SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Ensembles analytiques, théorèmes de séparation et applications

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 336-372

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__336_0>

ENSEMBLES ANALYTIQUES : THEOREMES DE SEPARATION ET APPLICATIONS

par C. Dellacherie

Cet exposé a pour but principal de faire connaitre aux probabilistes et autres analystes le deuxième théorème de séparation dont C.A. Rogers [22] vient de publier une démonstration lumineuse, et les belles applications de ce théorème obtenues essentiellement par l'école russe entre 1939 et 1942. Ces derniers travaux sont très peu connus à l'ouest : je pense que c'est parce qu'ils sont parus en russe pendant la guerre et qu'ils ne figurent pas dans le traité classique de Kuratowski. Pour ma part, j'en ai pris connaissance dans un article récent de Čoban [4] - traduit en anglais - et j'ai attribué un bon moment à Čoban un théorème démontré par Arsenin en 1940. Ayant eu le plaisir de faire une série de conférences à l'Université McGill de Montréal, sur l'invitation de J. Taylor et C. Herz, j'ai pu avoir en mains - grâce soit rendue à Brenda MacGibbon-Taylor - une traduction allemande [1] de 1955 (venant de RDA) d'une série d'articles d'exposition russes de 1950 parus dans la revue "Uspehi Matem. Nauk", avant que cette dernière ne soit traduite systématiquement en anglais sous le nom de "Russian Math. Surveys". Cela m'a permis, entre autres, de corriger un certain nombre de mes fantaisies historiques.

Disons, pour allècher le lecteur, que l'un des points culminants de cet exposé sera le théorème suivant (Arsenin-Kunugui-Čegolkov-Čoban) : "Soient E et F deux espaces métrisables compacts, et soit H une partie borélienne de $E \times F$ telle que la coupe $H(y)$ de H suivant tout $y \in F$ soit une réunion dénombrable de compacts de E. Alors la projection $\pi(H)$ de H sur F est borélienne et il existe une application borélienne g de $\pi(H)$ dans E telle que $g(y)$ appartienne à $H(y)$ pour tout $y \in \pi(H)$". J'ai essayé de faire un exposé assez complet sur ces questions, en étudiant notamment en détail les ensembles analytiques et boréliens à coupes compactes. Certains théorèmes me semblent nouveaux (par ex th. 16 et 26). N'ayant lu, vues mes connaissances en allemand, aucune démonstration des théorèmes tirés de [1], j'ose espérer que celles que je donne sont correctes et intéressantes. En particulier, la démonstration du théorème d'Arsenin-Kunugui-Čegolkov-Čoban (th. 19, 31 et 32) est beaucoup plus courte que celle de [1]. Enfin, j'ai profité de l'occasion pour faire un bref résumé des traits principaux de la théorie des ensembles analytiques, en utilisant pour cela une nouvelle rédaction du chapitre III du livre de Meyer [16] faite par Meyer et moi.

Je me suis aperçu, en cours de rédaction, que l'énoncé du théorème d'Arsenin est cité avec référence dans l'excellent article de synthèse [23] de Sierpinski, ainsi qu'un résultat intermédiaire dû à Kunugui, et, après rédaction, que Larman [24,25] avait publié récemment une extension de ce théorème aux ensembles analytiques "non-classiques" et des résultats satellites nouveaux. J'ai aussi appris dans Larman [24] que Kunugui avait publié, en même temps qu'Arsenin, une démonstration de ce théorème. Cela aurait été trop fastidieux de transformer ma rédaction en tenant compte de ces informations, et d'autres contenues dans l'introduction des exposés "Ensembles analytiques et temps d'arrêt" et "Jeux infinis et temps d'arrêt" de ce volume. De la rédaction qui a circulé durant l'année 1974, celle-ci ne diffère que par sa première page, les deux premières pages du paragraphe V et l'adjonction de quelques notes de bas de page.

I. GENERALITES

Je ne donnerai pratiquement pas de démonstrations dans ce paragraphe. Pour la partie "abstraite", on pourra se reporter au livre de Meyer [16].

1. Parties analytiques d'un espace pavé :

Etant donné un ensemble E, un pavage $\underline{\underline{E}}$ sur E est un ensemble de parties de E contenant la partie vide; le couple $(E,\underline{\underline{E}})$ est appelé espace pavé. Si $(E_n,\underline{\underline{E}}_n)$ est une suite d'espaces pavés, on définit l'espace pavé produit $(\prod E_n, \prod \underline{\underline{E}}_n)$, où $\prod \underline{\underline{E}}_n$ est le pavage sur $\prod E_n$ constitué par les ensembles de la forme $\prod A_n$, $A_n \in \underline{\underline{E}}_n$; le produit de deux espaces pavés $(E_1,\underline{\underline{E}}_1)$ et $(E_2,\underline{\underline{E}}_2)$ est encore noté $(E_1 x E_2, \underline{\underline{E}}_1 x \underline{\underline{E}}_2)$.

Si $\underline{\underline{E}}$ est un pavage, on désigne par $\underline{\underline{E}}_s$, $\underline{\underline{E}}_d$, $\underline{\underline{E}}_\sigma$, $\underline{\underline{E}}_\delta$ le plus petit pavage contenant $\underline{\underline{E}}$ et stable pour respectivement, les réunions finies, les intersections finies, les réunions dénombrables, les intersections dénombrables. On dit aussi que $\underline{\underline{E}}_s$ est le stabilisé de $\underline{\underline{E}}$ pour les réunions finies, etc, et on note $\underline{\underline{E}}_{sd}$ le pavage $(\underline{\underline{E}}_s)_d$, etc
Si $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_s$ (resp $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_d$), on sait que $\underline{\underline{E}}_\delta = \underline{\underline{E}}_{\delta s}$ (resp $\underline{\underline{E}}_\sigma = \underline{\underline{E}}_{\sigma d}$).

DEFINITION 1. Soit $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace pavé. Une partie A de E est dite $\underline{\underline{E}}$-analytique s'il existe un espace métrisable compact auxiliaire K, muni du pavage $\underline{\underline{K}}$ de ses parties compactes, et un élément B de $(\underline{\underline{E}} x \underline{\underline{K}})_{\sigma\delta}$ tels que A soit égal à la projection de B sur E.

Une partie de E est dite $\underline{\underline{E}}$-coanalytique si son complémentaire est $\underline{\underline{E}}$-analytique et $\underline{\underline{E}}$-bianalytique si elle est à la fois $\underline{\underline{E}}$-analytique et $\underline{\underline{E}}$-coanalytique. L'ensemble des parties $\underline{\underline{E}}$-analytiques, $\underline{\underline{E}}$-coanalytiques, $\underline{\underline{E}}$-bianalytiques de E sera noté respectivement $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$, $\underline{\underline{CA}}(\underline{\underline{E}})$, $\underline{\underline{BA}}(\underline{\underline{E}})$.

On obtiendrait les mêmes ensembles analytiques en prenant un espace pavé compact abstrait auxiliaire, ou en prenant toujours le même espace métrisable compact auxiliaire, pourvu qu'il soit suffisamment riche (par exemple, le segment [0,1] ou l'espace produit $(\mathbb{N}\cup\{\infty\})^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ étant le compactifié d'Alexandrov de l'ensemble des entiers naturels). Enfin, on obtient aussi les mêmes ensembles analytiques en appliquant l'opération A de Souslin au pavage $\underline{\underline{E}}$.

L'intérêt des ensembles analytiques est double : d'une part, leur définition est suffisamment générale pour que "l'analyticité" soit préservée par beaucoup d'opérations ensemblistes, d'autre part suffisamment restreinte pour que les ensembles analytiques aient individuellement de bonnes propriétés. Nous allons illustrer cela en énonçant les théorèmes de stabilité et le théorème de capacitabilité.

THEOREME 1. Soit $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace pavé. On a $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}}) = \underline{\underline{A}}_\sigma(\underline{\underline{E}}) = \underline{\underline{A}}_\delta(\underline{\underline{E}})$.

On se gardera de croire que $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$ est stable pour le passage au complémentaire. En général, $\underline{\underline{BA}}(\underline{\underline{E}})$ (qui est une tribu) est strictement contenu dans $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$: lorsque $\underline{\underline{E}}$ est le pavage des parties compactes d'un espace métrisable compact E, $\underline{\underline{BA}}(\underline{\underline{E}})$ n'est autre que la tribu borélienne de E (ce n'est pas du tout évident : c'est une conséquence du premier théorème de séparation). D'autre part, en général, la tribu engendrée par $\underline{\underline{E}}$ n'est pas contenue dans $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$; elle est contenue si et seulement si tout élément de $\underline{\underline{E}}$ est $\underline{\underline{E}}$-bianalytique (évidemment, tout élément de $\underline{\underline{E}}$ est $\underline{\underline{E}}$-analytique).

THEOREME 2. Soient $(E_n,\underline{\underline{E}}_n)$ une suite d'espaces pavés, et, pour chaque n, soit A_n un ensemble $\underline{\underline{E}}_n$-analytique. Alors $\prod A_n$ est $\prod \underline{\underline{E}}_n$-analytique.

Voici un théorème d'image directe; nous verrons mieux, plus loin, dans un cadre topologique

THEOREME 3. Soit $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace pavé et soit K un espace compact métrisable muni du pavage $\underline{\underline{K}}$ de ses parties compactes. La projection sur E d'un ensemble $(\underline{\underline{E}}\times\underline{\underline{K}})$-analytique est un ensemble $\underline{\underline{E}}$-analytique.

Et, pour finir, le théorème d'image réciproque et, en particulier, d'idempotence de l'opération A de Souslin

THEOREME 4. Soient $(E,\underline{\underline{E}})$ et $(F,\underline{\underline{F}})$ deux espaces pavés et f une application de E dans F. Si $f^{-1}(A)$ est $\underline{\underline{E}}$-analytique pour tout $A\in\underline{\underline{F}}$, alors $f^{-1}(A)$ est encore $\underline{\underline{E}}$-analytique pour tout $A\in\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{F}})$. En particulier, on a $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})) = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$.

Voici quelques exemples classiques d'ensembles analytiques qui ne sont pas boréliens (les ensembles analytiques étant définis ici à partir du pavage des boréliens)

1) Soit $\underline{\underline{C}}([0,1))$ l'ensemble des fonctions continues sur [0,1], muni de la topologie de la convergence uniforme : c'est un espace polonais (i.e. homéomorphe à un espace métrique séparable complet). L'ensemble des fonctions dérivables partout sur [0,1] est une partie coanalytique, non borélienne, de cet espace (Mazurkiewicz).

2) Soit $\underline{\underline{K}}([0,1])$ l'ensemble des parties compactes de [0,1] muni de la topologie définie par la distance de Hausdorff : c'est un espace métrisable compact. L'ensemble des compacts non dénombrables est une partie analytique, non borélienne, de cet espace (Hurewicz) et l'ensemble des compacts contenus dans les rationnels de [0,1] est une partie coanalytique, non borélienne, de cet espace (Kuratowski-Marczewski).

Passons maintenant au théorème de capacitabilité

DEFINITION 2. Soit $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace pavé. Une application I, définie sur toutes les parties de E, à valeurs dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$, est une $\underline{\underline{E}}$-capacité (de Choquet) si elle satisfait aux conditions suivantes :

a) I est monotone croissante (i.e. $A \subset B \Rightarrow I(A) \leq I(B)$)

b) I monte sur l'ensemble des parties de E : si (A_n) est une suite croissante, de limite A, alors $I(A) = \sup_n I(A_n)$

c) I descend sur $\underline{\underline{E}}_{s\delta}$: si (A_n) est une suite décroissante d'éléments de $\underline{\underline{E}}_{s\delta}$, de limite A, alors $I(A) = \inf_n I(A_n)$

Si I est une $\underline{\underline{E}}$-capacité, une partie A de E est dite I-capacitable si l'on a

$$I(A) = \sup I(B),\ B \subset A,\ B \in \underline{\underline{E}}_{s\delta}$$

THEOREME 5. Tout ensemble $\underline{\underline{E}}$-analytique est I-capacitable pour toute $\underline{\underline{E}}$-capacité I.

Supposons que $\underline{\underline{E}}$ soit une tribu et soit P une mesure de probabilité sur $(E,\underline{\underline{E}})$: la probabilité extérieure P* définie pour toute partie A par

$$P^*(A) = \inf P(B),\ B \supset A,\ B \in \underline{\underline{E}}$$

est alors une $\underline{\underline{E}}$-capacité. Il résulte du théorème précédent que tout ensemble $\underline{\underline{E}}$-analytique (et donc, tout ensemble $\underline{\underline{E}}$-coanalytique) appartient à la tribu complétée de $\underline{\underline{E}}$ pour P.

2. Parties analytiques d'un espace métrisable séparable

Soit E un espace métrisable séparable. Nous désignerons par $\underline{\underline{K}}$, $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{B}}$ ($\underline{\underline{K}}(E)$, $\underline{\underline{F}}(E)$, etc s'il y a risque de confusion) le pavage sur E constitué respectivement par les parties compactes, fermées, ouvertes, boréliennes de E. Tout élément de $\underline{\underline{F}}$ appartient à $\underline{\underline{G}}_\delta$ (on dit, plus communément, est un $\underline{\underline{G}}_\delta$), tout élément de $\underline{\underline{G}}$ est un $\underline{\underline{F}}_\sigma$; la tribu $\underline{\underline{B}}$ est le stabilisé de $\underline{\underline{F}}$ (ou $\underline{\underline{G}}$) pour les réunions et intersections dénombrables ($\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}}_{\sigma\delta\sigma\delta\ldots} = \underline{\underline{G}}_{\delta\sigma\delta\sigma\ldots}$ transfiniment). Il résulte alors des théorèmes 1 et 4 que l'on a $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{F}}) = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{G}}) = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}})$: nous écrirons[1] simplement $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{CA}}$, $\underline{\underline{BA}}$ ($\underline{\underline{A}}(E)$, etc s'il y a risque de confusion) au lieu de $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}})$, $\underline{\underline{CA}}(\underline{\underline{B}})$, $\underline{\underline{BA}}(\underline{\underline{B}})$. Lorsque E est un espace localement compact à base dénombrable (ou, plus généralement, est métrisable et réunion dénombrable de compacts), les ensembles analytiques sont aussi les ensembles $\underline{\underline{K}}$-analytiques.

Soit maintenant F un sous-espace de l'espace métrisable séparable E. On sait que les pavages $\underline{\underline{F}}(F)$, $\underline{\underline{G}}(F)$, $\underline{\underline{B}}(F)$ sont les pavages traces sur F des pavages $\underline{\underline{F}}(E)$, $\underline{\underline{G}}(E)$, $\underline{\underline{B}}(E)$. De même, les pavages $\underline{\underline{A}}(F)$ et $\underline{\underline{CA}}(F)$ sont les pavages traces sur F des pavages $\underline{\underline{A}}(E)$ et $\underline{\underline{CA}}(E)$. Par contre, en général, le pavage $\underline{\underline{BA}}(F)$ n'est pas le pavage trace sur F du pavage $\underline{\underline{BA}}(E)$: il est en général strictement plus grand; il y a égalité si F est une partie analytique de E (ce n'est pas du tout évident : c' est une

---

1 les éléments de $\underline{\underline{A}}$ sont dits simplement analytiques, etc.

conséquence du deuxième théorème de séparation).

Nous verrons[1] que l'étude "fine" des propriétés des parties analytiques d'un espace métrisable quelconque se ramène à l'étude "très fine" des propriétés des parties analytiques d'un espace métrisable compact. L'étude "fine" des propriétés des parties analytiques d'un espace métrisable compact est plus simple, et, jusqu'ici, plus intéressante pour l'analyste. Enfin, nous verrons aussi au paragraphe VI que l'étude "fine" des ensembles $\underline{\underline{E}}$-analytiques pour un pavage abstrait $\underline{\underline{E}}$ se ramène simplement à celle des parties analytiques d'un espace métrisable séparable si tout élément de $\underline{\underline{E}}$ est $\underline{\underline{E}}$-bianalytique.

