SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JOSÉ DE SAM LAZARO
PAUL-ANDRÉ MEYER

Questions de théorie des flots (I)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 2-14
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__2_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1971/72

QUESTIONS DE THEORIE DES FLOTS (I)

par J. de SAM LAZARO et P.A.MEYER

Il y a beaucoup de livres et de séminaires de théorie ergodique. Mais la théorie ergodique qui s'y trouve est plus proche, dans bien des cas, de la théorie des groupes que de celle des processus stochastiques, car il y manque l'idée probabiliste essentielle : celle d'une évolution dans le temps. Si l'on regarde par exemple les admirables théorèmes récents sur les isomorphismes de flots de BERNOULLI, on constate que ces isomorphismes semblent détruire complètement la structure temporelle du processus (savoir s'il en est nécessairement ainsi, ou si cela tient à la démonstration, est un autre problème !).

Ce séminaire-ci, tenu à Strasbourg à partir de Mars 1972, avait pour objet l'étude de mémoires récents concernant les aspects probabilistes de la théorie des flots. Nous ne publions ici qu'une partie des exposés, la moitié environ. Les résultats nouveaux seront signalés au passage (on les trouvera surtout dans les derniers exposés, où l'on présente une partie de la thèse du premier auteur ; les spécialistes ont dégonflé nos illusions quant à l'originalité des premiers exposés).

1. DICTIONNAIRE

Malgré le titre, les définitions ci-dessous ne figurent pas dans l'ordre alphabétique. Nous avons cherché à indiquer un langage commode, et non à couvrir des situations très générales, ce qui explique que plusieurs termes soient pris en un sens plus restrictif que d'habitude.

DEFINITIONS 1

Automorphisme d'un espace mesurable $(\Omega,\underline{\underline{A}})$: bijection $s : \Omega \mapsto \Omega$, mesurable ainsi que son inverse.

Automorphisme d'un espace mesuré $(\Omega,\underline{\underline{A}},\mu)$: il préserve de plus la mesure.

Flot discret ou **cascade** : groupe $(\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'automorphismes . Cette notion se réduit en fait à celle d'automorphisme, car si l'on pose $\theta_1=s$, on a $\theta_n=s^n$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$. Il n'en va pas de même dans le cas continu :

Flot sur $(\Omega,\underline{\underline{A}},\mu)$: groupe à un paramètre $(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'automorphismes de $(\Omega,\underline{\underline{A}},\mu)$. Cette définition est trop générale, et nous nous intéresserons seulement, en principe, à la situation suivante :

- La mesure μ est <u>bornée</u> .
- Il existe une sous-tribu $\underline{\underline{A}}^\circ$ de $\underline{\underline{A}}$ telle que $\underline{\underline{A}}$ soit la tribu complétée de $\underline{\underline{A}}^\circ$ pour μ , et que l'application $(t,\omega)\longmapsto \Theta_t\omega$ soit mesurable de la tribu produit $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\underline{\underline{A}}^\circ$ dans $\underline{\underline{A}}^\circ$.
- Le flot est continu[1] dans L^1 (pour $f\in L^1(\mu)$, $\|f\circ\Theta_t - f\|_1 \to 0$ avec t)
- Enfin, il nous arrivera de supposer que $\underline{\underline{A}}^\circ$ est une tribu de BLACKWELL. Pour ne pas surcharger l'exposé à cette place-ci, nous renverrons le lecteur à l'<u>appendice</u> sur les tribus de BLACKWELL, à la fin de l'exposé.

Sauf mention expresse du contraire, chaque fois que nous parlons d'un flot (en temps continu) dans la suite, nous supposons que les <u>trois</u> premières propriétés ci-dessus sont satisfaites. L'utilisation de la quatrième sera toujours explicitement signalée. Il faut également noter que la théorie <u>en temps continu</u>, avec une mesure μ <u>bornée</u>, nous amènera parfois à des situations <u>discrètes</u> sur des espaces mesurés <u>σ-finis</u>.

<u>Isomorphisme de flots</u>. Nous choisissons la définition la plus faible possible, à la manière de l'équivalence en loi des processus. A tout flot $(\Omega,\underline{\underline{A}},\mu,(\Theta_t)_{t\in\mathbb{R}})$, on peut faire correspondre un objet algébrique $(\dot{\underline{\underline{A}}},\dot{\mu},\dot{\Theta}_t)$ comme suit : soit $\underline{\underline{N}}$ la classe des ensembles μ-négligeables ; $\dot{\underline{\underline{A}}}$ sera l'algèbre de Boole $\underline{\underline{A}}/\underline{\underline{N}}$, munie de la mesure bornée $\dot{\mu}$ déduite de μ par passage au quotient ; d'autre part, les applications $A\mapsto \Theta_t^{-1}(A)$ de $\underline{\underline{A}}$ dans $\underline{\underline{A}}$ passent au quotient suivant $\underline{\underline{N}}$, donnant un groupe d'automorphismes $\dot{\Theta}_t$ de $(\dot{\underline{\underline{A}}},\dot{\mu})$. On dit alors que deux flots sont <u>isomorphes</u> si les objets algébriques $(\dot{\underline{\underline{A}}},\dot{\mu},\dot{\Theta}_t)$ sont algébriquement isomorphes.

