analyticité de ρ^c – la contradiction cherchée – si l'ensemble suivant, dont la projection sur $\underline{\underline{T}}$ est ρ^c
$$\{(x,T,(f^n)) : T \leqq \inf_n T^n_x \circ f^n \ \}$$

---

1 Appliqué à l'image de E par une application borélienne. Ici intervient la compacité – ou plus généralement le caractère souslinien – de E.

est $\underline{\underline{E}}\times\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{T}})\times\underline{\underline{B}}(C^{\mathbb{N}})$-analytique . En effet, sa projection sur $\underline{\underline{T}}\times C^{\mathbb{N}}$ sera alors analytique d'après le th.III. 9 du livre " probabilités et potentiel", et sa projection sur $\underline{\underline{T}}$ le sera alors d'après des théorèmes classiques, $\underline{\underline{T}}\times C^{\mathbb{N}}$ étant polonais. Or cet ensemble s'écrit

$$\bigcap_n \bigcap_m \bigcap_{s\in\Omega_m} \{(x,T,(f^i)) \ : \ T^{[m]}(s) \leqq T_x^{[m]}(f_m^n(s)) \}$$

On se ramène à vérifier que pour $s\in\Omega_m$ fixe, en omettant l'indice n

$$\{(x,T,f) \ : \ T^{[m]}(s) \leqq T_x^{[m]}(f_m(s))\}$$

appartient à $(\underline{\underline{E}}\times\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{T}})\times\underline{\underline{B}}(C))_\sigma$. Or c'est la réunion, pour tous les $k\leqq m+1$, les $t\in\Omega_m$, des ensembles

$$\{x \ : \ k\leqq T_x^{[m]}(t)\}\times\{T \ : \ T^{[m]}(s)=k\}\times\{f \ : \ f_m(s)=t\}$$

et le premier facteur du produit appartient à $\underline{\underline{E}}$, d'après la définition des applications $\underline{\underline{E}}$-s.c.s.. Nous avons donc prouvé une forme un peu plus générale du théorème 6 :

THEOREME 6'. *Soit* $\underline{\underline{E}}$ *un pavage compact* , *et soit* $\underline{\underline{M}}$ *le stabilisé de* $\underline{\underline{E}}$ *pour les réunions et intersections dénombrables*. *Pour toute suite* (A_n) *d'ensembles* $\underline{\underline{E}}$-*analytiques d'intersection vide*, *il existe une suite* (B_n) *d'éléments de* $\underline{\underline{M}}$ *tels que* $A_n\subset B_n$ *pour tout* n , $\bigcap_n B_n = \emptyset$.

4. UNE REMARQUE SUR LA CAPACITABILITE

La première démonstration d'un théorème de capacitabilité "abstrait" a été celle de CHOQUET [2], écrite dans le langage des schémas de Souslin. Nous allons récrire cette démonstration dans le langage des temps d'arrêt.

Etant donnés deux éléments ω et ω' de Ω, nous écrirons $\omega'\leqq\omega$ pour exprimer que $X_i(\omega')\leqq X_i(\omega)$ pour tout i. Ω se trouve ainsi ordonné, et pour tout ω l'ensemble $\{\omega':\omega'\leqq\omega\}$ est compact. Nous allons associer à tout temps d'arrêt un temps d'arrêt *croissant*, de la manière suivante

DEFINITION 7. *Soit* T *un temps d'arrêt*. *On pose*

(14) $$\hat{T}(\omega) = \sup_{\omega'\leqq\omega} T(\omega')$$

LEMME 8. a) $\hat{T}$ *est un temps d'arrêt*, *et* $T\leqq\hat{T}$.

b) *Si* T *est fini*, $\hat{T}$ *est fini*.

c) *Si* T *est fini*, *on a* $(\hat{T})^\alpha=(T^\alpha)^\wedge$ *pour tout* α *dénombrable*.