3. Parties analytiques d'un espace métrisable compact

Jusqu'ici, la notion d'ensemble analytique était relative : doublement relative dans le cas abstrait (être analytique par rapport à $\underline{\underline{E}}$ dans E), simplement relative dans le cas métrisable séparable (être analytique dans E). Les notions[2] que nous allons introduire maintenant sont intrinsèques.

DEFINITION 3. Un espace métrisable E est dit souslinien (resp cosouslinien, lusinien) s'il est homéomorphe à un sous-espace d'un espace compact métrisable, qui est analytique (resp coanalytique, borélien) dans cet espace compact métrisable.

Il est clair qu'un tel espace est séparable. Nous verrons bientôt que la propriété d'être analytique,..., ne dépend pas du plongement.

Les définitions d'espaces métrisables sousliniens et lusiniens que nous venons de donner sont équivalentes à celles de Bourbaki [1]. Notons aussi que cette terminologie est l'inverse de celle de la plupart des spécialistes pour lesquels "analytique" se rapporte à une propriété intrinsèque, et "souslinien" se rapporte à une propriété relative !

Tout espace polonais est homéomorphe à un $\underline{\underline{G}}_\delta$ d'un espace métrisable compact, et donc est lusinien. D'une manière générale, on a

THEOREME 6. Soit E un espace métrisable souslinien (resp cosouslinien, lusinien). Toute partie analytique (resp coanalytique, borélienne) de E est un sous-espace souslinien (resp cosouslinien, lusinien) de E.

Nous verrons bientôt une réciproque. Comme la plupart des théorèmes qui suivent, on démontre ce théorème en plongeant les espaces considérés dans des espaces métrisables compacts.

C'est seulement dans ce cadre que l'on a un théorème général d'images directes :

1 à la fin du paragraphe VI.

2 afin d'éviter des confusions, le vocabulaire introduit dans la définition 3 apparaitra très peu dans la suite.

THEOREME 7. _Soient_ E _un espace métrisable souslinien_, F _un espace métrisable séparable et_ f _une application borélienne de_ E _dans_ F. _Alors_ f(E) _est un sous-espace souslinien et une partie analytique de_ F.

En particulier, tout sous-espace souslinien d'un espace métrisable séparable est une partie analytique de cet espace. Nous allons voir maintenant le théorème de plongement pour les lusiniens et cosousliniens : en fait, nous aurons un théorème de plongement "borélien". Nous dirons qu'une application f d'un espace topologique dans un autre est un _isomorphisme borélien_ si f est bijective et si f _et_ f^{-1} sont boréliennes.

THEOREME 8. _Soit_ E _un espace métrisable lusinien_ (_resp cosouslinien, souslinien_). _Soient_ F _un espace métrisable séparable et_ f _une application de_ E _dans_ F. _Si_ f _est un isomorphisme borélien de_ E _sur_ f(E), _alors_ f(E) _est un sous-espace lusinien_ (_resp cosouslinien_, _souslinien_) _et une partie borélienne_ (_resp coanalytique_, _analytique_) _de_ F. _En particulier, tout sous-espace lusinien_ (_resp cosouslinien_, _souslinien_) _d'un espace métrisable séparable est une partie borélienne_ (_resp coanalytique, analytique_) _de cet espace_.

DEMONSTRATION. Nous n'en donnerons que les grandes lignes. On établit d'abord un lemme, ayant son intérêt propre

Lemme. Soient $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ un espace mesurable, E une partie de Ω munie de la tribu trace $\underline{\underline{F}}|_E$ et f une application mesurable de $(E,\underline{\underline{F}}|_E)$ dans un espace métrisable compact K'. Alors f est la restriction à E d'une application mesurable g de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ dans K'.

Démonstration. On démontre d'abord le lemme lorsque f ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Puis, on passe au cas général en approchant f par des applications mesurables ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. On utilise pour ce faire le fait que l'ensemble de convergence d'une suite de fonctions mesurables à valeurs dans un espace métrisable compact est mesurable.

On plonge alors l'espace E de l'énoncé dans un espace compact métrisable K dans lequel il est borélien (resp ...), et l'espace F dans un autre compact métrisable K'. D'après le lemme, l'application f, considérée à valeurs dans K', est la restriction à E d'une application borélienne g de K dans K'. De même, l'application inverse f' de f, considérée comme application de f(E) dans K, est la restriction à f(E) d'une application borélienne g' de K' dans K. Mais alors, la restriction de g à l'ensemble borélien $B = \{x\in K : g'(g(x)) = x\}$ de K est un isomorphisme borélien sur l'ensemble borélien $B' = \{x'\in K' : g(g'(x')) = x'\}$ de K', dont l'inverse est la restriction de g' à B'. Comme B contient E et B' contient f(E), on en déduit que f(E) est borélien (resp ...) dans B', donc dans K' - c'est donc un sous-espace lusinien (resp ...) -

et finalement dans F (pavages traces).

II. LE PREMIER THEOREME DE SEPARATION

A partir de maintenant, nous donnerons des démonstrations complètes.

THEOREME 9. Soient $E_1,\dots,E_n$ une suite finie de parties analytiques d'un espace métrisable compact F. Si on a $\bigcap E_k = \emptyset$, alors il existe une suite finie $B_1,\dots,B_n$ de boréliens de F telle que B_k contienne E_k pour $k = 1,\dots,n$ et que l'on ait $\bigcap B_k = \emptyset$. [1]

DEMONSTRATION. Le cas où l'un des E_n est vide étant trivial, nous supposerons qu'aucun des E_n n'est vide. Soient alors $F_1, \dots, F_n$ n copies de l'espace F : $\prod E_k$ est une partie analytique de $\prod F_k$. Considérons dans $\prod F_k$ l'ensemble $\underline{\underline{R}}$ des rectangles boréliens (i.e. des ensembles de la forme $\prod B_k$, $B_k \in \underline{\underline{B}}(F_k)$) qui ne rencontrent pas la diagonale de $\prod F_k$. Posons, pour toute partie A de $\prod F_k$, $I(A) = 0$ si A est contenu dans un élément de $\underline{\underline{R}}$ et $I(A) = 1$ sinon. On définit ainsi une capacité I sur $\prod F_k$, pour le pavage des parties compactes : pour établir cela, nous devons vérifier que, si (A^m) est une suite croissante de parties de $\prod F_k$ telle que $I(A^m) = 0$ pour tout m, alors $I(\bigcup A^m) = 0$ et que, si (K^m) est une suite décroissante de compacts de $\prod F_k$ telle que $I(K^m) = 1$ pour tout m, alors $I(\bigcap K^m) = 1$. Or, d'une part, si R^m est pour tout m un élément de $\underline{\underline{R}}$ qui contient A^m, alors $\liminf_m R^m$ est encore un élément de $\underline{\underline{R}}$, et il contient $\bigcup A^m$: donc $I(\bigcup A^m) = 0$. D'autre part, si π_k désigne la projection de $\prod F_k$ sur F_k, $\prod_k \pi_k(K^m)$ est le plus petit rectangle borélien contenant K^m et l'on a $\prod_k \pi_k(\bigcap_m K^m) = \bigcap_m(\prod_k \pi_k(K^m))$: il est alors clair que $I(\bigcap K^m) = 1$. Enfin, si on a $\bigcap E_k = \emptyset$, on a évidemment $I(K) = 0$ pour tout compact K contenu dans $\prod E_k$. Comme $\prod E_k$ est I-capacitable, on a aussi $I(\prod E_k) = 0$ et donc il existe un élément R de $\underline{\underline{R}}$ qui contient $\prod E_k$: il suffit alors de poser $B_k = \pi_k(R)$, $k = 1,\dots,n$.

COROLLAIRE. Soit E un espace métrisable souslinien. Une partie B de E est bianalytique si et seulement si elle est borélienne.

DEMONSTRATION. La condition suffisante est triviale. Pour démontrer la nécessité, plongeons E dans un espace métrisable compact F : si B est bianalytique dans E, B et E − B sont analytiques dans F. Comme ils sont disjoints, on peut les "séparer" par des boréliens disjoints de F, dont les traces sur E ne peuvent qu'être égales à B et à E − B.

Ce corollaire est faux si l'espace est seulement métrisable séparable, ou même cosouslinien métrisable : il peut alors exister des partie bianalytiques qui ne sont pas boréliennes. Plus précisément, Novikov [17] a prouvé l'existence dans

1 Ce théorème s'étend -avec la même démonstration - au cas d'un espace pavé abstrait $(E,\underline{\underline{E}})$ où $\underline{\underline{E}}$ est un pavage "semi-compact" (pour la terminologie, voir Meyer [16]).

[0,1]x[0,1] de deux coanalytiques disjoints C_1 et C_2 qu'on ne peut séparer par des boréliens disjoints : le sous-espace $E = C_1 \cup C_2$ est cosouslinien, et, dans E, C_1 et C_2 sont des bianalytiques qui ne sont pas boréliens. Par contre, la conclusion du théorème 9 reste valable si on remplace " métrisable compact" par "métrisable séparable " à condition de remplacer "boréliens" par "bianalytiques" : c'est une forme du deuxième théorème de séparation. Noter que le théorème, ainsi modifié, n'entraine pas la forme originale : il faudrait, pour cela, savoir que tout bianalytique d'un compact métrisable est borélien, et la manière la plus simple d'établir cela est de démontrer le théorème sous sa forme originale.

Une conséquence importante du premier théorème de séparation : le théorème d'isomorphisme de Souslin-Lusin

THEOREME 10. Soient E un espace métrisable souslinien et f une application borélienne de E dans un espace métrisable séparable F. Si f est injective, alors c'est un isomorphisme borélien de E sur f(E).

DEMONSTRATION. L'image directe f(B) d'un borélien B de E est une partie bianalytique du sous-espace souslinien f(E) : c'est donc un borélien.

On peut d'autre part montrer que chacun des énoncés du théorème 9, du corollaire et du théorème 10 entraine les deux autres.

Voici, comme corollaire du théorème 10, le théorème sur l'image injective d'un espace lusinien métrisable. Nous ne comprenons pas pourquoi on trouve toujours ce théorème déduit "difficilement" du théorème 10 dans la littérature classique (voir, par exemple, le traité de topologie de Kuratowski, où l'on trouve par ailleurs des théorèmes de prolongement d'isomorphismes boréliens beaucoup plus précis que celui que nous avons utilisé dans la démonstration du théorème 8.)

COROLLAIRE. Soient E un espace métrisable lusinien et f une application borélienne de E dans un espace métrisable séparable F. Si f est injective, alors f(E) est un borélien de F.

DEMONSTRATION. D'après le théorème 10, f est un isomorphisme borélien de E sur f(E), et, d'après le théorème 8, f(E) est alors un borélien de F.

Ainsi, un théorème "purement borélien" : "l'image injective d'un borélien d'un compact métrisable par une application borélienne est un borélien" trouve sa démonstration "naturelle" par un détour par la théorie des ensembles analytiques. C'est un principe assez général, auquel il faut penser (voir, par exemple, comment Preiss [20] a résolu récemment un problème sur les convexes boréliens).

Nous terminerons ce paragraphe en citant le théorème de séparation de Novikov, plus général que le théorème 9. Nous le démontrerons plus loin, quand nous étudierons le deuxième théorème de séparation. Quoique nous ne sachions pas démontrer ce théorème sans utiliser le deuxième théorème de séparation, nous le plaçons ici pour deux raisons : d'abord, il va nous permettre d'étudier les boréliens à coupes compactes, ce qui incitera peut-être le lecteur à poursuivre la lecture de l'exposé jusqu'à sa fin; ensuite, parce que je suis convaincu qu'on doit pouvoir démontrer la forme que nous donnons ci-dessous sans faire appel au **deuxième** théorème de séparation (c'est ainsi que j'en ai déjà fourni deux démonstrations - fausses - dont l'une dans [6]).

THEOREME 11. Soit (E_n) une suite (finie ou infinie) de parties analytiques d'un espace métrisable compact F. Si l'on a $\bigcap E_n = \emptyset$, alors il existe une suite (B_n) de boréliens de F telle que B_n contienne E_n pour tout n et que l'on ait $\bigcap B_n = \emptyset$.

Pour voir que ce n'est pas une simple conséquence du théorème 9, il faut penser au cas où (E_n) est une suite décroissante, dont aucun élément n'est vide. Et la démonstration du théorème 9 ne s'adapte pas au cas de suites infinies, car, dans un produit infini dénombrable, la réunion d'une suite croissante de "rectangles" n'est plus forcément un rectangle.

Le corollaire suivant, presque immédiat, nous sera bien utile par la suite

COROLLAIRE. a) Soit (E_n) une suite de parties analytiques d'un espace métrisable compact F. Si $E = \bigcap E_n$ est un borélien de F (resp est contenu dans un coanalytique C de F), alors il existe une suite (B_n) de boréliens (resp de coanalytiques) de F telle que B_n contienne E_n pour chaque n et que $\bigcap B_n$ soit égal à E (resp contenu dans C).

b) Soit (E_n) une suite de parties coanalytiques d'un espace métrisable compact F. Si $E = \bigcup E_n$ est un borélien de F (resp contient un analytique A de F), alors il existe une suite (B_n) de boréliens (resp d'analytiques) de F telle que B_n soit contenu dans E_n pour tout n et que $\bigcup B_n$ soit égal à E (resp contienne A).

DEMONSTRATION. b) se déduit de a) par passage au complémentaire, et a) du théorème 11 appliqué à la suite $(E_n - E)$ (resp$(E_n - C)$), qui a une intersection vide.

III. BORELIENS A COUPES COMPACTES

Dans tout ce paragraphe, on désigne par E (resp F) un espace métrisable compact et par x (resp y) un point générique de E (resp F). La projection de ExF sur F est notée π. On appelle coupe de la partie H de ExF selon y l'ensemble $\dot{H}(y)$ égal à la projection sur E de l'ensemble $H \cap (E\times\{y\})$; on dit que H est un graphe si la coupe H(y) est ou vide ou réduite à un point pour tout y : H est alors le graphe d'une application de $\pi(H)$ dans E.

Notre propos est de trouver des conditions suffisantes pour que la projection $\pi(H)$ d'un borélien H de ExF sur F soit borélienne. On a ainsi les résultats suivants :

(S-L) : si H est un graphe borélien, $\pi(H)$ est borélien

En effet, H est un espace lusinien, et la restriction de π à H est borélienne et injective. On conclut par le corollaire du théorème 10.

(L) plus généralement : soit H une partie borélienne de ExF. Si H(y) est dénombrable (i.e. vide, fini, ou infini dénombrable) pour tout y, alors $\pi(H)$ est borélien.

C'est un théorème de Lusin[1] , plus difficile que le précédent. Le théorème (L) admet une extension triviale : " Soit H une partie borélienne de ExF. Si l'ensemble $\{y : H(y)$ n'est pas dénombrable$\}$ est dénombrable, alors $\pi(H)$ est borélien, et aussi $\pi(H')$, pour toute partie borélienne H' de H " . Cette extension est intéressante, parce qu'elle est maximale : si $E = F = [0,1]$ (par exemple) et si H, borélien de ExF, ne vérifie pas la propriété indiquée dans l'énoncé, il existe toujours une partie borélienne H' de H telle que $\pi(H')$ ne soit pas borélien (cf Purves [21]).

Voici maintenant le théorème d'Arsenin, qui entraine évidemment le théorème (L)

(A) : soit H une partie borélienne de ExF. Si H(y) est un $\underline{\underline{K}}_\sigma$ pour tout y, alors $\pi(H)$ est borélien.