Il est clair que deux flots isomorphes au sens banal (existence d'une bijection ensembliste, bimesurable, préservant la mesure et commutant avec les flots) sont isomorphes en ce sens. Clair aussi qu'un flot est isomorphe à sa <u>restriction</u> à une partie Ω' de Ω , $\underline{\underline{A}}$-mesurable, stable par les Θ_t et portant μ . Ce sont les deux procédés qui permettent, en pratique, de montrer que deux flots sont isomorphes. On peut prouver, en fait, que deux flots sur de bons espaces mesurés, isomorphes au sens précédent, admettent des restrictions isomorphes au sens banal. Mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat.

DEFINITIONS 2

On se borne au cas continu.

<u>Ensemble invariant</u> par le flot : ensemble $A\in\underline{\underline{A}}$ tel que $\Theta_t^{-1}(A)=A$ pour tout t. On a une notion de <u>flot induit</u> sur un ensemble invariant A.

1 Cette hypothèse est en fait une conséquence de la précédente.

Les ensembles invariants forment une tribu $\mathcal{I}$: si cette tribu est μ-dégénérée, le flot est dit *ergodique* . Nous reviendrons sur cette question au paragraphe II.

Tribu invariante : tribu $\mathcal{G}\subset\mathcal{A}$ telle que $\Theta_t^{-1}(\mathcal{G})\subset\mathcal{G}$ pour tout t - donc en fait $\Theta_t^{-1}(\mathcal{G})=\mathcal{G}$. On a une notion de *flot induit* sur $\mathcal{G}$ (les flots isomorphes à un tel flot induit sur une tribu invariante sont souvent appelés *facteurs* du flot donné). Noter que la mesurabilité de l'application $(t,\omega)\mapsto\Theta_t\omega$ peut se perdre dans cette transformation, et consulter l'appendice.

Tribu filtrante : tribu $\mathcal{F}\subset\mathcal{A}$ telle que $\Theta_t^{-1}(\mathcal{F})\subset\mathcal{F}$ pour $t\leq 0$. On pose alors pour tout t $\mathcal{F}_t=\Theta_t^{-1}(\mathcal{F}_0)$ (donc $\mathcal{F}_{s+t}=\Theta_t^{-1}(\mathcal{F}_s)$) : c'est une famille croissante de tribus telle que $\mathcal{F}=\mathcal{F}_0$, et l'on définit $\mathcal{F}_{-\infty}=\bigcap_t\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_{+\infty}=\bigvee_t\mathcal{F}_t$, deux tribus invariantes.

La donnée d'une tribu filtrante $\mathcal{F}$ est une *filtration* du flot. La filtration est dite *exhaustive* si $\mathcal{F}_\infty=\mathcal{A}$ aux ensembles μ-négligeables près.

On part souvent d'une tribu filtrante $\mathcal{F}^o$ (non nécessairement contenue dans $\mathcal{A}^o$!) et on prend pour $\mathcal{F}$ la *complétée de* $\mathcal{F}^o$ *dans* $\mathcal{A}$, qui contient donc tous les ensembles μ-négligeables. Noter que dans ce cas $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$ pour tout t, car si f est l'indicatrice d'un élément de $\mathcal{F}_{t+}$, $f\circ\Theta_{-\varepsilon}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $\varepsilon>0$, donc f l'est aussi par convergence dans L^1. En revanche, la famille $(\mathcal{F}_t^o)$ n'est pas forcément continue à droite.

L'objet essentiel de ce séminaire est l'étude des *flots filtrés* , la donnée d'une filtration introduisant une notion de "passé à l'instant t" , qui fait que le temps n'est plus seulement un élément d'un groupe commutatif, mais bien un temps au sens "physique" du terme.

K-filtration : la tribu $\mathcal{F}_{-\infty}$ est dégénérée pour μ .
K-flot : flot admettant une K-filtration exhaustive .

Noter la différence entre ces deux notions : dans le premier cas, on considère une propriété d'une filtration *donnée* , dans le second cas, une propriété d'un flot.

Au lieu de K- filtration, on dit parfois filtration *purement stochastique*, ou purement indéterministe ; une filtration est dite (purement) *déterministe* si $\mathcal{F}_{-\infty}=\mathcal{F}_{+\infty}$ aux ensembles de mesure nulle près . Par exemple, la filtration triviale : $\mathcal{F}_t=\mathcal{A}$ pour tout t .

Processus stationnaire dans un flot : processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ à valeurs dans un espace d'états $(E,\mathcal{E})$, tel que $X_s\circ\Theta_t=X_{s+t}$ identiquement.

Un tel processus est stationnaire au sens usuel (en loi), mais il s'agit ici d'une notion beaucoup plus précise, puisqu'on se donne le flot sous-jacent. Chaque fois que l'on se donne un processus stationnaire, il lui correspond une filtration du flot, au moyen de la famille de tribus " naturelle" du processus

(1.1) $\underline{\underline{F}}_t = \underline{\underline{T}}(X_s , -\infty < s \leq t)$

Inversement, si $\underline{\underline{F}}$ est une tribu filtrante, $(\underline{\underline{F}}_t)$ est la famille de tribus naturelle du processus stationnaire (X_t) ainsi défini

$X_t = \theta_t$, considérée comme application de $(\Omega,\underline{\underline{A}})$ dans $(\Omega,\underline{\underline{F}})$.

Cependant, il existe des processus stationnaires, mettons réels, qui ne sont pas du tout triviaux et tels pourtant que $\mu\{X_t \neq 0\}=0$ pour tout t. La famille de tribus naturelle d'un tel processus est alors dégénérée. Nous en verrons des exemples très importants par la suite.