En particulier, T *et* $\hat{T}$ *ont même indice*.

d) *Avec les notations de la déf*.2, *si* $x\mapsto T_x$ *est* $\underline{\underline{E}}$-*s.c.s.*, *il en est de même de* $x\mapsto \hat{T}_x$ (*en particulier*, $T\mapsto\hat{T}$ *est borélienne*).

DEMONSTRATION. a) Il est clair que $T \leqq \hat{T}$. Supposons que l'on ait $\hat{T}(\omega)>n$, $\omega'|n=\omega|n$. Alors il existe $\mu \leqq \omega$ telle que $T(\omega)>n$. Définissons μ' par $X_k(\mu')=X_k(\mu)$ $(k\leqq n)$, $X_k(\mu')=X_k(\omega')$ $(k\geqq n)$. Alors $\mu'|n=\mu|n$, donc $T(\mu')>n$, et $\mu' \leqq \omega'$, donc $\hat{T}(\omega')>n$. $\hat{T}$ est bien un temps d'arrêt.

b) Un temps d'arrêt est une fonction continue sur Ω : si T est fini sur Ω, il est borné sur le compact $\{\omega' : \omega' \leqq \omega\}$, donc $\hat{T}$ est fini.

c) Soit $n>0$. On a (en définissant de manière évidente la relation $\leqq$ sur Ω_n)

$$(\hat{T})^*(\omega)>n \iff \exists\omega',\ \omega'|n=\omega|n\ ,\ \hat{T}(\omega')>n+1 \iff \exists\omega',\ \omega'|n=\omega|n\ ,\exists\omega'' \leqq \omega',\ T(\omega'')>n+1 \iff \exists\omega'',\ \omega''|n \leqq \omega|n,\ T(\omega'')>n+1\ .$$

$$(T^*)\hat{}(\omega)>n \iff \exists\omega_1\ ,\ \omega_1 \leqq \omega,\ T^*(\omega_1)>n \iff \exists\omega_1\ ,\omega_1 \leqq \omega, \exists\omega_2\ ,\omega_2\,|n=\omega_1\,|n\ ,\ T(\omega_2)>n+1 \iff \exists\omega_2\ ,\ \omega_2\,|n \leqq \omega|n\ ,\ T(\omega_2)>n+1.$$

Par conséquent, $(\hat{T})^*=(T^*)\hat{}$. Pour vérifier par récurrence transfinie l'assertion relative à T^α, il suffit de vérifier que si des T_n finis tendent en décroissant vers T, alors $\hat{T}_n$ tend vers $\hat{T}$. C'est le lemme de Dini ! Les fonctions continues T_n-T tendent vers 0 en décroissant, elles convergent uniformément vers 0 sur le compact $\{\omega':\omega' \leqq \omega\}$, autrement dit il existe un n tel que $T_n=T$ sur ce compact.

Pour conclure quant à l'indice, on remarque que $\hat{T}\equiv 1 \iff T\equiv 1$.

d) Soit $s\in\Omega_n$. L'ensemble $\{x : \hat{T}_x^{[n]}(s)>n\}$ est la réunion, pour les $s'\in\Omega_n$, $s' \leqq s$, des ensembles $\{ x : T_x^{[n]}(s')>n \}$. Ces ensembles étant en nombre fini et appartenant à $\underline{\underline{E}}$, il en est de même de leur réunion, donc $x \mapsto \hat{T}_x$ est $\underline{\underline{E}}$-s.c.s..

La conclusion de tout ceci est le fait que les temps d'arrêt <u>croissants</u> peuvent remplacer les temps d'arrêt dans toute la théorie des paragraphes 1 à 3. Cela ne semble pas apporter de simplifications notables, sauf pour la démonstration suivante.