Le théorème (A) a aussi un caractère de maximalité : si l'on remplace "$\underline{\underline{K}}_\sigma$" par le degré de complexité suivant, soit "$\underline{\underline{K}}_{\sigma\delta}$", alors $\pi(H)$ peut être n'importe quelle partie analytique de F si, par exemple $E = F = [0,1]$.[2]

Nous allons démontrer, dans ce paragraphe, un cas particulier de (A), généralisant (S-L), qui a été établi par Novikov avant qu'Arsenin ne démontre (A)

(N) : soit H une partie borélienne de ExF. Si H(y) est compact pour tout y, alors $\pi(H)$ est borélien.

Et nous éluciderons complètement, à l'aide de ce théorème, la structure des boréliens à coupes compactes (alors que le problème analogue pour les boréliens à coupes $\underline{\underline{K}}_\sigma$ est ouvert, à ma connaissance).

---

1 L'énoncé de Lusin est beaucoup plus précis : tout borélien à coupes dénombrables est la réunion d'une suite de graphes boréliens.

2 On sait que tout analytique de $[0,1]$ est projection d'un $\underline{\underline{G}}_\delta$ de $[0,1]\times[0,1]$.

Nous allons d'abord nous intéresser aux analytiques à coupes compactes, dont nous ferons une étude un peu éparpillée dans l'exposé. Rappelons au passage que, si $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{F}}$ sont deux pavages stables pour les intersections finies, alors $(\underline{\underline{E}}x\underline{\underline{F}})_s$ est stable (pour les réunions et) pour les intersections finies, et que tout élément de $(\underline{\underline{E}}x\underline{\underline{F}})_{s\delta}$ est alors la limite d'une suite décroissante d'éléments de $(\underline{\underline{E}}x\underline{\underline{F}})_s$.

THEOREME 12. Soit H une partie de ExF. Les assertions suivantes sont équivalentes.

a) H est analytique et H(y) est compact pour tout y

b) H appartient à $(\underline{\underline{K}}(E)x\underline{\underline{A}}(F))_{s\delta}$

DEMONSTRATION. Il est clair que b) entraine a). Montrons que a) entraine b). Soit (U_n) une base dénombrable d'ouverts de la topologie de E et posons, pour tout n,

$$C_n = \{y : H^c(y) \text{ contient } U_n\}$$

L'ensemble C_n est le complémentaire de l'ensemble analytique $\pi(H\cap(U_n xF))$, et on a

$$H^c = \bigcup_n (U_n xC_n) \qquad H = \bigcap_n ((U_n^c xF)\cup(ExC_n^c))$$

D'où la conclusion.

Nous allons voir que le théorème est encore vrai si on remplace "analytique" par "borélien" et $\underline{\underline{A}}(F)$ par $\underline{\underline{B}}(F)$. Il nous faut, pour cela, démontrer d'abord le théorème de Novikov :

THEOREME 13. Soit H une partie borélienne de ExF. Si H(y) est compact pour tout y, alors $\pi(H)$ est borélien.

DEMONSTRATION. Reprenons la représentation de H^c de la démonstration précédente :

$$H^c = \bigcup_n (U_n xC_n), \quad U_n \in \underline{\underline{G}}(E), \quad C_n \in \underline{\underline{CA}}(F)$$

Le borélien H^c est alors la réunion d'une suite de coanalytiques. D'après le corollaire du théorème 11, il existe une suite (B_n) de boréliens de ExF telle que B_n soit contenu dans $U_n xC_n$ pour tout n et que $H^c = \bigcup B_n$. Posons alors, pour tout n, $A_n = \pi(B_n)$: A_n est analytique et $U_n xA_n$ est compris entre B_n et $U_n xC_n$. On a donc aussi $H^c = \bigcup(U_n xA_n)$. Par passage au complémentaire, on en déduit que H appartient à $(\underline{\underline{K}}(E)x\underline{\underline{CA}}(F))_{s\delta}$. Il résulte alors du lemme ci-dessous que $\pi(H)$ est coanalytique, et donc borélien d'après le corollaire du théorème 9.

Voici le lemme utilisé, dont la démonstration est laissée au lecteur

LEMME. Soit (H_n) une suite décroissante de parties de ExF. Si, pour tout n, la coupe $H_n(y)$ est compacte pour tout y, alors on a $\pi(\bigcap H_n) = \bigcap \pi(H_n)$.

On sait que Lebesgue, ayant omis l'hypothèse de compacité des coupes dans ce lemme, avait cru pouvoir démontrer que la projection de tout borélien est borélienne. C'est Souslin qui releva l'erreur de Lebesgue, et inaugura la théorie des ensembles analytiques.

THEOREME 14.[1] Soit H une partie de ExF. Les assertions suivantes sont équivalentes.

a) H est borélien et H(y) est compact pour tout y

b) H appartient à $(\underline{\underline{K}}(E)\times\underline{\underline{B}}(F))_{s\delta}$

DEMONSTRATION. Il est clair que b) entraine a). D'autre part, la conclusion du théorème 13 est incluse dans b) d'après le lemme. Montrons que a) entraine b). Reprenons la démonstration du théorème 12 : il suffit de montrer que, si H est borelien, les ensembles $C_n = \{y : H^c \text{ contient } U_n\}$ sont boréliens, soit encore que $C_n^c = \pi(H \cap (U_n \times F))$ est borélien pour tout n. Ce qui résulte immédiatement du th. 13 car U_n est la réunion d'une suite de compacts et π commute avec les réunions.

On a évidemment aussi élucidé la structure des coanalytiques à coupes ouvertes : ce sont les éléments de $(\underline{\underline{G}}(E)\times\underline{\underline{CA}}(F))_\sigma$, et celle des boréliens à coupes ouvertes : ce sont les éléments de $(\underline{\underline{G}}(E)\times\underline{\underline{B}}(F))_\sigma$. En particulier, la projection d'un borélien à coupes ouvertes est borélienne, résultat qui peut s'établir très simplement, sans utiliser la théorie des ensembles analytiques. Notons au passage qu'il est faux que tout analytique à coupes ouvertes soit un élément de $(\underline{\underline{G}}(E)\times\underline{\underline{A}}(F))_\sigma$. Nous verrons apparaitre, au paragraphe suivant, les complémentaires des éléments de $(\underline{\underline{G}}(E)\times\underline{\underline{A}}(F))_\sigma$ qui sont des coanalytiques à coupes compactes spéciaux, jouant un rôle important dans les problèmes de section borélienne.

Nous allons donner maintenant quelques applications intéressantes de ce qui précède à l'étude des fonctions de F dans $\underline{\underline{K}}(E)$. Nous aurons besoin pour cela d'une bonne topologie sur $\underline{\underline{K}}(E)$. On appelle topologie exponentielle (ou de Vietoris) sur $\underline{\underline{K}}(E)$ la moins fine des topologies sur $\underline{\underline{K}}(E)$ pour lesquelles un ensemble de la forme $\{K \in \underline{\underline{K}}(E) : K \text{ est inclus dans } L\}$ soit fermé (resp ouvert) si L est compact (resp ouvert) dans E. Le compact vide est isolé dans cette topologie, et une base d'ouverts sur $\underline{\underline{K}}(E) - \{\emptyset\}$ est constituée par les ensembles de la forme

$$\{K : K \subset U_0\} \cap \{K : K \cap U_1 \neq \emptyset\} \cap \ldots \cap \{K : K \cap U_n \neq \emptyset\}$$

ou $U_0, U_1, \ldots, U_n$ sont des ouverts de E; lorsque ces ouverts parcourent une base de E stable pour les réunions finies, on obtient une base dénombrable de $\underline{\underline{K}}(E) - \{\emptyset\}$. Cette topologie est métrisable compacte. De plus, elle coincide avec d'autres topologies usuelles induites par des distances. Ainsi, si d est une distance sur E compatible avec sa topologie, on définit la distance de Hausdorff entre deux compacts non vides K et L par $\delta(K,L) = \sup\left(\sup_{x\in K} d(x,L) \,,\, \sup_{x\in L} d(x,K) \right)$, ou encore, la distance "sans nom" $\beta(K,L) = \sup_{x\in E} |d(x,L) - d(x,K)|$. Les distances ainsi définies sont en fait égales, et induisent la topologie exponentielle (ce qui n'est pas vrai pour les topologies analogues définies sur l'ensemble des fermés d'un espace polonais; pour une discussion de cette situation, voir Kuratowski [15] et Christensen [3])

1 je me suis aperçu, après rédaction, que ce théorème se trouve déjà dans Kunugui [14].

Cela dit, il existe une <u>bijection canonique</u> entre les parties H de E×F à coupes compactes et les applications γ de F dans $\underline{\underline{K}}(E)$, définie par l'égalité $\gamma(y) = H(y)$. Nous désignerons par γ_H (resp H_γ) l'application de F dans $\underline{\underline{K}}(E)$ (resp la partie de E×F à coupes compactes) ainsi associée à H (resp γ).

Si l'application γ est borélienne, l'ensemble $\gamma^{-1}(\{\emptyset\})$ est borélien. Comme il est égal au complémentaire de $\pi(H_\gamma)$ dans F, l'implication a) => b) du théorème suivant n'est nullement évidente.[1]

THEOREME 16. <u>Soit</u> H <u>une partie de</u> E×F <u>dont les coupes</u> H(y) <u>sont compactes pour tout</u> y. <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u>

a) H <u>est borélien</u>

b) <u>l'application</u> $\gamma = \gamma_H$ <u>est borélienne</u>

DEMONSTRATION. Montrons que b) entraine a). Posons $G = \{(x,y,K) : x\in K \text{ et } K = \gamma(y)\}$. On vérifie aisément que G est un borélien de $E\times F\times\underline{\underline{K}}(E)$, car $\{(x,K) : x\in K\}$ est fermé dans $E\times\underline{\underline{K}}(E)$ et $\{(y,K) : K = \gamma(y)\}$, qui est le graphe de γ, est borélien dans $F\times\underline{\underline{K}}(E)$. D'autre part, pour tout (x,y), la coupe G(x,y) a au plus un point : il résulte alors du théorème (S-L) que H, projection de G sur ExF, est borélien. L'implication a) => b) est évidente si H appartient à $(\underline{\underline{K}}(E)\times\underline{\underline{B}}(F))_s$: γ est alors une application borélienne étagée. D'autre part, on sait, d'après le théorème 15, que, dans le cas général, H est la limite d'une suite décroissante d'éléments de $(\underline{\underline{K}}(E)\times\underline{\underline{B}}(F))_s$. Comme une suite décroissante de compacts converge vers son intersection au sens de la topologie exponentielle, on en déduit que γ, limite de fonctions boréliennes étagées, est borélienne.

Il résulte de ce théorème que si H est un borélien à coupes compactes et si on compose l'application γ_H avec une application borélienne f de $\underline{\underline{K}}(E)$ dans lui-même, l'ensemble $H_{f\circ\gamma}$ (avec $\gamma = \gamma_H$) est un borélien de E×F.
Voici quelques exemples intéressants de fonctions f

a) f est l'application qui à K associe sa frontière

b) f est l'application qui à K associe son derivé (i.e. l'ensemble de ses points d'accumulation)

c) f est l'application qui à K associe son voisinage fermé d'ordre ε pour une distance d sur E compatible avec sa topologie.

De même, si f est une fonction borélienne de $\underline{\underline{K}}(E)$ dans un espace topologique, l'application $y \longrightarrow f(H(y))$ est borélienne : c'est le cas si f est par exemple la restriction à $\underline{\underline{K}}(E)$ d'une $\underline{\underline{K}}$-capacité (f est alors s.c.s.).

Nous verrons encore un exemple, très intéressant, au début du paragraphe suivant qui nous permettra d'affirmer que tout borélien à coupes compactes a une section par un graphe borélien.

---

1 Voir aussi l'article récent d'Ostaszewski [26].

Nous terminerons ce paragraphe en jetant un coup d'oeil sur ce qu'on peut dire de la fonction γ lorsque H est un analytique ou un coanalytique à coupes compactes. Soient donc H une partie de ExF à coupes compactes et $\gamma = \gamma_H$. On appelle sous-graphe fermé (resp ouvert) de γ l'ensemble $\{(y,K) : K \subset H(y)\}$ (resp $\{(y,K) : K \subset H(y)$ et $K \neq H(y)\}$ et sur-graphe fermé (resp ouvert) de γ l'ensemble $\{(y,K) : K \supset H(y)\}$ (resp $\{(y,K) : K \supset H(y)$ et $K \neq H(y)\}$. Contrairement au cas où γ est à valeur dans $\mathbb{R}$, il n'y a pas ici de relation de complémentarité entre sous-graphes et sur-graphes. Il est facile de voir que H est analytique si et seulement si le sous-graphe fermé de γ est analytique; alors les deux sous-graphes sont analytiques et les deux sur-graphes sont coanalytiques. De même, il est facile de voir que H est coanalytique si et seulement si le sous-graphe fermé de γ est coanalytique; mais on ne peut dire alors que le sous-graphe ouvert est coanalytique et les deux sur-graphes analytiques que si H est coanalytique "spécial". Si H est borélien, on montre facilement, à l'aide du théorème 16, que les sous-graphes et sur-graphes sont boréliens. Il serait donc naturel de dire qu'une fonction γ de F dans $\underline{\underline{K}}(E)$ est analytique (resp coanalytique) si l'ensemble H correspondant est analytique (resp coanalytique), soit encore si le sous-graphe fermé de γ est analytique (resp coanalytique), définition qui serait analogue à celle, classique, de fonction analytique (resp coanalytique) à valeur dans $\mathbb{R}$.

REMARQUE. Supposons que E soit égal à [0,1]. Les probabilistes sont alors très intéressés par les boréliens à coupes fermées pour la topologie droite (i.e. la topologie dont une base d'ouverts est constituée par les traces sur [0,1] des intervalles de la forme [u,v[). Aussi serait-il intéressant de savoir si la projection d'un borélien à coupes fermées pour la topologie droite est borélienne (les coupes sont des $\underline{\underline{G}}_\delta$ pour la topologie habituelle, mais ne sont pas en général des $\underline{\underline{K}}_\sigma$).

IV. SECTIONS PAR GRAPHES BORELIENS

Nous gardons les hypothèses, notations et conventions du paragraphe précédent.

Soit H une partie de ExF; nous dirons qu'une partie S de ExF est une section de H si S est inclus dans H et si on a $\pi(S) = \pi(H)$. Nous nous intéressons aux sections qui sont des graphes (nous dirons sections par des graphes, etc) et, plus particulierement des graphes boréliens. Il résulte immédiatement de l'axiome de choix que toute partie de ExF admet une section par un graphe, mais on n'a alors aucun contrôle sur la"mesurabilité"de ce graphe. Un théorème - très difficile - de Kondô [13] assure que tout coanalytique de ExF (et, en particulier, tout borélien)

admet une section par un graphe coanalytique. Mais ce résultat n'est pas satisfaisant pour les probabilistes[1] car, sous les axiomes usuels de la théorie des ensembles, on ne peut montrer qu'un tel graphe est toujours le graphe d'une fonction universellement mesurable.[2] J'ai trouvé, dans le livre [11] d'Hoffmann-Jørgensen, un joli théorème de section, avec une démonstration simple, qui semble peu connu et qu'Hoffmann-Jørgensen a sans doute découvert tout seul.[3]

Mais ce théorème, que nous allons énoncer maintenant, se trouve dans l'article russe [1], où il est attribué à Jankov (1941) : pour toute partie analytique H de ExF, il existe une section par un graphe G telle que l'application correspondante de $\pi(G)$ dans E soit mesurable lorsque E est muni de la tribu borélienne et $\pi(G)$ de la tribu engendrée par ses parties analytiques. Si H est borélien, on peut supposer de plus que le graphe G est coanalytique. Une telle application est universellement mesurable puisque tout analytique est universellement mesurable.