Processus à accroissements stationnaires, ou hélice : tout processus $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}}$ à valeurs réelles finies, continu à droite, tel que $Z_0=0$ et satisfaisant à l'identité suivante

(1.2) $Z_{t+h}-Z_{s+h} = (Z_t-Z_s)\circ\theta_h$ quels que soient s,t,h

Dans le cas d'un flot filtré, nous réserverons le nom d'hélice aux processus (Z_t) tels que Z_t soit $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable pour tout $t\geq 0$.

Traditionnellement, les hélices ci-dessus sont appelées hélices parfaites , le mot hélice désignant des processus satisfaisant à (1.2) avec un ensemble exceptionnel négligeable (dépendant de h). Nous continuerons dans ces exposés à utiliser le mot "parfaite" de manière informelle.

2. THEOREME ERGODIQUE. APPLICATION AUX PROCESSUS PONCTUELS

La forme discrète du théorème ergodique est très bien connue, et nous cherchons surtout, dans ce paragraphe, à donner une démonstration rapide de la forme continue, et du théorème ergodique local. Nous en donnerons ensuite une application aux processus ponctuels discrets.

Notations . $(\Omega,\underline{\underline{A}},\mu)$ est un espace mesuré fini , s un automorphisme. Nous posons $Sf = f\circ s$, $C_k f = (f+Sf+\ldots+S^k f)/k+1$. De même, si (θ_t) est un flot, on pose $T_t f = f\circ\theta_t$ et $M_t f = \frac{1}{t}\int_0^t T_s f\,ds$ [si f est $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable bornée, $s\mapsto f\circ\theta_s\omega$ est borélienne pour tout ω, et $M_t f$ $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable ; si f est $\underline{\underline{A}}$-mesurable bornée, $s\mapsto f\circ\theta_s\omega$ est mesurable au sens de Lebesgue pour μ-presque tout ω, et $M_t f$, définie μ-p.p., est $\underline{\underline{A}}$-mesurable ; extension facile à f positive et à $f\in L^1$].

On rappelle le lemme de HOPF (dont il existe une démonstration très simple, due à GARSIA) : si $f \in L^1$, si A est invariant par s, on a pour tout $n \geqq 0$

$$\int_{A \cap \{ \sup_{k \leqq n} C_k f > 0 \}} f \, d\mu \geqq 0$$

remplacant f par f-a , on trouve

$$\int_{A \cap \{ \sup_{k \leqq n} C_k f > a \}} f \, d\mu \geqq a.\mu(A \cap \{\ldots\})$$

Passons au flot : prenons $h \in L^1$ et prenons $s = \Theta_{2^{-n}t}$, A invariant par rapport au flot, donc aussi pour s, et $f = 2^{-n}t \int_0^{2^{-n}t} h \circ \Theta_u \, du$, avec $h \in L^1$. La formule précédente s'écrit

$$\int_{A \cap \{ \sup_{k \leqq 2^n} M_{k2^{-n}t} h > a \}} f \, d\mu \geqq a\mu(A \cap \{\ldots\})$$

Soit $\varepsilon > 0$; pour $n \geqq N$ suffisamment grand on a $\|f-h\|_1 < \varepsilon$, et alors

$$\int_{A \cap \{ \sup_{k \leqq 2^n} M_{k2^{-n}t} h > a \}} h \, d\mu \geqq a\mu(A \cap \{\ldots\}) - \varepsilon$$

Faisons tendre n vers $+\infty$: la fonction $M_\cdot h(\omega)$ est continue pour pr. tout ω, et l'ensemble $\{\ldots\}$ tend p.s. en croissant vers $\{ \sup_{s \leqq t} M_s h > a \}$ Comme ε est arbitraire, on a étendu le lemme de HOPF au cas continu :

L1 LEMME. <u>Si A est invariant pour le flot</u>, <u>et</u> $h \in L^1$, <u>on a</u>

$$(2.1) \quad \int_{A \cap \{ \sup_{s \leqq t} M_s h > a \}} h \, d\mu \geqq a\mu(A \cap \{ \sup_{s \leqq t} M_s h > a \})$$

<u>et de même</u>

$$(2.2) \quad \int_{A \cap \{ \inf_{s \leqq t} M_s h < b \}} h \, d\mu \leqq b\mu(A \cap \{ \inf_{s \leqq t} M_s h < b \})$$

On fait maintenant tendre t vers $+\infty$: les inégalités restent vraies. Puis on prend $A = \{ \liminf_{s \to \infty} M_s h < b < a < \limsup_{s \to \infty} M_s h \}$, et on voit que $\mu(A) = 0$, d'où l'on déduit que $M_s h$ converge μ-p.s. lorsque $s \to +\infty$. La convergence dans $L^1(\mu)$ vers $E[h|\underline{\underline{I}}]$, l'espérance conditionnelle de h par rapport à la tribu $\underline{\underline{I}}$ des ensembles invariants, peut se démontrer très rapidement : voir M.SMORODINSKY , <u>Ergodic theory, entropy</u>, p.10 (Lecture Notes in M. vol 214, 1971). On a ainsi étendu aux flots le théorème ergodique :

T1 THEOREME. <u>Si</u> $h \in L^1$, $M_s h$ <u>converge p.s. et dans</u> L^1 <u>vers</u> $E[h|\underline{\underline{I}}]$ <u>lorsque</u> $s \to +\infty$.