LE THEOREME DE CAPACITABILITE

Soit I une capacité relative au pavage $\underline{\underline{E}}$ (I " descend" sur les suites décroissantes d'éléments de $\underline{\underline{E}}$), et soit A un ensemble $\underline{\underline{E}}$-analytique de capacité $>a$. Représentons A comme $\{ x : T_x \in P\}$, où l'application $\underline{\underline{E}}$-s.c.s. $x \mapsto T_x$ prend ses valeurs dans l'ensemble des temps d'arrêt croissants. Posons pour tout $s\in\Omega_i$

$$A_s = \{ x : \exists\omega\ ,\ \omega|i \leqq s\ ,\ T_x(\omega)=+\infty \} \subset \{ x : T_x^{[i]}(s)>i \}= B_s$$

L'inclusion tient au fait que les temps d'arrêt T_x sont croissants. On a $A=\bigcup_n A_n$ (on identifie l'entier n à la suite de longueur 1 correspondante), la suite A_n est croissante, donc il existe n_1 tel que $I(A_{n_1})>a$. On a $A_{n_1}=\bigcup_n A_{n_1 n}$, donc il existe n_2 tel que $I(A_{n_1 n_2})>a$, et par récurrence on construit ainsi une suite $\omega=n_1n_2\dots$ telle que $I(A_{\omega|n})>a$ pour tout n. A fortiori $I(B_{\omega|n})>a$. Comme les $B_{\omega|n}$ appartiennent à $\underline{\underline{E}}$, et la capacité descend sur $\underline{\underline{E}}$, l'ensemble

(15) $B=\bigcap_n B_{\omega|n} = \{ x : T_x(\omega)=+\infty \}$ (qui appartient à $\underline{\underline{E}}_\delta$)

a une capacité $\geq a$. C'est le théorème de CHOQUET.

La même démonstration donne le théorème de SION : soit $\underline{\underline{C}}$ une <u>capacitance</u>, c'est à dire un ensemble de sous-ensembles de E (dits <u>gros</u>) tel que

$A\in\underline{\underline{C}}$, $A\subset B \Rightarrow B\in\underline{\underline{C}}$, $A_n\uparrow A$, $A\in\underline{\underline{C}} \Rightarrow \exists n$, $A_n\in\underline{\underline{C}}$

Le raisonnement précédent s'applique à la fonction d'ensemble I(A) valant 1 si $A\in\underline{\underline{C}}$, 0 sinon, et montre que " tout gros ensemble $\underline{\underline{E}}$-analytique contient l'intersection d'une suite décroissante de gros éléments de $\underline{\underline{E}}$ ".

Une variante à peine plus compliquée donne le théorème plus raffiné sur les <u>capacitances scissipares</u>. Rappelons ([3]p.23) que la capacitance $\underline{\underline{C}}$ est dite <u>scissipare</u> (ou dichotomique) si

(16) <u>Pour tout $A\in\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})\cap\underline{\underline{C}}$, il existe deux éléments disjoints U_0 et U_1 de $\underline{\underline{E}}$ tels que $A\cap U_0$ et $A\cap U_1$ appartiennent à $\underline{\underline{C}}$.</u>

L'axiome de choix nous autorise à noter $\Phi_0(A)$,$\Phi_1(A)$ deux tels ensembles. Soit $\Theta=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Le théorème II.28 de [3], p.41, s'énonce ainsi

THEOREME 7. <u>Supposons que $\underline{\underline{C}}$ soit scissipare, et que $A\in\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$ appartienne à $\underline{\underline{C}}$. Il existe alors $B\in\underline{\underline{E}}_\delta$, contenu dans A , tel que B soit réunion d'une famille $(K_\theta)_{\theta\in\Theta}$ d'ensembles disjoints, dont chacun est intersection d'une suite décroissante d'éléments de $\underline{\underline{E}}\cap\underline{\underline{C}}$.</u>

Autrement dit, A porte non seulement un bébé normalement constitué (15), mais une infinité <u>non dénombrable</u> d'iceux (et dont la réunion est un bébé).