Revenons maintenant aux sections par des graphes boréliens : étant donné le théorème (S-L), une condition nécessaire pour qu'une partie H de ExF ait une section par un graphe borélien est que $\pi(H)$ soit borélien. Par conséquent, en général, on n'a pas de telle section, même si H est borélien. Nous allons d'abord montrer que tout borélien à coupes compactes a une section par un graphe borélien. Ce sera un corollaire immédiat du théorème 16 et du théorème suivant

THEOREME 17. Il existe une application borélienne f de $\underline{\underline{K}}(E)-\{\emptyset\}$ dans E telle que l'on ait $f(K)\in K$ pour tout compact non vide K de E.

DEMONSTRATION. Lorsque E = [0,1], il suffit de poser f(K) = inf K (ou sup K). Dans le cas général, plongeons E dans le cube $[0,1]^{\mathbb{N}}$ et munissons $[0,1]^{\mathbb{N}}$ de l'ordre lexicographique : toute partie fermée non vide a alors un plus petit élément. Pour tout compact non vide K de E, prenons pour f(K) le plus petit élément de K : nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'application f ainsi définie est borélienne.

COROLLAIRE. Soit H une partie borélienne de ExF telle que H(y) soit compact pour tout y. Alors H a une section par un graphe borélien (et, si E = [0,1], le "début" des probabilistes définit une telle section).

---

1 Les probabilistes utilisent un théorème de section des boréliens par un graphe borélien "à un ensemble de mesure nulle près". Voir [5].

2 Un tel graphe peut ne pas être mesurable si on admet l'axiome de constructibilité de Godel, mais est toujours mesurable si on admet l'axiome de détermination projective. Voir l'exposé "Jeux infinis et temps d'arrêt".

3 Hoffmann-Jørgensen m'a appris qu'il avait trouvé ce théorème dans le livre russe -traduit en anglais- "Normed Rings" de Naimark. D'autre part, en 1960, Sion [27] en a donné une version, dans un cadre plus général, avec une autre démonstration.

Nous allons voir bientôt qu'un borélien de E×F a une section par un graphe borélien dès qu'il a une section par un analytique à coupes compactes. Pour démontrer cela, nous aurons besoin de la classe spéciale de coanalytiques annoncée plus haut.

DEFINITION 4. Soit H une partie coanalytique de E×F. Nous dirons que H est spéciale si la projection de $H\cap(U\times F)$ sur F est coanalytique pour tout ouvert U de E.

Comme tout ouvert est un $\underline{\underline{K}}_\sigma$ et que π commute avec les réunions, il suffit évidemment de vérifier que $\pi(H\cap(K\times F))$ est coanalytique pour tout compact K de E (mais cette condition n'est sans doute pas nécessaire).

THEOREME 18. Soit H une partie de E×F. Les assertions suivantes sont équivalentes

a) H est coanalytique spécial, et H(y) est compact pour tout y

b) H appartient à $(\underline{\underline{K}}(E)\times\underline{\underline{CA}}(F))_{s\delta}$

En particulier, tout borélien de E×F à coupes compactes est coanalytique spécial.

DEMONSTRATION. L'implication b) => a) résulte de la remarque suivant la définition et du lemme suivant le th. 13. Montrons que a) entraine b). Soit (U_n) une base dénombrable d'ouverts de la topologie de E et posons, pour tout n, $A_n = \{y : H^c(y) \text{ contient } U_n\}$. L'ensemble A_n est le complémentaire de $\pi(H\cap(U_n\times F))$, et donc est analytique, H étant spécial. On a $H^c = \bigcup_\pi(U_n\times A_n)$, d'où b) par passage au complémentaire. Enfin, un borélien à coupes compactes est spécial d'après le théorème 14 (ou 13).

Voici le théorème de section par un graphe borélien. L'implication b) => d) est due à Čegolkov [1] et Čoban [4], qui a rectifié une erreur de Čegolkov et a introduit, en précisant une définition de Čegolkov, les coanalytiques spéciaux à coupes compactes sous le nom de "coanalytiques normaux", ce que j'ai trouvé choquant puisque c'est plutôt l'exception que la règle.

THEOREME 19. Soit H une partie borélienne (ou, plus généralement, coanalytique) de E×F. Les assertions suivantes sont équivalentes

a) H a une section par une partie analytique A à coupes compactes

b) H a une section par une partie coanalytique C spéciale à coupes compactes

(si H est seulement coanalytique, il faut ajouter que $\pi(H)$ est analytique)

c) H a une section par une partie borélienne B à coupes compactes

d) H a une section par un graphe borélien

DEMONSTRATION. Il est clair que l'on a d) => c) => a) et d) => c) => b); l'implication c) => d) résulte du corollaire du théorème 17. Nous allons montrer que a) => b) => c), ce qui achèvera la démonstration du théorème. Supposons que a) soit vérifiée. D'après le théorème 12, l'ensemble A^c a une représentation de la forme $A^c = \bigcup_\pi(U_n\times C_n)$, $U_n\in\underline{\underline{G}}(E)$, $C_n\in\underline{\underline{CA}}(F)$. Comme A^c contient H^c, qui est analytique, il existe, d'après le corollaire du théorème 11, une suite (D_n) de parties ... (suite page suivante)

analytiques de $E\times F$ telle que D_n soit contenu dans $U_n\times C_n$ pour tout n et que $\bigcup D_n$ contienne H^c. Posons, pour tout n, $A_n = \pi(D_n)$: A_n est analytique et $U_n\times A_n$ est compris entre D_n et $U_n\times C_n$. Donc $D = \bigcup(U_n\times A_n)$ contient H^c et est contenu dans A^c. Mais alors, $C = D^c$ est un coanalytique spécial à coupes compactes et est une section de H, et $\pi(H)$, égal à $\pi(A)$ est analytique. Supposons maintenant que b) soit vérifiée. Comme $\pi(H)$ est analytique et $\pi(C)$ coanalytique, $\pi(H) = \pi(C)$ est borélien. D'après le théorème 18, C est l'intersection d'une suite (C_n) d'éléments de $(\underline{\underline{K}}(E)\times\underline{\underline{CA}}(F))_s$, que l'on peut supposer décroissante. D'autre part, quitte à remplacer chaque C_n par $C_n\cap(E\times\pi(H))$, on peut supposer que $\pi(C_n)$ est contenu dans $\pi(H)$. Nous allons d'abord construire, pour chaque n, une section de C_n par un borélien B_n à coupes compactes. L'ensemble C_n a une représentation de la forme

$$C_n = \bigcup_{i=1}^{m_n}(K_i^n\times C_i^n),\ K_i^n\in\underline{\underline{K}}(E),\ C_i^n\in\underline{\underline{CA}}(F)$$

et $\pi(H) = \pi(C_n)$ est égal à la réunion des C_i^n, $i = 1,\dots,m_n$. D'après le corollaire du théorème 11, il existe des boréliens B_i^n, $i = 1,\dots,m_n$, tels que C_i^n contienne B_i^n pour tout i et que $\pi(H)$ soit égal à la réunion des B_i^n, $i = 1,\dots,m_n$: il suffit alors de poser $B_n = \bigcup_{i=1}^{m_n}(K_i^n\times B_i^n)$. Pour tout n, désignons maintenant par D_n la partie de $E\times F$ dont la coupe $D_n(y)$ est égale, pour tout y, à l'adhérence de $\bigcup_{m\geq n} B_m(y)$. Supposons démontré que l'ensemble D_n ainsi défini soit borélien : comme la suite (C_n) est décroissante, chaque D_n est une section de C_n par un borélien à coupes compactes et la suite (D_n) est évidemment décroissante. Il ne reste plus qu'à poser $B = \bigcap D_n$ pour obtenir une section de H par un borélien à coupes compactes. La démonstration du théorème sera donc achevée par la démonstration du lemme suivant

<u>Lemme</u>. Soit B un élément de $(\underline{\underline{K}}(E)\times\underline{\underline{B}}(F))_\sigma$ et soit D la partie de $E\times F$ dont la coupe $D(y)$ est égale, pour chaque y, à l'adhérence de la coupe $B(y)$ de B. Alors D est borélien dans $E\times F$.

<u>Démonstration</u>. Soit d une distance sur E compatible avec sa topologie, et, pour tout $\varepsilon > 0$, soit (U_n^ε) une base dénombrable de la topologie de E constituée par des boules ouvertes de rayon $< \varepsilon$. Posons, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$B^\varepsilon = \bigcup_n(U_n^\varepsilon\times\pi[(U_n^\varepsilon\times F)\cap B])$$

Comme B est réunion dénombrable d'éléments de $\underline{\underline{K}}(E)\times\underline{\underline{B}}(F)$, et que π commute avec les réunions, il est facile de voir que $\pi[(U_n^\varepsilon\times F)\cap B]$ est borélien, pour tout n,ε. Donc B^ε est borélien, ainsi que D qui est égal à l'intersection des $B^{1/n}$.

V. LE DEUXIEME THEOREME DE SEPARATION

Dans tout ce paragraphe, on désigne par E un espace métrisable séparable. Nous allons d'abord énoncer plusieurs versions de ce théorème et les comparer.

Le premier, historiquement, est le deuxième principe de Lusin : si A_1 et A_2 sont des parties analytiques de E, on peut séparer $A_1 - A_2$ et $A_2 - A_1$ par deux parties coanalytiques disjointes. En fait, quitte à regarder les choses dans $E' = E - (A_1 \cap A_2)$, cet énoncé est équivalent au suivant : si A'_1 et A'_2 sont des parties analytiques disjointes de E', on peut les séparer par des parties coanalytiques disjointes de E'. Il résultera du théorème de Novikov (th. 20) qu'on peut remplacer "coanalytiques" par "bianalytiques" dans cet énoncé, ce qui l'améliore notablement et lui donne une forme vraiment analogue à celle du premier théorème de séparation. Mais Mokobodzki m'a indiqué une méthode très astucieuse pour dériver simplement l'énoncé amélioré de l'énoncé initial. Voici cette méthode, qui peut s'appliquer à d'autres situations. Soient A et A' deux analytiques disjoints dans E. D'après le deuxième principe, il existe deux coanalytiques disjoints C_2 et C' tels que $A \subset C_2$ et $A' \subset C'$. Posons $C_1 = A'^c$ et $A_1 = C'^c$. On peut alors reformuler ce qui précède sous la forme d'un lemme d'interpolation : si on a $A \subset C_1$, avec $A \in \underline{\underline{A}}(E)$, $C_1 \in \underline{\underline{CA}}(E)$, il existe A_1 et C_2 tels qu'on ait $A \subset C_2 \subset A_1 \subset C_1$ avec $A_1 \in \underline{\underline{A}}(E)$, $C_2 \in \underline{\underline{CA}}(E)$. On peut alors recommencer à interpoler entre A et C_2 et construire, par récurrence, une suite (A_n) d'éléments de $\underline{\underline{A}}(E)$ et une suite (C_n) d'éléments de $\underline{\underline{CA}}(E)$ telles que

$$A \subset \ldots \subset C_{n+1} \subset A_n \subset C_n \subset \ldots \subset A_1 \subset C_1$$

Mais alors $B = \bigcap_n A_n = \bigcap_n C_n$ est bianalytique et on a $A \subset B \subset C_1$, et donc A et A' sont séparés par les ensembles bianalytiques disjoints B et B^c.

L'énoncé amélioré du deuxième principe est encore équivalent au suivant (poser $A = A_1 \cup A_2$ où A_1 et A_2 sont disjoints et bianalytiques dans A) : soit A une partie analytique de E. La tribu $\underline{\underline{BA}}(A)$ est alors la tribu trace de $\underline{\underline{BA}}(E)$ sur A. Il est aussi équivalent, comme nous le verrons un peu plus loin, au théorème de réduction de Kuratowski pour deux ensembles coanalytiques.

Voici le théorème de séparation de Novikov [18] (cf théorème 11) :

THEOREME 20. Soit (E_n) une suite (finie ou infinie) de parties analytiques d'un espace métrisable séparable F. Si on a $\bigcap_n E_n = \emptyset$, alors il existe une suite (B_n) de parties bianalytiques de F telle que B_n contienne E_n pour tout n et qu'on ait $\bigcap_n B_n = \emptyset$.

Nous allons voir que cet énoncé est équivalent au suivant, que nous établirons plus loin en suivant la démonstration de C.A. Rogers [22]

THEOREME 21. Soit (A_n) une suite de parties analytiques d'un espace métrisable séparable E. Il existe alors une suite (A'_n) de parties analytiques de E vérifiant les conditions suivantes

a) A'_n contient A_n pour tout n
b) on a $A'_m \cup A'_n = E$ pour tout couple m,n tel que $m \neq n$
c) on a $\bigcap_n A'_n = \bigcap_n A_n$

Par passage au complémentaire, on obtient un énoncé plus clair, appelé théorème de réduction de Kuratowski [15], dont celui-ci a sans doute éxagéré l'originalité par rapport à l'énoncé de Novikov. Il reste cependant que c'est le "bon" énoncé général.

THEOREME 22. Soit (C_n) une suites de parties coanalytiques d'un espace métrisable séparable E. Il existe alors une suite (C'_n) de parties coanalytiques de E vérifiant les conditions suivantes

a) C'_n est contenu dans C_n pour tout n
b) les C'_n sont deux à deux disjoints
c) on a $\bigcup_n C'_n = \bigcup_n C_n$

DEMONSTRATION DE L'EQUIVALENCE DES ENONCES 20, 21 ET 21 AFFAIBLI :
Nous désignerons par (21 bis) l'énoncé 21 modifié, apparemment plus faible, où E est supposé métrisable compact.

(20) => (21) : Soit (A_n) une suite de parties analytiques de l'espace métrisable séparable E, d'intersection A. Les ensembles $E_n = A_n - A$ forment une suite de parties analytiques de l'espace métrisable séparable $F = E - A$, d'intersection vide. Soit (B_n) une suite de parties bianalytiques de F, d'intersection vide, telle que B_n contienne E_n pour tout n. Les ensembles $A'_1 = A \cup B_1$, $A'_2 = A \cup B_2 \cup (F - B_1), \ldots$, $A'_n = A \cup B_n \cup (F - \bigcap_{m<n} B_m), \ldots$ forment alors une suite de parties analytiques de E vérifiant les conditions de l'énoncé 21.

(21 bis) => (20) : Soit (E_n) une suite de parties analytiques d'un espace métrisable séparable F, d'intersection vide. Plongeons F dans un espace métrisable compact E et, pour tout n, soit A_n une partie analytique de E telle que l'on ait $E_n = A_n \cap F$. Soit alors (A'_n) une suite de parties analytiques de E vérifiant les conditions de l'énoncé 21 et posons $B_n = A'_n \cap F$ pour tout n : B_n contient E_n et on a $\bigcap_n B_n = \emptyset$. D'autre part, B_n est analytique dans F et il ne reste plus qu'à montrer que $F - B_n$ est analytique dans F. Et cela résulte simplement du fait que les ensembles $F - B_n$, coanalytiques dans F, sont deux à deux disjoints et de réunion égale à F.

Nous passons maintenant à la démonstration de l'énoncé 21, démonstration que nous découperons par des rubriques pour en faciliter la lecture.

1. Schémas de Souslin

Nous désignerons par S l'ensemble des suites finies d'entiers naturels (y compris la suite vide $\emptyset$) et par Σ l'ensemble des suites infinies. La notation $s<t$, où s est élément de S et t est élément de S ou de Σ, signifie que t "commence" par s et en est distinct (exemple : $s = 3,1,4 \quad t = 3,1,4,1,6$). Pour tout s élément de S ou de Σ,

on désigne par $l(s)$ la "longueur" de la suite s et, pour tout $n \leq l(s)$, par $s|n$ la suite finie de longueur n commençant s.