Il est aussi facile d'en déduire le <u>théorème ergodique local</u>

T2 THEOREME. <u>Si</u> $h \in L^1$, $M_t h$ <u>converge p.s. et dans</u> L^1 <u>vers</u> h <u>lorsque</u> $t \to 0$.

DEMONSTRATION. Soit $\underline{\underline{H}}$ le sous-espace de L^1 formé des h tels que $M_t h \to h$ p.s. lorsque $t \to 0$. On vérifie aussitôt que $\underline{\underline{H}}$ contient les fonctions de la forme

$$h = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s f \, ds \quad (f \text{ bornée}, \lambda > 0)$$

car pour celles-ci $T_t h \to h$ partout lorsque $t \to 0$. On en déduit aisément que $\underline{\underline{H}}$ est dense dans L^1. Soit alors $h \in L^1$, et soient h_n des éléments de $\underline{\underline{H}}$ tels que $\|h-h_n\|_1 \leqq 4^{-n}$. Si nous appliquons le lemme de HOPF à $|h-h_n|$, nous obtenons

$$2^{-n} \mu\{ \sup_s |M_s h - M_s h_n| > 2^{-n}\} \leqq 4^{-n}$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, la fonction $M_. h_n$ converge p.s. <u>uniformément</u> vers $M_. h$, et la relation $M_{0+} h_n = h_n$ p.s. passe à la limite. Donc $\underline{\underline{H}} = L^1$. La convergence dans L^1 est immédiate d'après l'hypothèse de continuité du flot dans L^1.

PROCESSUS PONCTUELS DISCRETS

Nous revenons à un flot $(\Omega, \underline{\underline{A}}, P, (\theta_t))$, $\underline{\underline{A}}$ étant la P-complétion de $\underline{\underline{A}}^\circ$, les hypothèses du début étant satisfaites. Nous considérons un processus stationnaire (X_t) à valeurs dans un espace mesurable $(\overline{E}, \overline{\underline{\underline{E}}})$, dans lequel on distingue un point noté ∂ , l'ensemble $\{\partial\}$ étant mesurable. <u>La fonction</u> $(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ <u>est supposée mesurable</u> (c'est toujours le cas si X_0 est $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable). Nous supposons que (X_t) possède la propriété suivante

<u>pour tout</u> $\omega \in \Omega$, <u>l'ensemble</u> $P(\omega) = \{ t : X_t(\omega) \neq \partial \}$ <u>est sans point d' accumulation à distance finie</u>

Nous noterons E le complémentaire de ∂ : seules les " apparitions" du processus dans E nous intéressent (nous les appellerons <u>points</u> , ou <u>sauts</u>) ; le point ∂ n'est qu'un artifice pour travailler sur des trajectoires partout définies. Un tel processus est appelé un <u>processus ponctuel discret à valeurs dans</u> E.

L'ensemble H des ω tels que $P(\omega) = \emptyset$ est évidemment invariant. Le processus (X_t) étant supposé mesurable, l'ensemble

$$\{ \omega : \exists t , X_t(\omega) \neq \partial \} = H^c$$

est projection sur Ω de l'ensemble $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}) \times \underline{\underline{A}}$-mesurable $\{(t,\omega) : X_t(\omega) \neq \partial\}$: il est donc $\underline{\underline{A}}$-mesurable. Nous pouvons donc <u>restreindre</u> le flot à H^c, qui est l'ensemble intéressant, et supposer que pour tout $\omega \in \Omega$ l'ensemble des sauts est non vide.

Soit $N_t(\omega)$ le nombre des "points" entre les instants 0 (exclu) et $t \geq 0$ (inclus). Un argument de projection (mesurabilité des temps d'entrée) montre que la fonction

$$T_1(\omega) = \inf \{ t>0 : X_t(\omega)\neq\partial \}$$

est $\underline{\underline{A}}$-mesurable, et (par récurrence) que les fonctions

$$T_k(\omega) = \inf \{ t>T_{k-1}(\omega) : X_t(\omega)\neq\partial\}$$

sont $\underline{\underline{A}}$-mesurables. Il en résulte que N_t est $\underline{\underline{A}}$-mesurable (car $\{N_t\geq k\} = \{T_k\leq t\}$). Soit $r>0$; appliquons le théorème ergodique à l'automorphisme Θ_t et à $N_t\wedge r \in L^1$. Il vient

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_{kt}}{k} \geq E[N_t\wedge r \,|\underline{\underline{I}}_t] \text{ P-p.s. , donc } \geq E[N_t|\underline{\underline{I}}_t] \text{ P-p.s.}$$

où $\underline{\underline{I}}_t$ est la tribu des ensembles Θ_t-invariants. Sur l'ensemble où $N_t>0$, $E[N_t|\underline{\underline{I}}_t]$ est aussi P-p.s. >0 , et donc $N_{kt} \to +\infty$ avec k P-p.s.. Comme nous nous sommes restreints à H^c , nous avons $N_t>0$ pour t assez grand, et donc $N_t\to+\infty$ $(t\to\infty)$ P-p.s. , et l'ensemble des "points" n'est P-p.s. pas borné supérieurement. Un raisonnement semblable du côté négatif montre qu'il n'est pas non plus borné inférieurement. Nous avons établi le résultat suivant :

P1 PROPOSITION. Si (X_t) est un processus ponctuel discret sur Ω , Ω peut être partagé en trois ensembles invariants $\underline{\underline{A}}$-mesurables

1) L'ensemble des $\omega\in\Omega$ pour lesquels $P(\omega)$, l'ensemble des points du processus ponctuel, est vide

2) L'ensemble des ω tels que $P(\omega)$ soit non vide, et borné soit supérieurement , soit inférieurement

3) L'ensemble des ω tels que $P(\omega)$ ne soit borné ni à droite, ni à gauche .