DEMONSTRATION. Nous représentons A comme dans la démonstration précédente : $A = \{ x : T_x\in\mathcal{P} \}$, où chaque T_x est croissant. Nous définissons A_s et B_s comme précédemment. Nous construisons par récurrence, pour toute suite <u>dyadique</u> u de longueur p , un ensemble $K_u\in\underline{\underline{E}}$ et un entier n_p de telle sorte que

a) Les ensembles K_u, $u\in\{0,1\}^{\{1,\dots,p\}}$ soient disjoints

b) la relation $u\dashv v$ entraîne $K_v\subset K_u$

c) Les ensembles $A_{n_1\dots n_p}\cap K_u$ appartiennent à $\underline{\underline{C}}$

Nous commençons la récurrence en posant $K_0=\Phi_0(A)$, $K_1=\Phi_1(A)$. Si la construction a été faite au rang p, nous la faisons au rang p+1 de la manière suivante. Les suites dyadiques u de longueur p sont en nombre fini, et les ensembles $A_{n_1\dots n_p}\cap K_u$ appartiennent tous à $\underline{\underline{C}}\cap\underline{\underline{A}}(E)$.

Du fait que les T_x sont croissants, il existe un entier n tels que les ensembles $A_{n_1 \dots n_p n} \cap K_u$ appartiennent tous à $\underline{\underline{C}} \cap \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$, et nous prenons $n_{p+1}=n$. Puis nous posons

$$K_{u.o} = K_u \cap \Phi_o(A_{n_1..n_{p+1}} \cap K_u), \ K_{u.1} = K_u \cap \Phi_1(A_{n_1..n_{p+1}} \cap K_u)$$

La vérification des hypothèses de récurrence est immédiate. Posons enfin, pour toute suite dyadique infinie K_θ

$$K_\theta = \bigcap_p (B_{n_1 \dots n_p} \cap K_{\theta|p})$$

Les K_θ sont bien disjoints, et appartiennent à $\underline{\underline{E}}_\delta$. Comme $A_{n_1..n_p} \subset B_{n_1 \dots n_p}$, K_θ est l'intersection d'une suite décroissante d'éléments de $\underline{\underline{E}} \cap \underline{\underline{C}}$. Comme $\bigcap_n B_{n_1 \dots n_p} \subset A$, on a $K_\theta \subset A$. Enfin, soit $B = \bigcup_\theta K_\theta$; désignons par Θ_p l'ensemble des suites dyadiques finies de longueur p . Comme les K_u , $u \in \Theta_p$, sont disjoints, on vérifie aussitôt que

$$B = \bigcap_p \bigcup_{u \in \Theta_p} B_{n_1 \dots n_p} \cap K_u$$

et B appartient bien à $\underline{\underline{E}}_\delta$.

5. ENSEMBLES COANALYTIQUES NON SÉPARABLES

La théorie de l'indice nous a fourni un exemple naturel d'ensemble coanalytique non analytique. Nous allons montrer maintenant comment elle permet de construire deux ensembles coanalytiques disjoints, non séparables par des boréliens disjoints.

THEOREME 8. <u>Dans le compact</u> $I = \underline{\underline{T}} \times \underline{\underline{T}}$, <u>les ensembles coanalytiques disjoints</u>

(17) $H_1 = \{(S,T) : j(S) < j(T)\}$, $H_2 = \{(S,T) : j(S) > j(T)\}$ (cf. lemme 7)

<u>ne sont pas séparables par des boréliens disjoints</u>.

DEMONSTRATION. Nous allons supposer qu'il existe un borélien H contenant H_1 et disjoint de H_2 , et en déduire une contradiction.