Soit E un espace métrisable séparable, ou, plus généralement, $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace pavé (rappelons que nous avons pris $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{B}}(E)$ dans le cas topologique). Un <u>schéma de Souslin régulier sur</u> $(E,\underline{\underline{E}}_d)$ (nous dirons, plus brièvement, un schéma de Souslin) est une application $s \to E_s$ de S dans $\underline{\underline{E}}_d \cup \{E\}$ vérifiant les conditions suivantes

a) $E_\emptyset = E$, $E_s \in \underline{\underline{E}}_d$ pour tout $s \neq \emptyset$

b) on a $E_s \supset E_t$ si on a $s < t$

On appelle <u>noyau</u> du schéma de Souslin $s \to E_s$ l'ensemble

$$A = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \bigcap_{s<\sigma} E_s = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \bigcap_n E_{\sigma|n}$$

On sait qu'un ensemble A est $\underline{\underline{E}}$-analytique si et seulement s'il est le noyau d'un schéma de Souslin. Nous n'aurons besoin pour la suite que de la condition nécessaire, qui est très facile à démontrer :

LEMME. <u>Soit</u> $(E,\underline{\underline{E}})$ <u>un espace pavé, où</u> $\underline{\underline{E}}$ <u>est stable pour les intersections finies. Tout ensemble</u> $\underline{\underline{E}}$<u>-analytique est le noyau d'un schéma de Souslin sur</u> $(E,\underline{\underline{E}})$.

DEMONSTRATION. Soit A un ensemble $\underline{\underline{E}}$-analytique. Par définition, il existe un espace métrisable compact auxiliaire K et un élément B de $(\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{K}})_{\sigma\delta}$ tels que A soit égal à la projection $\pi(B)$ de B sur E. L'ensemble B a une représentation de la forme $B = \bigcap_m \bigcup_n B_n^m$, où les B_n^m appartiennent à $\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{K}}$. En tenant compte de la distributivité entre réunion et intersection, on a alors $B = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} (B^1_{\sigma_1} \cap B^2_{\sigma_2} \cap \ldots \cap B^k_{\sigma_k} \cap \ldots)$ où $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \ldots$ désignent les termes successifs de la suite infinie σ. Posons, pour toute suite finie non vide s, $B_s = B^1_{s_1} \cap B^2_{s_2} \cap \ldots \cap B^{l(s)}_{s_{l(s)}}$: pour tout $\sigma \in \Sigma$, les ensembles $B_{\sigma|n}$, $n \in \mathbb{N}$, forment une suite décroissante, et ont leurs coupes compactes dans K. On a donc, en désignant par π la projection de $E \times K$ sur E,

$$A = \pi(B) = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \bigcap_{s<\sigma} \pi(B_s) = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \bigcap_n \pi(B_{\sigma|n})$$

et A est alors le noyau du schéma de Souslin $s \to \pi(B_s)$.

2. <u>L'indice de Lusin-Sierpinski</u>

Désormais, E est un espace métrisable séparable, A une partie analytique de E et $s \to A_s$ un schéma de Souslin sur E, de noyau égal à A.

Nous allons maintenant paraphraser l'article de Rogers, en le condensant, ce qui nous obligera à omettre une foule de remarques intéressantes sur l'indice pour lesquelles nous engageons vivement le lecteur à se reporter à l'article original.

Suivant le mot de Rogers, l'indice $i(.)$ sera une application de E dans l'ensemble des ordinaux <u>qui mesurera la difficulté qu'on a à prouver que</u> x <u>n'appartient pas à</u> A.

L'indice $i(x)$ sera un élément de l'ensemble I des ordinaux dénombrables si x n'appartient pas à A, et sera égal à Ω (i.e. le plus petit ordinal non dénombrable) si x appartient à A. Par ailleurs, l'indice dépendra non seulement de A, mais de la "représentation combinatoire" définissant A, ici le schéma de Souslin (A_s). En particulier, la théorie de l'indice n'est nullement triviale si A est l'ensemble vide; au contraire, on peut dire que c'est le cas "crucial" .

Voici d'abord l'interprétation graphique de la définition de l'indice, d'après R.O. Davies. Considérons le graphe suivant : les sommets sont les points de S; deux sommets s et t, dans cet ordre, sont joints par un arc si et seulement si l'on a $s<t$ et $l(t) = l(s)+1$. On obtient un arbre, que nous noterons encore S. Cela dit, fixons $x \in E$ et regardons le sous-arbre $A(x)$ de S, défini par l'ensemble de ses sommets : on a $s \in A(x)$ si et seulement si on a $x \in A_s$ (en particulier, la suite $\emptyset$ est toujours un sommet de $A(x)$, et ce peut être le seul). Les faits suivants sont clairs :

a) si x appartient à A, il existe un chemin de longueur infini dans $A(x)$ issu de $\emptyset$

b) si x n'appartient pas à A, tout chemin dans $A(x)$ issu de $\emptyset$ est de longueur finie

N'empêche que, dans le cas b), on peut avoir énormément de ramifications et l'indice va mesurer, en quelque sorte, la complexité de ces ramifications.

Nous dirons qu'un sommet d'un arbre est pendant s'il n'est extrémité initiale d'aucun arc . Ainsi , s est pendant dans $A(x)$ si et seulement si on a $x \in A_s$, mais $x \notin A_t$ pour tout $t > s$.

Définissons, pour x fixé, une suite transfinie $(A^i(x))_{i \in I}$ de sous-arbres de S (analogue à la suite transfinie des dérivés successifs d'un fermé), par leurs sommets, de la manière suivante :

$$A^0(x) = A(x)$$

si $A^i(x)$ est défini,

$$A^{i+1}(x) = A^i(x) \text{ \underline{moins} les sommets pendants de } A^i(x)$$

si j est un ordinal de 2ème espèce, et si $A^i(x)$ est défini pour tout $i<j$,

$$A^j(x) = \bigcap_{i<j} A^i(x)$$

Comme S est dénombrable et que la suite transfinie $(A^i(x))$ est décroissante, celle-ci est stationnaire à partir d'un certain ordinal dénombrable $j(x)$ (que Rogers appelle l'indice de Hausdorff). Il est clair, intuitivement, que $A^{j(x)}(x)$ est vide si et seulement si x n'appartient pas à A. L'indice de Lusin-Sierpinski est alors égal à $j(x)$ si $A^{j(x)}(x)$ est vide et à Ω si $A^{j(x)}(x)$ n'est pas vide : autrement dit, on a $i(x) = \inf \{i \in I : A^i(x) = \emptyset\}$, avec la convention que $\inf \emptyset = \Omega$ dans I.

Nous allons voir les choses maintenant plus analytiquement, en regardant les chemins.

Nous allons donner une autre définition de la suite transfinie $(A^i(x))$ (équivalente à la première, c'est facile à voir); c'est celle que nous utiliserons par la suite. Nous poserons

$$A^0(x) = A(x) = \{s \in S : x \in A_s\}$$

si $A^i(x)$ est défini,

$$A^{i+1}(x) = \{s \in S : \exists t \in A^i(x) \text{ tel que } s < t\}$$

si j est un ordinal de 2ème espèce et si $A^i(x)$ est défini pour tout $i < j$,

$$A^j(x) = \bigcap_{i<j} A^i(x)$$

Il est clair que la suite transfinie ainsi déterminée est décroissante. Nous poserons

$$i(x) = \inf \{i \in I : A^i(x) = \emptyset\}^1$$

avec la convention que $\inf \emptyset = \Omega$ dans I et nous dirons que $i(x)$ est <u>l'indice de Lusin-Sierpinski du point</u> x.

PROPOSITION 1. <u>On a</u> $i(x) = \Omega$ <u>si et seulement si on a</u> $x \in A$.

DEMONSTRATION. La condition suffisante est à peu près triviale. Réciproquement, supposons que $A^i(x)$ soit non vide pour tout $i \in I$, soit encore que $A^\Omega(x) = \bigcap_{i<\Omega} A^i(x)$ soit non vide (puisque chacun des A^i contient alors au moins la suite $\emptyset$). Soit alors s un élément de $A^\Omega(x)$: je dis qu'il existe $t \in A^\Omega(x)$ tel que $s < t$. En effet, sinon, il existerait, pour tout $t > s$, un ordinal dénombrable $j(t)$ tel que t n'appartienne pas à $A^{j(t)}(x)$, et, comme l'ensemble des $t > s$ est dénombrable, il existerait un ordinal dénombrable j tel que l'on ait $t \notin A^j(x)$ pour tout $t > s$, et donc tel que s n'appartienne pas à $A^{j+1}(x)$. Il est alors clair que l'on a $x \in A$ si on a $i(x) = \Omega$.

PROPOSITION 2. <u>Si on a</u> $i(x) < \Omega$, <u>alors</u> $i(x)$ <u>est un ordinal de première espèce</u>.

DEMONSTRATION. En effet, la suite $\emptyset$ appartient alors à tous les $A^j(x)$, pour $j < i(x)$.

La proposition suivante montre en particulier que $i(x)$, pour $x \notin A$, peut prendre des valeurs à peu près arbitraires parmi les ordinaux de 1ère espèce. Cette proposition, dont l'idée, dans un cadre différent, remonte à Novikov, sera essentielle dans la démonstration du deuxième théorème de séparation : plus précisément, c'est elle qui permet d'améliorer le "deuxième principe" de Lusin dans la direction indiquée plus haut.

PROPOSITION 3. <u>Pour tout entier</u> $k \geq 1$, <u>il existe un schéma de Souslin</u> $s \to A'_s$, <u>de noyau égal à</u> A, <u>tel que l'indice</u> $i'(.)$ <u>associé soit relié à l'ancien indice</u> $i(.)$ <u>associé à</u> $s \to A_s$ <u>par la formule, vraie pour tout</u> x,

$$i'(x) = \inf (\Omega , \inf\{ j \in I : j > i(x) \text{ et } j \text{ est de 2e espèce}\} + k)$$

<u>soit encore, si</u> ω <u>est le premier ordinal de</u> 2ème <u>espèce</u>,

$$i'(x) = \inf (\Omega , i(x) + \omega + k)$$

1 "$\emptyset$" désigne l'ensemble vide et non le mot vide !

DEMONSTRATION. Quelques notations : n est un entier variable; on désigne par (K) (resp (N)) la suite finie 1,1,1,...,1 , de longueur $k-1$ (resp $n-1$); pour s et $s' \in S$, on note s,s' la suite finie dont les l(s) premiers termes sont ceux de s et les l(s') suivants ceux de s'; si on a posé $A'_s = \emptyset$ pour une suite s, il est implicitement entendu que l'on a alors $A'_{s,s'} = \emptyset$ pour tout s'. Voici alors comment on définit le schéma (A'_s) :

$$\begin{cases} A'_{\emptyset} = E,\ A'_1 = E,\ A'_{1,1} = E,\ \dots,\ A'_{(K)} = E \\ A'_s = \emptyset \text{ pour } s \in S \text{ de longueur} < k, \text{ contenant un terme} \neq 1 \end{cases}$$

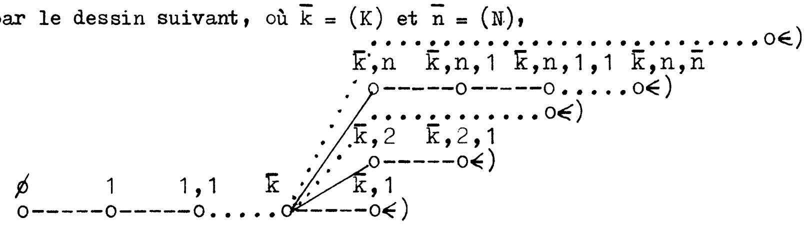
$$A'_{(K),1} = E,\ A'_{(K),s} = A_s \text{ pour tout } s \in S$$

....

$$\begin{cases} A'_{(K),n} = E,\ A'_{(K),n,1} = E,\ A'_{(K),n,1,1} = E,\ \dots,\ A'_{(K),n,(N)} = E \\ A'_{(K),n,s} = \emptyset \text{ pour } s \in S \text{ de longueur} < n, \text{ contenant un terme} \neq 1 \\ A'_{(K),n,(N),s} = A_s \text{ pour tout } s \in S \end{cases}$$

....

Pour x fixé, désignons schématiquement par o<) l'arbre A(x); on peut alors représenter A'(x) par le dessin suivant, où $\bar{k} = (K)$ et $\bar{n} = (N)$,



On en déduit aisément que le noyau de (A'_s) est égal à A, et que l'indice i' vérifie la formule de l'énoncé.

REMARQUE. La théorie de l'indice présentée ici permet de démontrer le deuxième théorème de séparation à l'aide des schémas de Souslin, alors que les démonstrations connues jusqu'à l'article de Rogers, utilisaient les cribles de Lusin. Le lecteur qui connait bien la théorie des ensembles analytiques, se convaincra sans doute rapidement que l'on peut aussi faire, à l'aide de cet indice, la théorie des constituants faite jusqu'ici, aussi, à l'aide des cribles de Lusin. Nous n'avons pas eu le courage de le faire ici. On pourra cependant se reporter à un exposé de Meyer et moi, dans ce volume, où l'on a traduit la démonstration de Rogers dans un langage "canonique", qui permet de retrouver ce que nous avons exposé ici et de faire aussi, d'une manière très agréable, la théorie des constituants. Voir aussi la remarque suivant la démonstration du théorème 24.

3. Comparaison des indices

On se donne maintenant un deuxième ensemble analytique B, noyau d'un schéma de Souslin (B_s) auquel on associe, pour tout $x \in E$, l'arbre $B(x)$, la suite transfinie $(B^i(x))$, etc On notera désormais i_A l'indice de Lusin-Sierpinski associé à (A_s), et i_B celui associé à (B_s).

Nous allons démontrer le théorème fondamental suivant

THÉORÈME 23. L'ensemble $\{x \in E : i_A(x) \leqq i_B(x)\}$ est analytique.

Voyons tout de suite l'intérêt de ce théorème : les ensembles coanalytiques $A' = \{x : i_B(x) < i_A(x)\}$ et $B' = \{x : i_A(x) < i_B(x)\}$ sont disjoints; A' contient $A-B$ et B' contient $B-A$. On a ainsi démontré le deuxième principe de Lusin.

Pour démontrer ce théorème, nous allons d'abord établir un critère pour savoir si on a $i_A(x) \leqq i_B(x)$ en $x \in E$. Nous aurons besoin pour cela d'une notion nouvelle

DEFINITION 5. Une application f de S dans S est un pliage si elle satisfait aux conditions suivantes

a) f conserve la longueur : on a $l(f(s)) = l(s)$ pour tout $s \in S$

b) f est compatible avec la structure d'ordre : on a $f(s) < f(t)$ pour tout couple (s,t) tel que $s < t$.

La notion de pliage est une bonne notion d'homomorphisme de l'arbre S. La condition b) s'écrit encore : pour tout s,t, on a l'implication $(s|n = t|n) \Rightarrow (f(s)|n = f(t)|n)$ pour tout $n \leqq \inf(l(s), l(t))$.

REMARQUE. Le mot pliage est l'une de mes contributions personnelles à la théorie de l'indice, l'arbre S m'évoquant irrésistiblement les baleines d'un parapluie.

THEOREME 24. Soit x un élément de E. On a $i_A(x) \leqq i_B(x)$ si et seulement s'il existe un pliage f tel que $f(s)$ appartienne à $B(x)$ pour tout $s \in A(x)$.