Le second ensemble est de mesure nulle.

[On rappelle que la mesure P est bornée]

DESCRIPTION D'UN PROCESSUS PONCTUEL

Après cette application du théorème ergodique, nous reprenons un processus ponctuel discret (X_t) sur $(\Omega,\underline{\underline{A}},P,(\Theta_t))$, à valeurs dans E, et nous supposons que $P(\omega)$ est non-borné pour tout ω (ce qui revient à se restreindre au troisième ensemble invariant ci-dessus). Nous allons introduire diverses notations importantes pour la suite .

a) Pour t positif, nous avons déjà défini $N_t(\omega)$ comme le nombre d'éléments de $P(\omega)\cap]0,t]$; pour $t<0$, $-N_t(\omega)$ sera le nombre d'éléments de $P(\omega)\cap]t,0]$. Il est facile de voir que, dans ces conditions, (N_t) est une hélice du flot.

b) Pour tout $k>0$, nous avons défini $T_k(\omega)$ par

$$T_1(\omega) = \inf \{t>0, X_t(\omega)\neq\partial\} \ , \ T_{k+1}(\omega) = \inf \{t>T_k(\omega), X_t(\omega)\neq\partial\}$$

Nous prolongeons ces définitions en posant du côté gauche

$T_0(\omega) = \sup \{ t \leqq 0 \;,\; X_t(\omega) \neq \partial \} \;,\; T_{k-1}(\omega) = \sup \{ t < T_k(\omega),\; X_t(\omega) \neq \partial \}$

Comme nous nous sommes restreints à un ensemble invariant convenable[1], les v.a. T_n sont toutes finies, et $T_n \to \pm\infty$ avec n.

c) Nous poserons $X^n(\omega) = X_{T_n(\omega)}(\omega)$, fonction à valeurs dans E. Le processus (X_t) étant mesurable , et chaque T_n étant égal P-p.s. à une v.a. $\underline{\underline{A}}^o$-mesurable, X^n est $\underline{\underline{A}}$-mesurable pour tout n .

d) Nous commençons par remarquer que la "famille de tribus naturelle" du processus (X_t), au sens usuel, est dégénérée. En effet, $P\{X_t \neq \partial\}$ est une constante c, égale aussi à $\int_0^1 P\{X_t \neq \partial\}dt$. Si c était >0, le théorème de Fubini nous donnerait que pour certains ω $\{ t : X_t(\omega) \neq \partial \}$ est de mesure de Lebesgue >0, alors que cet ensemble est dénombrable.

Néanmoins, un processus ponctuel discret donne lieu à une filtration intéressante : définissons $\underline{\underline{F}}^o$ comme la tribu engendrée par les v.a. T_n et X^n pour $n \leqq 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$; on a pour tout m

$$(2.3) \qquad \begin{aligned} T_m(\theta_t\omega) &= T_{m+k}(\omega) - t \\ X^m(\theta_t\omega) &= X^{m+k}(\omega) \end{aligned}$$

où $k=k(\omega)$ est l'unique entier tel que $T_k(\omega) \leqq t < T_{k+1}(\omega)$. Lorsque $t \leqq 0$, $\omega \mapsto k(\omega)$ est $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable, et k est $\leqq 0$. Il en résulte que $T_n \circ \theta_t$ et $X^n \circ \theta_t$ sont $\underline{\underline{F}}^o$-mesurables pour $n \leqq 0$, et cela signifie que $\underline{\underline{F}}^o$ est une tribu filtrante. Cette filtration est dite <u>associée</u> au processus ponctuel discret (X_t) .

On peut expliciter un peu les tribus $\underline{\underline{F}}^o_t$ pour $t \geqq 0$:

L2 LEMME. <u>Si</u> $t \geqq 0$, $\underline{\underline{F}}^o_t$ <u>est identique à la tribu</u> $\underline{\underline{G}}$ <u>engendrée par les v.a.</u>

$$(2.4) \qquad T'_m = T_m \wedge t \quad , \quad X'^m = X_{T'_m} \quad \underline{\text{pour}}\ m \in \mathbb{Z}$$

DEMONSTRATION (sommaire). Par définition, $\underline{\underline{F}}^o_t$ est engendrée par les v.a. $T_n \circ \theta_t$, $X^n \circ \theta_t$ $(n \leqq 0)$. Compte tenu de (2.3), l'entier $k(\omega)$ est positif, et peut être caractérisé par les inégalités $T_{-k}(\theta_t\omega) \leqq -t < T_{-k+1}(\theta_t\omega)$ (la seconde inégalité étant inutile si $T_0(\theta_t\omega) \leqq -t$, de sorte qu'on n'a pas besoin de T_1). L'application $\omega \mapsto k(\omega)$ est donc $\underline{\underline{F}}^o_t$-mesurable, et on en déduit sans peine, par (2.3), que les v.a. (2.4) sont $\underline{\underline{F}}^o_t$-mesurables.

Dans l'autre sens : soit j le plus petit entier tel que $T'_j(\omega) \geqq t$. On a $k(\omega)=j-1$ si $X'^j(\omega)=\partial$, $k(\omega)=j$ si $X'^j(\omega) \neq \partial$. Donc $\omega \mapsto k(\omega)$ est $\underline{\underline{G}}$-mesurable, et on déduit alors de (2.3) que les $T_n \circ \theta_t$, $X^n \circ \theta_t$ sont $\underline{\underline{G}}$-mesurables.