Soit $\bar{\Omega}$ le compact $\bar{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Montrons que <u>tout borélien de</u> $\bar{\Omega}$ <u>est image réciproque de H par une application continue</u> f <u>de</u> $\bar{\Omega}$ <u>dans</u> $I = \underline{\underline{T}} \times \underline{\underline{T}}$. En effet, soit D borélien dans $\bar{\Omega}$. $\bar{\Omega}$ est éparpillé, donc D^c est analytique par rapport au pavage $\underline{\underline{E}}$ formé par les ouverts fermés de $\bar{\Omega}$, et il existe une application $\underline{\underline{E}}$-s.c.s. - donc continue - $x \mapsto S_x$ de $\bar{\Omega}$ dans $\underline{\underline{T}}$ telle que $D^c = \{x : S_x \in \mathcal{P}\}$. D'après le th. 3, $j(S_x)$ est borné sur D par un ordinal dénombrable α . Soit T un temps d'arrêt d'indice $\alpha+1$, et soit $f(x) = (S_x, T) \in I$. La coupe $\{ S : (S,T) \in H\}$ contenant tous les temps d'arrêt d'indice $\leq\alpha$, et n'en contenant aucun d'indice $>\alpha+1$ (en particulier, aucun élément de P), on a $D=f^{-1}(H)$. Il peut être intéressant de noter ici qu'on n'utilise pas le fait que H est disjoint de H_2 , mais seulement de $P\times P^c\subset H_2$.

Pour qui connaît la théorie des classes de Baire , le théorème est établi : tout borélien de $\overline{\Omega}$ a une classe au plus égale à celle de H, ce qui est absurde. Pour la commodité du lecteur, nous allons traduire dans notre langage actuel l'argument d'"ensembles universels" qui est, en fait, la substance du raisonnement par les classes de Baire.

Nous remarquons que l'espace métrisable compact éparpillé I est homéomorphe à un fermé de l'ensemble de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, donc de $\overline{\Omega}$. Considérons donc H comme sous-ensemble (borélien) de $\overline{\Omega}$. Notons aussi $\underline{\underline{C}}$ l'espace polonais des applications continues de $\overline{\Omega}$ dans $\overline{\Omega}$, muni de la topologie de la convergence uniforme (pour une métrique convenable sur $\overline{\Omega}$). L'application $(f,x)\mapsto f(x)$ de $\underline{\underline{C}}\times\overline{\Omega}$ dans $\overline{\Omega}$ étant continue, H étant borélien dans $\overline{\Omega}$, l'ensemble $L=\{(f,x)\in\underline{\underline{C}}\times\overline{\Omega} : f(x)\in H\}$ est borélien. La coupe de L par f étant $f^{-1}(H)$, tous les boréliens de $\overline{\Omega}$ figurent parmi les coupes de L par les $f\in\underline{\underline{C}}$. Comme $\underline{\underline{C}}$ est polonais, il est classique qu'il existe une application borélienne de Ω - donc de $\overline{\Omega}$ - sur $\underline{\underline{C}}$. Désignant par g une telle surjection de $\overline{\Omega}$, soit pour $(u,v)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ $m(u,v) = I_L(g(u),v)$; c'est une indicatrice borélienne, et toutes les indicatrices d'ensembles boréliens de $\overline{\Omega}$ figurent parmi les fonctions $m(u,.)$. Or ceci est absurde : l'indicatrice $1-m(v,v)$ est borélienne, et il n'existe aucun u tel que $1-m(v,v)\equiv m(u,v)$.

REMARQUE. Pour qui connaît la classification de Baire, le raisonnement précédent a une autre conséquence : tout borélien de $\overline{\Omega}$ étant image réciproque de l'un des ensembles $U_\alpha = \{S : j(S)<\alpha\}$ par une application continue, les U_α ont des ordres arbitrairement élevés dans la hiérarchie de Baire. Il serait intéressant d'étudier directement la classe de Baire de U_α.

BIBLIOGRAPHIE (voir aussi l'exposé précédent)

[1]. D. BLACKWELL. Infinite games and analytic sets. Proc. Nat. Acad. Sc. 58, 1967, p. 1836-1837.

[2]. G.CHOQUET. Forme abstraite du théorème de capacitabilité. Ann. Inst. Fourier,Grenoble , 9, 1959, p.83-89.

[3]. C.DELLACHERIE. Capacités et processus stochastiques. Ergebn. der Math. n°67, Springer 1972.

[4]. H.ROGERS. Theory of recursive functions and effective computability. Mc Graw Hill 1967.

[5]. J.R. SHOENFIELD. Mathematical logic. Addison-Wesley 1967.