DEMONSTRATION. La condition suffisante est à peu près triviale. Nous allons établir la condition nécessaire. Nous affinerons d'abord un peu la définition de l'indice. Pour tout $s \in S$, nous poserons

$$i_A(s;x) = \inf \{i \in I : s \notin A^i(x)\}$$

(avec toujours la convention que $\inf \emptyset = \Omega$). On a évidemment $i_A(x) = i_A(\emptyset;x)$ et $s \in A(x)$ si et seulement si $i_A(s;x) \geqq 1$. Il est clair, d'autre part, que $i_A(s;x)$ est, pour tout s, un ordinal dénombrable de 1ère espèce s'il n'est pas égal à Ω (cf la proposition 2). On définit de même $i_B(s;x)$ pour tout $s \in S$. Si l'on a $i_B(x) = \Omega$, il existe, d'après la proposition 1, une suite infinie σ telle que $\sigma|n$ appartienne à $B(x)$ pour tout n : il suffit alors de poser $f(s) = \sigma|l(s)$. Supposons maintenant que l'on ait $i_A(x) \leq i_B(x) < \Omega$. Nous allons construire, par récurrence sur la longueur des suites, un pliage f tel que l'on ait $i_A(s;x) \leq i_B(f(s);x)$ pour tout $s \in S$, ce qui achèvera la démonstration de la nécessité. On doit évidemment poser $f(\emptyset) = \emptyset$. Supposons construit $f(s)$ pour les suites s de longueur $\leq n$, de sorte que l'on ait $i_A(s;x) \leq i_B(f(s);x)$. Soient s' une suite de longueur n+1 et $s = s'|n$. Tout revient à montrer qu'il existe t', de longueur n+1, telle que l'on ait $t'|n = f(s)$ et $i_A(s';x) \leq i_B(t';x)$. Or, $i = i_A(s';x)$ étant un ordinal dénombrable de 1ère espèce, la suite s' appartient à $A^{i-1}(x)$, et donc s appartient à $A^i(x)$. Comme on a $i_A(s;x) \leq i_B(f(s);x)$, f(s) appartient à $B^i(x)$ et donc il existe $t' > f(s)$ appartenant à $B^{i-1}(x)$: a fortiori, il existe un tel t' de longueur n+1.

REMARQUE. En prenant les notations familières aux probabilistes, désignons par Ω l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$(qu'on ne confondra pas avec un ordinal !), par X_n les applications coordonnées, par $(\underline{\underline{F}}_n)$ la famille croissante de tribus associée. Il y a alors une bijection canonique d'une part entre **les sous-arbres de S et les temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_n)$ et** d'autre part entre **les pliages et les applications f de Ω dans Ω telles que $T \circ f$ soit un t.d'a. (= temps d'arrêt) pour tout t.d'a. T. Le théorème 24 peut alors s'interpréter ainsi : étant donnés deux t.d'a. S et T, il existe toujours un pliage f tel** que **l'on ait $S \circ f \leq T$ ou $T \circ f \leq S$. C'est ce point de vue qui est développé dans** l'exposé **de Meyer et moi** évoqué plus haut.

DEMONSTRATION DU THEOREME 23. Munissons S de la topologie discrète : il est facile de voir que l'ensemble F des pliages est un fermé de l'espace polonais S^S. D'après le théorème 24, on a l'équivalence logique

$$i_A(x) \leq i_B(x) \iff \exists f \in F \ \forall s \in S \ (x \in A_s \Rightarrow x \in B_{f(s)})$$

ce qui signifie que l'ensemble $\{x \in E : i_A(x) \leq i_B(x)\}$ est la projection sur E de

$$H = \{(x,f) \in E \times S^S : f \in F \text{ et } \forall s \in S \ x \notin A_s \text{ ou } x \in B_{f(s)}\}$$

Comme H est l'intersection, dénombrable, de l'ensemble $\{(x,f) : f \in F\}$ et des ensembles

$$H_s = \{(x,f) \in E \times S^S : x \notin A_s \text{ ou } x \in B_{f(s)}\}$$

il suffit de montrer que chacun des H_s est borélien. Ce qui résulte du fait que l'indicatrice d'un H_s est séparément borélienne en x et continue en f.

La démonstration que nous venons de donner est un peu plus simple que celle de Rogers, qui construit un schéma de Souslin, de noyau égal à $\{x : i_A(x) \leq i_B(x)\}$.

Nous terminons ce paragraphe par la démonstration du théorème 21, que nous allons reformuler pour simplifier la lecture, et celle d'une dernière version du deuxième théorème de séparation, qui, quoique plus faible que celle du théorème 21, nous sera très utile par la suite.

4. Le deuxième théorème de séparation

THEOREME. Soit (A_n) une suite de parties analytiques de E. Il existe une suite (A'_n) de parties analytiques de E vérifiant les conditions suivantes

a) A'_n contient A_n pour tout n

b) on a $A'_m \cup A'_n = E$ pour tout couple m,n tel que $m \neq n$

c) on a $\bigcap_n A'_n = \bigcap_n A_n$

DEMONSTRATION. D'après la proposition 3, il existe, pour chaque n, un schéma de Souslin, de noyau A_n, tel que l'indice i_n associé prenne comme valeurs Ω sur A_n et un ordinal de lère espèce sur A_n^c, variable, mais toujours égal au n-ième successeur d'un ordinal de 2ème espèce. On a alors, pour tout couple m,n tel que $m \neq n$,

$$\{x : i_m(x) \leqq i_n(x) < \Omega\} = \{x : i_m(x) < i_n(x) < \Omega\}$$

Cela dit, posons, pour tout entier n,

$$A'_n = \{x \in E : \exists m \neq n \ \ i_m(x) \leqq i_n(x)\}$$

Les ensembles A'_n sont analytiques d'après le théorème 23, et A'_n contient A_n pour tout n. Vérifions la condition b) : si x n'appartient pas à A'_n, alors on a $i_n(x) < i_m(x)$ pour tout $m \neq n$ et donc x appartient à A'_m pour tout $m \neq n$. Vérifions enfin la condition c) : si x n'appartient pas à $\bigcap_n A_n$, l'ensemble

$$\{i \in I : \exists m \ i = i_m(x)\} = \{i \in I : \exists m \ i = i_m(x) \text{ et } i_m(x) < \Omega\}$$

n'est pas vide et admet donc un plus petit élément $i_{n_o}(x)$. Mais alors, x n'appartient pas à A'_{n_o} et donc à $\bigcap_n A'_n$.

Le théorème suivant, dont on comparera l'énoncé à celui du théorème 21, ne me semble pas classique. Il permet cependant, comme nous verrons par la suite, de simplifier notablement les démonstrations des théorèmes "sur les coupes" faisant intervenir le deuxième théorème de séparation.

THEOREME 25. Soit $(A_n)_{n \leqq k}$ une suite finie de parties analytiques de E. Il existe une suite finie $(A'_n)_{n \leqq k}$ de parties analytiques de E vérifiant les conditions suivantes

a) A'_n contient A_n pour tout $n \leqq k$

b) on a $\bigcup_{n \leqq k} A'_n = E$

c) on a $A'_m \cap A'_n = A_m \cap A_n$ pour tout couple m,n ($\leqq k$) tel que $m \neq n$.

DEMONSTRATION. La notation i_n gardant la signification qu'elle avait dans la démonstration précédente, posons cette fois, pour tout $n \leqq k$,

$$A'_n = \{x \in E : \forall m \neq n \ \ i_m(x) \leqq i_n(x)\}$$

Les ensembles A'_n sont analytiques d'après le théorème 23, et A'_n contient A_n pour tout n. Vérifions la condition b) : si x n'appartient pas à $\bigcup A_n$, l'ensemble $\{i \in I : \exists m \ \ i = i_m(x)\}$ est fini, non vide et admet donc un plus grand élément $i_{n_o}(x)$. Mais alors, x appartient à A'_{n_o}. Vérifions la condition c) : si x n'appartient pas à $A_m \cap A_n$, avec $m \neq n$, on a $i_m(x) < \Omega$ ou $i_n(x) < \Omega$ et donc $i_m(x) \neq i_n(x)$. Par conséquent, x n'appartient pas à $A'_m \cap A'_n$.

REMARQUES. a) Pour une suite réduite à deux éléments, les énoncés 21 et 25 sont identiques. Par ailleurs, il est assez facile de voir que l'énoncé 21 entraine l'énoncé 25.

b) Je ne pense pas que l'énoncé 25 soit valide, en toute généralité, pour les suites infinies. Il l'est pour une suite infinie (A_n) décroissante (prendre $A'_1 = E$ et $A'_n = A_n$ pour $n > 1$), mais l'énoncé est alors trivial, ce qui n'est pas le cas de l'énoncé 21 !

VI. QUELQUES APPLICATIONS DU DEUXIEME THEOREME DE SEPARATION

Nous reprenons désormais, sauf mention du contraire, les notations et conventions des paragraphes III et IV. En particulier, E et F sont des espaces métrisables compacts.

Soit A une partie de $E \times F$. Nous dirons qu'une partie B de $E \times F$ est une extension de A si B contient A et si on a $A(y) = B(y)$ pour tout $y \in \pi(A)$. L'extension B de A sera dite complète si on a $\pi(B) = F$.

Voici l'application du théorème 25 qui va nous simplifier beaucoup la vie

THEOREME 26. Toute partie analytique A de $E \times F$, telle que $A(y)$ soit compact pour tout y, a une extension complète analytique B telle que $B(y)$ soit compact pour tout y.

DEMONSTRATION. Nous aurons besoin, ici et plus loin, du petit lemme classique suivant

Lemme : Soit H une partie analytique de $E \times F$. La partie L de $E \times F$ définie par $L(y) = \overline{H(y)}$ pour tout y, est encore analytique.

Démonstration. Nous recopions la démonstration d'un lemme antérieur. Soit d une distance sur E compatible avec sa topologie, et, pour tout $\varepsilon > 0$, soit (U_n^ε) une base dénombrable de la topologie de E constituée par des boules ouvertes de rayon $< \varepsilon$. Posons, pour tout $\varepsilon > 0$, $H^\varepsilon = \bigcup_n (U_n^\varepsilon \times \pi[(U_n^\varepsilon \times F) \cap H])$. Il est clair que H^ε est analytique, et $L = \bigcap_n H^{1/n}$ est aussi analytique.

Passons à la démonstration du théorème. D'après le théorème 12 (dont la démonstration, très simple, ne fait intervenir en aucune manière un théorème de séparation), l'ensemble A appartient à $(\underline{\underline{K}}(E) \times \underline{\underline{A}}(F))_{s\delta}$. Il est donc l'intersection d'une suite (A^n) d'éléments de $(\underline{\underline{K}}(E) \times \underline{\underline{A}}(F))_s$, que l'on peut supposer décroissante. Supposons construit, pour chaque n, une extension complète B^n de A^n en un analytique à coupes compactes. Posons alors, pour tout n, $C^n = \bigcup_{m \geq n} B^n$: les C^n sont analytiques et forment une suite décroissante. Comme (A^n) est décroissante et que les B^n sont des extensions des A^n, $C^n \cap (E \times \pi(A^n))$ est égal à A^n pour tout n : ainsi, C^n est une extension, complète et analytique, de A^n, et aussi D^n défini par $D^n(y) = \overline{C^n(y)}$ pour tout y. Comme chaque D^n est analytique à coupes compactes et que les D^n forment une suite décroissante, il ne reste plus qu'à poser $B = \bigcap_n D^n$. Nous sommes donc ramené à démontrer le théorème lorsque A appartient à $(\underline{\underline{K}}(E) \times \underline{\underline{A}}(F))_s$; A a alors une représentation de la forme $A = \bigcup_{n=1}^{k} (K_n \times A_n)$, $K_n \in \underline{\underline{K}}(E)$, $A_n \in \underline{\underline{A}}(F)$. Considérons alors une suite $A'_1, \dots, A'_k$ d'éléments de $\underline{\underline{A}}(F)$ associée à la suite $A_1, \dots, A_n$ par le théorème 25. L'ensemble $B = \bigcup_{n=1}^{k} (K_n \times A'_n)$ est alors une extension complète de A appartenant à $(\underline{\underline{K}}(E) \times \underline{\underline{A}}(F))_s$.

REMARQUE. D'après le théorème 13, il est clair qu'un borélien à coupes compactes a une extension complète en un borélien à coupes compactes. Par contre, il n'est pas vrai, en général, qu'un analytique à coupes compactes a une extension complète en un borélien à coupes compactes, même s'il est de la forme $(\{x_1\} \times A_1) \cup (\{x_2\} \times A_2)$, $x_1, x_2 \in E$ et $A_1, A_2 \in \underline{\underline{A}}(F)$. Cependant, <u>tout graphe analytique a une extension complète en un graphe borélien</u>. En effet, si G est un graphe analytique, l'application g de $\pi(G)$ dans E définie par G est borélienne d'après le premier théorème de séparation, et admet donc une extension borélienne h de F dans E (cf le lemme de la démonstration du théorème 8) : le graphe de h est alors une extension complète borélienne de G. J'étais tout fier d'avoir trouvé cela il y a deux ans (cf [7]), mais ce résultat est consigné dans l'article russe [1], sous le nom de Glivenko, avec, cependant, une démonstration plus compliquée.

Le théorème suivant est dû à Kunugui [14]. Il est plus fort que le théorème 13 de Novikov, moins fort que le théorème 31 d'Arsenin (la date de publication est aussi intermédiaire !). Mais je pense que Kunugui a travaillé indépendamment des deux autres.

THEOREME 27. <u>Soit</u> B <u>une partie borélienne de</u> E×F. <u>L'ensemble</u>

$$C = \{y : B(y) \text{ est compact, non vide}\}$$

<u>est coanalytique dans</u> F.

DEMONSTRATION. Soit H la partie de E×F définie par $H(y) = \overline{B(y)}$ pour tout y : H est analytique à coupes compactes. D'après le théorème 26, H a une extension analytique complète L, à coupes compactes, et C est égal au complémentaire de l'ensemble $\pi(L-B)$.

COROLLAIRE. <u>Soit</u> B <u>une partie borélienne de</u> E×F. <u>Si</u> B(y) <u>est compact pour tout</u> y, <u>alors</u> $\pi(B)$ <u>est borélien dans</u> F.

REMARQUE. Il est clair, suivant la démonstration du théorème 27, qu'une partie borélienne B de E×F dont la projection $\pi(B)$, analytique, n'est pas borélienne, ne peut avoir une extension complète borélienne, ou, même, analytique. Elle en a par contre trivialement une si $\pi(B)$ est borélien.

Le théorème suivant, dû à Lusin, est, historiquement, le premier du genre : c'est pour démontrer ce théorème que, je crois, Lusin a "inventé" le deuxième principe.

THEOREME 28. Soit B une partie borélienne de E×F. L'ensemble

$$C = \{y : B(y) \text{ a un point et un seul}\}$$

est coanalytique dans F.

DEMONSTRATION. D'après le théorème 27, il suffit de montrer que l'ensemble

$$D = \{y : B(y) \text{ a au plus un point}\}$$

est coanalytique. Et cela résulte de l'égalité suivante

$$D^c = \bigcup_{(m,n)\in L} [\pi(B\cap(U_m\times F))\cap \pi(B\cap(U_n\times F))]$$

où (U_n) est une base dénombrable d'ouverts de la topologie de E et L est l'ensemble des couples (m,n) tels que $U_m\cap U_n = \emptyset$.

COROLLAIRE. Soit B un graphe borélien. Alors $\pi(B)$ est borélien dans F.

Arrivé ici, je voudrais faire une remarque importante, mais que j'omettrai plus loin, dans des situations analogues : les énoncés 26, 27, 28 et leurs corollaires sont encore vrais lorsque F est seulement métrisable séparable, à condition de remplacer "borélien dans F" par "bianalytique dans F" (on peut aussi remplacer "borélien de E×F" par "bianalytique de E×F" et obtenir ainsi des énoncés plus généraux). Cela résulte facilement du théorème 3 et du fait que le deuxième théorème de séparation, contrairement au premier, ne nécessite pas d'hypothèse de compacité. Mais, de même que le théorème 21, apparemment affaibli avec l'hypothèse "E métrisable compact", entraine facilement les théorèmes 20 et 21 avec l'hypothèse "E métrisable séparable", de même on peut récupérer ici facilement les énoncés élargis avec ceux que nous avons donnés. Mais les corollaires élargis résultent alors du deuxième théorème de séparation.