---

1 Sinon, certains T_n valent $+\infty$ (n>0) ou $-\infty$ $(n \leqq 0)$. On conviendra que les X^n correspondants sont égaux à ∂.

VERSION CANONIQUE D'UN PROCESSUS PONCTUEL DISCRET

Nous conservons les notations précédentes, et supposons toujours que l'ensemble $P(\omega)$ des " points" est non borné à droite et à gauche pour tout ω.

Désignons par $\tilde{\Omega}$ l'ensemble de toutes les applications $\tilde{\omega}$ de $\mathbb{R}$ dans $E\cup\{\partial\}$, qui ne prennent une valeur différente de ∂ qu'aux points d'un ensemble $P(\tilde{\omega})$, sans point d'accumulation à distance finie, non borné des deux côtés. Cet ensemble admet un groupe d'automorphismes (ensemblistes) évident : les translations $\tilde{\theta}_t$. Pour le munir d'une tribu, nous numérotons les "points" selon le procédé indiqué plus haut, ce qui nous donne des applications T_m de $\tilde{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$, X^m de $\tilde{\Omega}$ dans E . Nous notons alors $\underline{\underline{\tilde{A}}}^o$ la tribu engendrée par toutes ces applications. Les formules (2.3) permettent de voir aisément que les $\tilde{\theta}_t$ sont mesurables, et même (par continuité à droite) que l'application $(t,\tilde{\omega})\mapsto \tilde{\theta}_t\tilde{\omega}$ est mesurable. Nous laisserons de côté les questions de filtration pour l'instant.

A tout $\omega\in\Omega$ associons sa trajectoire $t\mapsto X_t(\omega)$ pour le processus ponctuel discret (X_t), trajectoire que nous noterons $\varphi(\omega)\in\tilde{\Omega}$. L'application φ est mesurable de $(\Omega,\underline{\underline{A}})$ dans $(\tilde{\Omega},\underline{\underline{\tilde{A}}}^o)$, d'où une loi image $\tilde{P} = \varphi(P)$. Le système $(\tilde{\Omega},\underline{\underline{\tilde{A}}}^o,\tilde{P},(\tilde{\theta}_t))$ est un flot , pour lequel le processus $(\tilde{X}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ des applications coordonnées sur $\tilde{\Omega}$ est un processus ponctuel discret : la <u>version canonique</u> du processus (X_t).

Soit H l'ensemble des suites $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels, telles que $t_n<t_{n+1}$ pour tout n , $\lim t_n = \pm\infty$ pour $n\to\pm\infty$, $t_0\leq 0<t_1$. Alors l'application $\tilde{\omega}\mapsto (T_m(\tilde{\omega}),X^m(\tilde{\omega}))_{m\in\mathbb{Z}}$ est une bijection de $\tilde{\Omega}$ sur $H\times E^{\mathbb{Z}}$. On peut écrire l'action des opérateurs de translation sur ce dernier espace, grâce aux formules (2.3), mais c'est un peu moins facile que sur $\tilde{\Omega}$. Toutes ces remarques sont bien connues, et ont par exemple été exposées par NEVEU dans ses notes sur les processus ponctuels (C.R. t.267, 1968, p.561) .

3. FLOT SOUS UNE FONCTION

Nous en arrivons maintenant à la troisième notion importante de cet exposé , celle de <u>flot sous une fonction</u>. Il s'agit d'une notion déjà ancienne , due à W.AMBROSE (Representation of ergodic flows, Ann. of M. 42, 1941, p.723-739), et sans doute même antérieure (il paraît que von NEUMANN s'y était intéressé) : AMBROSE montrait que tout flot <u>ergodique</u> était isomorphe à un flot sous une fonction, ce qui paraissait ramener une bonne partie de la théorie des flots à la théorie ergodique (discrète) ordinaire. Le théorème d'AMBROSE a été étendu par AMBROSE-KAKUTANI à des flots non ergodiques très généraux (Structure and continuity of measurable flows, Duke M.J. 9, 1952, p.25-42). Nous parlerons plus loin de ces théorèmes de représentation.

Dans ce paragraphe, nous allons décrire les flots sous une fonction, et d'abord montrer que ce sont effectivement des flots : la forme définitive de l'exposé doit beaucoup à une conversation avec NEVEU. Dans l'exposé suivant, nous présenterons les relations entre les flots sous une fonction et les processus ponctuels discrets, et les applications à la structure de ceux-ci.

NOTATIONS. $(\Omega,\underline{\underline{A}},\mu)$ est un espace mesuré σ-fini, muni d'un automorphisme s ; f est une fonction mesurable sur Ω , partout finie et partout >0 . Nous supposerons d'habitude que $\int f d\mu=1$, mais une bonne partie des résultats reste valable sans cette hypothèse. On définit les itérées de f par

$$(3.1)\qquad \begin{array}{l} f_0=0\ ,\ f_1=f\ ,\ \ f_n= f+f\circ s+\ldots+ f\circ s^{n-1} \\ \qquad f_{-1}=-f\circ s^{-1}\ \ f_{-n}= -f\circ s^{-1}\ldots-f\circ s^{-n} \end{array}$$

et <u>nous supposerons que</u> $f_n \rightarrow \pm\infty$ <u>avec</u> n . L'ensemble où cette propriété est d'ailleurs un ensemble invariant pour s, auquel on peut restreindre le flot discret, et si la mesure μ est finie on peut être certain qu'il porte μ (car le théorème ergodique entraîne que $\underline{\lim}_n \frac{f_n}{n} > 0$ μ-p.s. , donc $f_n \rightarrow +\infty$ p.s. pour $n\rightarrow\infty$, et de même à gauche).