Traitons, à titre d'exemple, le dernier corollaire cité, qui, sous sa forme étroite, avait été appelé "théorème (S-L)" :

THEOREME. Soient E un espace métrisable compact et F un espace métrisable séparable. Si G est un graphe bianalytique de E×F, alors $\pi(G)$ est bianalytique dans F et la restriction de π à G est un isomorphisme bianalytique de G sur $\pi(G)$.

DEMONSTRATION. Plongeons F dans un espace métrisable compact F'. Considérons d'abord le cas particulier où G est borélien : il existe alors un borélien B de E×F' tel que $G = B\cap(E\times F)$. L'ensemble $\pi(G)$ est alors la trace sur F de l'ensemble

$$\{y'\in F' : B(y') \text{ a un point et un seul}\}$$

Il est donc coanalytique dans F d'après le théorème 28, et finalement bianalytique d'après le théorème 3. Pour le cas général, où G est bianalytique dans E×F, il nous faudra remonter jusqu'au théorème 26. Il existe alors une partie analytique A de E×F' et une partie coanalytique C de $E\times F'$ telles que $G = A\cap(E\times F) = C\cap(E\times F)$. Soient H la partie analytique de $E\times F'$ définie par $H(y') = \overline{A(y')}$ pour tout $y'\in F'$ et L une extension analytique complète de H dans $E\times F'$. La projection D de $L-C$ sur F' est analytique dans F' et $\pi(G) = F-D$ est coanalytique dans F. Finalement, d'après le théorème 3, $\pi(G)$ est bianalytique dans F. Démontrons enfin que la restriction de à G est un isomorphisme bianalytique de G sur $\pi(G)$, i.e. une bijection bimesurable entre les espaces mesurables $(\underline{\underline{G}},\underline{\underline{BA}}(G))$ et $(\pi(G),\underline{\underline{BA}}(\pi(G)))$. Si U est bianalytique dans G, il est bianalytique dans $E\times F$ et donc $\pi(U)$ est bianalytique dans F (U étant un graphe) et finalement dans $\pi(G)$. Réciproquement, si V est bianalytique dans $\pi(G)$, il l'est dans F et donc $G\cap(E\times V)$ est bianalytique dans G.

Inversement, de même que le théorème 20 entrainait l'énoncé le plus général du deuxième théorème de séparation, de même l'énoncé précédent entraine le théorème 28 :

COROLLAIRE. *Soient* E *un espace métrisable compact et* F *un espace métrisable séparable. Si* B *est une partie bianalytique de* $E\times F$, *l'ensemble*

$$C = \{y : B(y) \text{ a un point et un seul}\}$$

est coanalytique dans F.

DEMONSTRATION. Soit $F' = \{y : B(y) \text{ a au plus un point}\}$: on démontre facilement, comme plus haut, que F' est coanalytique dans F. D'autre part, d'après le théorème précédent, C est bianalytique dans F'. Finalement, C est coanalytique dans F.

Nous terminerons par une extension naturelle de la remarque précédente : on peut non seulement supposer que E et F, dans le paragraphe précédent, et F (pas E) dans celui-ci sont seulement métrisables séparables, mais encore qu'ils sont dépourvus de topologie et *munis d'un pavage formé d'ensembles bianalytiques*. Cela résultera simplement des deux propositions suivantes.

PROPOSITION 4. *Soient* $(E,\underline{\underline{E}})$ *un espace pavé et* (A_n) *une suite d'ensembles* $\underline{\underline{E}}$*-analytiques. Il existe un sous-pavage dénombrable* $\underline{\underline{E}}'$ *de* $\underline{\underline{E}}$ *tel que les* A_n *soient* $\underline{\underline{E}}'$*-analytiques.*

DEMONSTRATION. Immédiate à partir de la définition 1.

Le principe de la démonstration de la seconde proposition est dû, je pense, à Szpilrajn-Marczewski

PROPOSITION 5. *Soit* $(E,\underline{\underline{E}})$ *un espace pavé, où* $\underline{\underline{E}}$ *est dénombrable, tel que tout élément de* $\underline{\underline{E}}$ *soit* $\underline{\underline{E}}$*-bianalytique. Il existe alors une application* f *de* E *dans* [0,1] *induisant un isomorphisme entre la tribu* $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{E}})$ *engendrée par* $\underline{\underline{E}}$ *et la tribu borélienne* $\underline{\underline{B}}(f(E))$ *du sous-espace métrisable séparable* f(E) *de* [0,1], *et, plus généralement, induisant un isomorphisme entre* $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$ *et* $\underline{\underline{A}}(f(E))$ *et entre* $\underline{\underline{BA}}(\underline{\underline{E}})$ *et* $\underline{\underline{BA}}(f(E))$.

DEMONSTRATION. Comme le complémentaire de tout élément de $\underline{\underline{E}}$ est $\underline{\underline{E}}$-analytique, il résulte du théorème 4 que les ensembles $\underline{\underline{E}}$-analytiques (resp $\underline{\underline{E}}$-bianalytiques) et les ensembles $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{E}})$-analytiques (resp $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{E}})$-bianalytiques) coïncident. Il est alors clair que f définit un isomorphisme entre $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$ (resp $\underline{\underline{BA}}(\underline{\underline{E}})$) et $\underline{\underline{A}}(f(E))$ (resp $\underline{\underline{BA}}(f(E))$) si elle définit un isomorphisme entre $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{E}})$ et $\underline{\underline{B}}(f(E))$. Cela dit, soit (E_n) une énumération de $\underline{\underline{E}}$ et posons, pour tout $x \in E$, $f(x) = \sum_n 3^{-n} 1_{E_n}(x)$. L'application f ainsi définie est évidemment mesurable pour les tribus $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{E}}), \underline{\underline{B}}(f(E))$ et il est facile de voir que $\underline{\underline{T}}(E)$ est l'image réciproque de $\underline{\underline{B}}(f(E))$ par f. On en déduit aisément que f induit un isomorphisme entre $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{E}})$ et $\underline{\underline{B}}(f(E))$: en effet, deux éléments x et x' de E appartiennent au même atome de la tribu $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{E}})$ (i.e. $1_A(x) = 1_A(x')$ pour tout $A \in \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{E}})$) si et seulement si on a $f(x) = f(x')$.

Démontrons maintenant, par exemple, le théorème suivant : "si $(E,\underline{\underline{E}})$ est un espace pavé tel que $\underline{\underline{E}} \subset \underline{\underline{BA}}(\underline{\underline{E}})$, et si A_1 et A_2 sont deux ensembles $\underline{\underline{E}}$-analytiques disjoints, on peut séparer A_1 et A_2 par des ensembles $\underline{\underline{E}}$-bianalytiques disjoints ". D'abord, comme on a $\underline{\underline{E}} \subset \underline{\underline{BA}}(\underline{\underline{E}}) \subset \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$, on peut, quitte à remplacer $\underline{\underline{E}}$ par $\underline{\underline{BA}}(\underline{\underline{E}})$, supposer que $\underline{\underline{E}}$ est une tribu. D'après la proposition 4, il existe alors une sous-tribu <u>séparable</u> $\underline{\underline{E}}'$ de $\underline{\underline{E}}$ telle que A_1 et A_2 soient $\underline{\underline{E}}'$-analytiques; d'après la proposition 5, $(E,\underline{\underline{E}}')$ est alors "isomorphe " à un espace métrisable séparable, muni de sa tribu borélienne. On peut donc séparer A_1 et A_2 par des ensembles $\underline{\underline{E}}'$-bianalytiques disjoints, lesquels sont a fortiori $\underline{\underline{E}}$-bianalytiques.

VII. BORELIENS A COUPES $\underline{\underline{K}}_\sigma$

Nous allons démontrer dans ce paragraphe le théorème d'Arsenin, dont l'énoncé général est le suivant : <u>soit</u> B <u>une partie borélienne de</u> E×F. <u>L'ensemble</u> C = {y : B(y) est un $\underline{\underline{K}}_\sigma$ non vide} <u>est coanalytique dans</u> F.

La démonstration se fera en deux étapes "indépendantes" , comme celle du théorème 28. Plus précisément, on démontrera les deux lemmes suivants :

a) l'ensemble C_1 = {y : B(y) est un $\underline{\underline{K}}_\sigma$, éventuellement vide} est coanalytique

b) l'ensemble C est contenu dans un ensemble coanalytique C_2 contenu dans $\pi(B)$

On pourra conclure alors, grâce à l'égalité $C = C_1 \cap C_2$.

Comme dans la démonstration du théorème 28, l'étape b) sera la seule à faire intervenir un théorème de séparation (le deuxième). Mais alors que, précédemment, l'étape a) était relativement simple, ce n'est plus le cas ici. La raison n'est pas mystérieuse : il est aisé d'écrire "utilement" qu'un ensemble est compact ou ouvert, difficile d'écrire qu'il est un $\underline{\underline{K}}_\sigma$ ou un $\underline{\underline{G}}_\delta$. Nous verrons que l'idée essentielle à mettre en jeu est la propriété de Baire.

Pour l'étape a), Arsenin met en jeu la propriété de Baire par l'intermédiaire du théorème - difficile - suivant, dû à Hurewicz [12] :

THEOREME. a) Soit H un espace métrisable cosouslinien. Alors H n'est pas homéomorphe à un $\underline{\underline{G}}_\delta$ d'un espace métrisable compact (i.e. n'est pas polonais) si et seulement s'il contient un parfait homéomorphe à l'ensemble des rationnels de $[0,1]$.

b) Soit H un espace métrisable souslinien. Alors H n'est pas homéomorphe à un $\underline{\underline{K}}_\sigma$ d'un espace métrisable compact (i.e. n'est pas un $\underline{\underline{K}}_\sigma$) si et seulement s'il contient un parfait homéomorphe à l'ensemble des irrationnels de $[0,1]$.

En fait, nous n'utiliserons pas le théorème d'Hurewicz. Je le cite parce que c'est encore un exemple de beau théorème "oublié" (il n'est ni dans Hahn [9], ni dans Kuratowski [15], qui cite cependant l'article [12] pour une des conséquences de ce théorème; il se trouve cité en partie et en appendice dans Hausdorff [10]). C'est ainsi que Preiss [19] a retrouvé une partie de a) ("... contient un $\underline{\underline{G}}_\delta$ ..." au lieu de "...contient un parfait...") puis que Saint-Raymond [?] a retrouvé a)(le fait qu'un espace métrisable, dénombrable et dense en soi, soit homéomorphe à l'ensemble des rationnels est un vieux résultat de Sierpinski).

Ceci dit, avant de rentrer dans le vif du sujet, il nous faut savoir qu'un borélien de $E\times F$ est projection d'un $\underline{\underline{G}}_\delta$ de $E\times F\times G$, où G est un espace métrisable compact auxiliaire. Comme çà ne coûte pas beaucoup plus cher, nous allons reprendre la définition -ô combien classique- suivante des ensembles analytiques

THEOREME 29. Un espace métrisable S est souslinien si et seulement s'il existe une application continue f de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}(=\Sigma)$ sur S.

DEMONSTRATION. Comme $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est polonais, la condition suffisante résulte immédiatement du théorème 7. Passons à la condition nécessaire. Plongeons S dans un compact métrisable K. Par définition, il existe un compact métrisable L et un élément H de $\underline{\underline{K}}_{\sigma\delta}(K\times L)$ tel que S soit la projection de H sur K. H a une représentation de la forme $H = \bigcap_m \bigcup_n H_n^m$, $H_n^m \in \underline{\underline{K}}(K\times L)$ et, quitte, pour chaque m, à "concasser" les H_n^m, on peut supposer que le diamètre de H_n^m, $n\in\mathbb{N}$, est $\leq 1/m$ pour une distance sur $K\times L$ compatible avec sa topologie. On en déduit (cf un lemme plus haut) que S est le noyau d'un schéma de Souslin $s \dashrightarrow K_s$ sur $(K,\underline{\underline{K}})$ où $\bigcap_n K_{\sigma|n}$ est soit vide, soit réduit à un point pour tout $\sigma\in\Sigma$. Il ne reste plus qu'à poser $f(\sigma)$ = l'unique point de $\bigcap_n K_{\sigma|n}$ s'il existe, et $f(\sigma) = x_0$ sinon, où x_0 est un point choisi dans S.

COROLLAIRE. Soit S une partie analytique d'un compact métrisable K. Il existe un compact métrisable auxiliaire L et un élément P de $\underline{\underline{G}}_\delta(K\times L)$ tels que S soit égal à la projection de P sur K.

DEMONSTRATION. Prendre $L = (\mathbb{N}\cup\{\infty\})^{\mathbb{N}}$ et P = le graphe de f.

La propriété de Baire interviendra dans les deux étapes. Voici comment elle interviendra dans l'étape a)

PROPOSITION 6. Soient P un espace polonais, S un espace souslinien métrisable et f une application continue de P sur S. Alors S est un $\underline{\underline{K}}_\sigma$ si et seulement si, pour tout fermé non vide Q de P, il existe un ouvert U non vide de Q tel que f(U) soit relativement compact dans S.

DEMONSTRATION. Soient $\underline{\underline{V}}$ l'ensemble des ouverts V de P tels que f(V) soit contenu dans un $\underline{\underline{K}}_\sigma$ de S et W la réunion des éléments de $\underline{\underline{V}}$: W est aussi la réunion des éléments de $\underline{\underline{V}}$ appartenant à une base dénombrable, et donc est le plus grand élément de $\underline{\underline{V}}$. Si S n'est pas un $\underline{\underline{K}}_\sigma$, $Q = P - W$ est un fermé non vide, et il résulte de la maximalité de W que f(U) ne peut être relativement compact dans S, pour tout ouvert U non vide de Q. Réciproquement, supposons que S soit un $\underline{\underline{K}}_\sigma$, $S = \bigcup_n K_n$, K_n compact et soit Q un fermé non vide de P. Désignons par g la restriction de f à Q : $Q = \bigcup_n g^{-1}(K_n)$. Comme Q est un espace de Baire, l'un des fermés $g^{-1}(K_n)$ est d'intérieur non vide, et il existe donc un ouvert non vide U de Q tel que f(U) soit relativement compact dans S.

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant, dû essentiellement à Effros [ ]

THEOREME 30. Soient L un espace métrisable compact et P un sous-espace polonais (resp souslinien) de L. Le sous-espace $\underline{\underline{F}}(P)$ de $\underline{\underline{K}}(L)$ constitué par les compacts K de L tels que $\overline{K \cap P} = K$ est polonais (resp souslinien).

DEMONSTRATION. Soient (U_n) une base dénombrable d'ouverts de la topologie de L. On a les équivalences logiques suivantes :

$$K \in \underline{\underline{F}}(P) \iff K \subset \overline{K \cap P} \iff \forall n \ U_n \cap K = \emptyset \text{ ou } U_n \cap P \cap K \neq \emptyset$$
$$\iff \forall n \ U_n \cap K = \emptyset \text{ ou } \exists t \in L \ t \in U_n \text{ et } t \in P \text{ et } t \in K$$

Il résulte alors aisément de la troisième (resp quatrième) proposition logique que $\underline{\underline{F}}(P)$ est un $\underline{\underline{G}}_\delta$ de $\underline{\underline{K}}(L)$ (resp un analytique) si P est ouvert (resp analytique) dans L. Si P est un $\underline{\underline{G}}_\delta$ de L, soit $P = \bigcap_n V_n$, V_n ouvert, il résulte du théorème de Baire que $K \cap P$ est dense dans K si et seulement si $K \cap V_n$ est dense dans K pour tout n. Donc $\underline{\underline{F}}(P)$ est alors l'intersection des $\underline{\underline{F}}(V_n)$: $\underline{\underline{F}}(P)$ est un $\underline{\underline{G}}_\delta$ de $\underline{\underline{K}}(E)$.

REMARQUE. Il existe une bijection canonique entre les fermés de P et les compacts K de L tels que $\overline{K \cap P} = K$. On peut donc identifier $\underline{\underline{F}}(P)$ à l'ensemble des fermés de P, qui se trouve ainsi muni d'une bonne topologie. Cette topologie dépend du plongement de P dans le compact métrisable L, mais on peut montrer que la tribu borélienne sur $\underline{\underline{F}}(P)$ engendrée par cette topologie ne dépend pas du plongement. Pour plus de détails, voir Christensen [3].

THEOREME 31. <u>Soit</u> B <u>une partie borélienne de</u> $E{\times}F$. <u>L'ensemble</u>

$$C = \{y : B(y) \text{ est un } \underline{\underline{K}}_\sigma \text{ non vide}\}$$

<u>est coanalytique dans</u> F.

DEMONSTRATION. Soient G un espace métrisable compact auxiliaire, H un $\underline{\underline{G}}_\delta$ de $E{\times}F{\times}G$ de projection sur $E{\times}F$ égale à B et (V_n) une base dénombrable d'ouverts de la topologie de H. Nous noterons f la projection de $E{\times}F{\times}G$ sur $E{\times}F$ et π la projection de $E{\times}F{\times}G$ et de $E{\times}F$ sur F. Pour tout y, H(y) est un $\underline{\underline{G}}_\delta$ de $E{\times}G$, B(y) est l'image de H(y) par f et les $V_n(y)$ forment une base dénombrable d'ouverts de la topologie de H(y). Nous ferons l'abus de langage consistant à identifier une partie A de $E{\times}F{\times}G$ (resp $E{\times}F$) contenue dans $E{\times}\{y\}{\times}G$ (resp $(E{\times}\{y\})$) avec sa coupe A(y) qui est une partie de $E{\times}G$ (resp E).

<u>Lemme</u>. L'ensemble $C^1 = \{y : B(y) \text{ est un } \underline{\underline{K}}_\sigma\}$ est coanalytique dans F.

<u>Démonstration</u>. D'après la proposition 6, y n'appartient pas à C^1 si et seulement s'il existe un fermé non vide de H, soit $K\cap H$, $K\in\underline{\underline{K}}(E{\times}F{\times}G)$ tel que $\overline{K\cap H} = K$, contenu dans $E{\times}\{y\}{\times}G$, tel que, pour tout n, la relation $V_n\cap K \neq \emptyset$ entraine que l'adhérence de $f(V_n\cap K)$ dans E ne soit pas contenue dans B(y). Soit d une distance sur E compatible avec sa topologie. En reprenant les notations du théorème 30 (avec $L = E{\times}F{\times}G$ et $P = H$), on a donc l'équivalence logique suivante

$$\begin{aligned} y\notin C^1 \iff & \exists K\in\underline{\underline{K}}(E{\times}F{\times}G)\ K\neq\emptyset \text{ et } K\in\underline{\underline{F}}(H) \text{ et } K\subset E{\times}\{y\}{\times}G \text{ et } \forall n\ [\ V_n\cap K=\emptyset \text{ ou} \\ & \exists x'\in E\ \ (x',y)\notin B \text{ et } \forall m\ \exists(x,z)\in E{\times}G\ d(x,x')<1/m \text{ et } (x,y)\in B \text{ et} \\ & (x,y,z)\in V_n\cap K\ ] \end{aligned}$$

Le lecteur qui connait bien le calcul symbolique de Kuratowski-Tarski concluera aisément que le complémentaire de C^1 est analytique. En effet $\{(y,K) : K\neq\emptyset$ et $K\in\underline{\underline{F}}(H)$ et $K\subset E{\times}\{y\}{\times}G\}$ est un $\underline{\underline{G}}_\delta$ de $F{\times}\underline{\underline{K}}(E{\times}F{\times}G)$ d'après le théorème 30; pour n fixé, $\{K : V_n\cap K=\emptyset\}$ n'est même pas analytique, en général, mais $\{K : K\in\underline{\underline{F}}(H) \text{ et } V_n\cap K=\emptyset\}$ est un $\underline{\underline{G}}_\delta$ d'après le théorème 30, puisqu'il est égal à $\{K : K\in\underline{\underline{F}}(H) \text{ et } K\subset\overline{(H-V_n)}\}$ (adhérence dans $E{\times}F{\times}G$); $\{(x',y) : (x',y)\notin B\}$ est borélien; pour m fixé, $\{(x,x') : d(x,x')<1/m\}$ est ouvert; $\{(x,y) : (x,y)\in B\}$ est borélien ; $\{(x,y,z) : (x,y,z)\in V_n\}$ est un $\underline{\underline{G}}_\delta$, puisque V_n est ouvert dans H; enfin, $\{(x,y,z,K) : (x,y,z)\in K\}$ est compact.

<u>Lemme</u>. L'ensemble $C^2 = \{y : \exists n\ f(V_n)(y)\neq\emptyset \text{ et } \overline{f(V_n)(y)}\subset B(y)\}$ est coanalytique dans F.

<u>Démonstration</u>. Pour n fixé, posons $A_n = f(V_n)$: A_n est analytique dans $E{\times}F$. Soient alors D_n la partie analytique de $E{\times}F$ définie par $D_n(y) = \overline{A_n(y)}$ pour tout y, et E_n une extension analytique complète de D_n dans $E{\times}F$ (cf théorème 26). L'ensemble $C_n = \{y : E_n(y)\subset B(y)\}$, complémentaire de $\pi(E_n - B)$, est coanalytique dans F, et aussi C^2 qui est la réunion des C_n.

Pour achever la démonstration du théorème, il ne reste plus qu'à montrer que, si B(y) est un $\underline{\underline{K}}_\sigma$ non vide, il existe un entier n tel que $f(V_n)(y)$ soit non vide et que $\overline{f(V_n)(y)}$ soit contenu dans $B(y)$. Ceci résulte immédiatement de la propriété de Baire : $H(y)$ est un espace polonais et les $V_n(y)$ forment une base de la topologie de $H(y)$.

COROLLAIRE. Soit B une partie borélienne de E×F. Si B(y) est un $\underline{\underline{K}}_\sigma$ pour tout y, alors $\pi(B)$ est borélien dans F. De plus, l'ensemble L défini par $L(y) = \overline{B(y)}$ pour tout y est borélien dans E×F.

DEMONSTRATION. La première partie résulte[1] immédiatement du théorème 31 et du premier théorème de séparation (corollaire du théorème 9). La démonstration de la seconde partie est semblable à celle de deux lemmes vus plus haut. Soit d une distance sur E compatible avec sa topologie et, pour tout entier m, soit (U_n^m) une base dénombrable de la topologie de E constituée par des boules ouvertes de rayon < 1/m. Posons, pour tout m, $L^m = \bigcup_n (U_n^m \times \pi[(U_n^m \times F)\cap B])$. Comme $(U_n^m \times F)\cap B$ est un borélien à coupes $\underline{\underline{K}}_\sigma$, sa projection sur F est borélienne. Donc L^m est borélien, ainsi que $L = \bigcap_m L^m$.

Voici maintenant le théorème de section de Čegolkov–Čoban

THEOREME 32. Soit B une partie borélienne de E×F. Si B(y) est un $\underline{\underline{K}}_\sigma$ pour tout y, alors B a une section par un graphe borélien.

DEMONSTRATION. Nous reprenons les notations de la démonstration du théorème 31, et plus particulièrement, celles du deuxième lemme. Les ensembles C_n sont coanalytiques dans F et leur réunion est égale à $\pi(B)$, qui est borélien d'après le corollaire. Il existe alors une suite (B_n) de boréliens de F telle que l'on ait $B_n \subset C_n$ pour tout n et que $\pi(B)$ soit égal à la réunion des B_n (cf le corollaire du théor. 11) On peut évidemment supposer les B_n disjoints. Posons alors $D = \bigcup_n [(E\times B_n)\cap D_n]$: D est une section de B par un analytique à coupes compactes, et on conclut par le théorème 19.

Du corollaire du théorème 31, on déduit immédiatement l'énoncé "incomplet" du théorème (L) du début du paragraphe III : un borélien de E×F à coupes dénombrables (i.e. vides, finies ou infinies dénombrables) a une projection borélienne sur F. Nous allons démontrer un théorème plus général, dû à Mle Braun

THEOREME 33. Soit B une partie borélienne de E×F. L'ensemble

$$C = \{y : B(y) \text{ est dénombrable, non vide}\}$$

est coanalytique dans F.

DEMONSTRATION. Toujours en deux étapes. L'étape b) est déjà faite : C est contenu dans $\{y : B(y)$ est un $\underline{\underline{K}}_\sigma$ non vide$\}$, qui est coanalytique d'après le théorème 31. L'étape a) résulte du théorème suivant, dû à Mazurkiewicz–Sierpinski.

---

1 elle résulte même du deuxième lemme de la démonstration du théorème 31, qui est indépendant, et plus facile (modulo le 2ème théorème de séparation) que le premier.

THEOREME 34. Soit A une partie analytique de E×F. L'ensemble

$$D = \{y : A(y) \text{ n'est pas dénombrable}\}$$

est analytique dans F.

DEMONSTRATION. Nous établirons d'abord un critère pour qu'un ensemble analytique soit dénombrable. Son énoncé et sa démonstration (que nous omettrons) est en tout point analogue à ceux de la proposition 6 : il suffit de remplacer "compact" par "fini".

Lemme. Soient P un espace polonais, S un espace souslinien métrisable et f une application continue de P sur S. Alors S est dénombrable si et seulement si, pour tout fermé non vide Q de P, il existe un ouvert U non vide de Q tel que f(U) soit fini.

Nous reprenons maintenant les notations du début de la démonstration du théorème 31 : G est un compact métrisable, H un $\underline{\underline{G}}_\delta$ de E×F×G de projection sur E×F égale à A, (V_n) une base dénombrable de H. En symboles logiques, on a

$$y \in D \Leftrightarrow \exists K \in \underline{\underline{K}}(E\times F\times G)\ K \neq \emptyset \text{ et } K \in \underline{\underline{F}}(H) \text{ et } K \subset E\times\{y\}\times G \text{ et } \forall n\ [\ V_n \cap K = \emptyset \text{ ou}$$
$$\exists((x_m),(z_m)) \in (E\times G)^{\mathbb{N}}\ \forall(p,q)\ p=q \text{ ou } x_p \neq x_q \text{ et } \forall m\ (x_m,y,z_m) \in V_n \cap K\ ]$$

Comme $E^{\mathbb{N}}$ est métrisable compact et que les éléments (x_m) de $E^{\mathbb{N}}$ tels que $x_p \neq x_q$ pour tout $p \neq q$ forment un $\underline{\underline{G}}_\delta$, on en déduit aisément que D est analytique.

REMARQUE. De même l'ensemble $\{y : A(y)$ a au moins 2 points$\}$ est analytique (cf la démonstration du théorème 28) etc. Par contre l'ensemble $\{y : A(y)$ n'est pas compact (resp un $\underline{\underline{K}}_\sigma$)$\}$ n'est pas, en général, analytique, ni coanalytique, si A n'est pas borélien. En effet, soit G un graphe coanalytique de E×F (avec $E = F = [0,1]$) tel que $\pi(G)$ ne soit ni analytique, ni coanalytique (cela existe d'après le théorème de Kondô). Alors on a $\pi(G) = \{y : A(y)$ n'est pas compact$\}$ si $A = G^c$, et $\pi(G) = \{y : A(y)$ n'est pas un $\underline{\underline{K}}_\sigma\}$ si $A = \{(x,y) : \forall r$ rationnel, $x+r$ et $x-r \notin G(y)\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Arsenin (W.J.), Liapunov (A.A.) et Čegolkov (E.A.) : Arbeiten zur deskriptiven Mengenlehre, Mathematische Forschungsberichte, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955 (traduction allemande d'articles parus dans Uspehi Matem. Nauk, tom. V, fasc. 5 (39), Moscou 1950)

[2] Bourbaki (N.) : Eléments de mathématiques. Topologie générale, chapitre 9, 2ème édition, Hermann, Paris 1958

[3] Christensen (J.P.R) : Borel structures (Notes in Math. n°10 , North Holland Company, 1974)

[4] Čoban (M.M.) : On B-measurable sections (Soviet Math. Doklady, 13, 1972, p 1473-1477)

[5] Dellacherie (C.) : Capacités et processus stochastiques, Ergebn. der Math. vol 67 Springer, Berlin Heidelberg New York 1972

[6] : Ensembles analytiques. Capacités. Mesures de Hausdorff, Lect. Notes in Math. n°295, Springer, Berlin Heidelberg New York 1972

[7] : Une démonstration du théorème de Souslin-Lusin (Sém. de Probabilités VII, Lect. Notes in Math. n°321, Springer, Berlin Heidelberg 1973)

[8] Effros (E.G.) : Convergence of closed subsets in a topological space (Proc. Amer. Math. Soc. 16, 1965, p 929-931)

[9] Hahn (H.) : Reelle Funktionnen (1e Teil), Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1932

[10] Hausdorff (F.) : Mengenlehre (3eme édition, Veit, Berlin 1935) ou Set theory (Chelsea Pub. Comp., New York 1962)

[11] Hoffmann-Jørgensen (J.) : The theory of analytic sets (Aarhus Universitet Mathematik Inst., Various Publications Series n°10, 1970)

[12] Hurewicz (W.) : Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (A) (Fund. Math. 12 (1928), p 78-109)

[13] Kondô (M.) : Sur l'uniformisation des complémentaires d'analytiques et les ensembles projectifs de 2e. classe (Japan J. Math 15 (1938), p 197-230)

[14] Kunugui (K.) : Contributions à la théorie des ensembles boréliens et analytiques III (J. Fac. Sci. Hokkaido Imperial Univ. 8, 1939/40, p 79-108)

[15] Kuratowski (C.) : Topologie, volumes I et II (PWN, Polish Scientific Publishers, Warszawa 1958 et 1961)

[16] Meyer (P.A.) : Probabilités et Potentiel (Hermann, Paris 1966) ou Probability and Potentials (Blaisdell, Boston 1966)

[17] Novikov (P.S.) : La séparabilité des ensembles CA (en russe) (Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. mat., 1937, p 253-264)

[18] : Généralisation du 2e théorème de séparation (en russe) (Doklady Akad. Nauk SSSR 4 (1934) p 8-11)

[19] Preiss (D.) : Metric spaces in which Prohorov's theorem is not valid (Z. für Wahrschein. 27, 1973, p 109-116)

[20] : The convex generation of convex Borel sets in Banach spaces (Mathematika, 20, 1973, p 1-3)

[21] Purves (R.) : Bimeasurable functions (Fund. Math. 58, 1966, p 149-)

[22] Rogers (C.A.) : Lusin's second theorem of separation (J. London Math. Soc. 6 1973, p 491-503)

[23] Sierpinski (W.) : Les ensembles projectifs et analytiques (Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. CXII, Gauthier-Villars, Paris 1950)

[24] Larman (D.G.) : Projecting and uniformising Borel sets with $\underline{\underline{K}}_\sigma$- sections I (Mathematika 19, 1972, p 231-244)

[25] : Projecting and ... II (Mathematika 20, 1973, p 233-246)

[26] Ostaszewski (A.J.) : Families of compact sets and their universals (Mathematika 21, 1974, p 116-127)

[27] Sion (M.) : On uniformization of sets in topological spaces (Trans. Amer. Math. Soc. 96, 1960, p 237-246)