Nous posons $\overline{\Omega} = \Omega\times\mathbb{R}$, avec $\overline{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{A}}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$, et la mesure $\overline{\mu} = \mu\otimes\ell$ (mesure de Lebesgue). Nous partageons $\overline{\Omega}$ en les ensembles $\overline{\Omega}_n =\{(y,u) : f_n(y)\leq u< f_{n+1}(y)\}$, parmi lesquels nous distinguons

$$(3.2)\qquad \tilde{\Omega} = \overline{\Omega}_0 = \{(y,u)\ :\ 0\leq u< f(y)\ \}$$

que nous munissons de la tribu induite $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ et de la mesure induite $P = \overline{\mu}|_{\tilde{\Omega}}$, de masse $\int f d\mu$ (P sera d'habitude une loi de probabilité).

On construit sur $\overline{\Omega}$ les applications

$$(3.3)\qquad \overline{\theta}_t(y,u) = (y,\ u+t)$$

$$(3.4)\qquad \overline{s}(y,u) = (sy,\ u-f(y))$$

il est facile de calculer $\overline{s}^k(y,u)= (s^k y,\ u-f_k(y))$, pour $k\in\mathbb{Z}$; ces applications forment un groupe discret d'automorphismes de $(\overline{\Omega},\overline{\underline{\underline{A}}})$. Du point de vue de la mesure, si h(y,u) est une fonction positive de la forme a(y)b(u), on a

$< \bar{\mu}, h\circ\bar{s} > \; = \int a(sy)b(u-f(sy))\mu(dy)du = \int a(sy)\mu(dy).\int b(u)du$

et on en déduit que $\bar{s}$ <u>préserve</u> $\bar{\mu}$ <u>si et seulement si</u> s <u>préserve</u> μ .

Soit $(y,u)\in\bar{\Omega}_n$; on a $f_n(y)\leqq u< f_{n+1}(y)$, donc $f_n(y)+f(s^{-1}y)\leqq u + f(s^{-1}y) < f_{n+1}(y)+f(s^{-1}y)$, ou $f_{n+1}(s^{-1}y) \leqq u+f(s^{-1}y)< f_{n+2}(s^{-1}y)$, et finalement $\bar{s}^{-1}(y,u)\in\bar{\Omega}_{n+1}$. L'application $\bar{s}^{-1}$ fait donc "monter d'un échelon" , l'application $\bar{s}$ descendre d'un échelon . Donc $\tilde{\Omega}$ rencontre toute orbite du groupe $(\bar{s}^k)$ suivant un point unique. Si nous notons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence dont les classes sont les orbites du groupe, nous pouvons <u>identifier</u> $\bar{\Omega}/\mathcal{R}$ à $\tilde{\Omega}$.

Remarquons maintenant que les applications $\bar{\theta}_t$ sont compatibles avec $\mathcal{R}$: si $(x,u) = (y,v)$ mod. $\mathcal{R}$, il existe un k tel que $x=s^ky$ et $u = v-f_k(y)$, et alors $u+t = v+t-f_k(y)$. D'où par passage au quotient un groupe d'automorphismes de l'ensemble $\bar{\Omega}/\mathcal{R} = \tilde{\Omega}$, que l'on peut expliciter

(3.5) si $(y,u)\in\tilde{\Omega}$, $\tilde{\theta}_t(y,u) = (s^ky, u+t-f_k(y))$
k étant tel que $f_k(y) \leqq u+t < f_{k+1}(y)$

Voici le résultat principal de ce paragraphe.

P2 PROPOSITION. <u>Si</u> s <u>préserve</u> μ , <u>les</u> $\tilde{\theta}_t$ <u>préservent</u> P . <u>Inversement, si</u> P <u>est une mesure bornée sur</u> $\tilde{\Omega}$, <u>invariante par les</u> $\tilde{\theta}_t$, <u>alors il existe une mesure</u> μ <u>σ-finie sur</u> Ω , <u>invariante par</u> s, <u>telle que</u> $P=\mu\otimes\ell|_{\tilde{\Omega}}$.

[La condition que P soit bornée est trop forte : examiner la démonstration]

DEMONSTRATION. Soit $\bar{P}$ la périodifiée de la mesure P sur $\tilde{\Omega}$, par rapport au groupe $(\bar{s}^k)$: $\bar{P} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{s}^k(P)$

Si l'on part de μ , que l'on forme $\bar{\mu}$, puis P, puis $\bar{P}$, on a $\bar{P}= \bar{\mu}$ si et seulement si $\bar{s}$ préserve $\bar{\mu}$, i.e. si s préserve μ. Soit A $\subset \tilde{\Omega}$; deux éléments de A ne sont pas congrus mod. $\mathcal{R}$, donc deux éléments de $B=\bar{\theta}_t^{-1}(A)$ non plus, et les ensembles $C_n=\bar{s}^n(B\cap\bar{\Omega}_n)$ qu'on obtient en les ramenant dans $\tilde{\Omega}$ sont disjoints . Leur réunion est $\tilde{\theta}_t^{-1}(A)$. On a $P(A)=\bar{P}(A)$, tandis que

$$P(\tilde{\theta}_t^{-1}(A)) = \sum P(C_n) = \sum < \bar{s}^{-n}(P), B\cap\bar{\Omega}_n> = \sum < \bar{s}^{-n}(P),B >$$

$$= \bar{P}(B) = \bar{P}(\bar{\theta}_t^{-1}(A))$$

Ainsi P est invariante par $(\tilde{\theta}_t)$ si et seulement si $\bar{P}(A)=\bar{P}(\bar{\theta}_t^{-1}(A))$ pour $A\subset\tilde{\Omega}$, mais $\bar{P}$ étant périodique cela équivaut simplement à l'invariance de $\bar{P}$ par $(\bar{\theta}_t)$.

Ces remarques étant faites , on peut conclure :

a) Si μ est invariante par s, on a $\overline{P}=\overline{\mu}$ invariante par les $\overline{\theta}_t$, et P est invariante par les $\tilde{\theta}_t$.

b) Si P est invariante par les $\tilde{\theta}_t$, $\overline{P}$ est invariante par les $\overline{\theta}_t$. Soit μ la mesure sur Ω $A \mapsto \overline{P}(A\times[0,1])$; on a aussi $\mu(A)= \frac{1}{t}\overline{P}(A\times[0,t])$ pour tout t rationnel, puis réel. On en déduit que μ <u>est σ-finie</u> : en effet f est partout > 0, donc la réunion des ensembles $F_n=\{f>1/n\}$ est Ω tout entier, et d'autre part $F_n\times[0,1/n] \subset \tilde{\Omega}$, donc $\mu(F_n) = n\overline{P}(F_n\times[0,1/n]) \leqq n\|P\| < \infty$: c'est le seul point où intervient le caractère borné de P. Du fait que $\overline{P}$ est invariante par les $\overline{\theta}_t$, on déduit alors immédiatement que $\overline{P}=\mu\otimes\ell = \overline{\mu}$, et alors l'invariance de $\overline{P}$ par $\overline{s}$ signifie que μ est invariante par s.

DEFINITION. Si μ est invariante par s, le système $(\tilde{\Omega},\tilde{\underline{\underline{A}}},P,(\tilde{\theta}_t))$ est appelé le <u>flot bâti sous la fonction</u> f, au dessus du flot discret $(\Omega,\underline{\underline{A}},\mu,s)$.

Les notations seront légèrement modifiées par la suite, et on fera les rappels nécessaires : ne pas chercher à les retenir. Il faut signaler que la seconde partie de la proposition (existence de μ) est plus importante que la première.

On poursuit cette étude dans l'exposé II.

APPENDICE : ESPACES DE BLACKWELL

Les ergodiciens ont l'habitude de travailler sur une classe de "bons" espaces probabilisés, qu'ils appellent " Lebesgue spaces" (à vrai dire, il s'agit d'une terminologie russe). Il s'agit malheureusement d'une notion qui n'est guère utilisée hors de la théorie ergodique. Nous la remplacerons par la notion d'espace de BLACKWELL, qui couvre à peu près tous les espaces usuels des probabilités. Pour les détails, voir MEYER, Probabilités et Potentiels, chap.III.

Un espace mesurable $(\Omega,\underline{\underline{A}})$ est dit de BLACKWELL si la tribu $\underline{\underline{A}}$ est séparable, et si pour toute v.a. réelle X, l'image $X(\Omega)$ est une partie analytique (souslinienne) de $\mathbb{R}$. Une sous-tribu séparable d'une tribu de BLACKWELL est encore une tribu de BLACKWELL (c'est évident) ; un produit dénombrable de tribus de BLACKWELL est une tribu de BLACKWELL (c'est moins évident...) ; si $\underline{\underline{A}}$ est une tribu de BLACKWELL, la tribu induite par $\underline{\underline{A}}$ sur $\Omega'\in\underline{\underline{A}}$ est une tribu de BLACKWELL (évident). Enfin, si E est un espace polonais, sa tribu borélienne est de BLACKWELL.

Quelle est l'utilité des espaces de BLACKWELL ? Elle tient surtout au théorème suivant :

T3 THEOREME. Soient $(\Omega,\underline{\underline{A}})$ un espace de BLACKWELL, $\underline{\underline{B}}$ une sous-tribu séparable de $\underline{\underline{A}}$, X une v.a. réelle $\underline{\underline{A}}$-mesurable. Si X est constante sur chaque atome de $\underline{\underline{B}}$, X est $\underline{\underline{B}}$-mesurable.

Voici un exemple d'application. Donnons nous un flot $(\Omega,\underline{\underline{A}}^o,P,(\theta_t))$, $\underline{\underline{A}}^o$ étant une tribu de BLACKWELL. L'application $(t,\omega)\mapsto\theta_t\omega$ est mesurable de $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\underline{\underline{A}}^o$ dans $\underline{\underline{A}}^o$, donc si $K\in\underline{\underline{A}}^o$, $X(t,\omega)=I_K\circ\theta_t\omega$ est mesurable par rapport à la tribu de BLACKWELL $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\underline{\underline{A}}^o$. Soit $\underline{\underline{J}}$ une sous-tribu invariante séparable ; prenons $K\in\underline{\underline{J}}$. Deux points (t,ω) (t',ω') de $\mathbb{R}\times\Omega$ appartiennent au même atome de $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\underline{\underline{J}}$ si et seulement si $t=t'$ et ω et ω' appartiennent au même atome de $\underline{\underline{J}}$, mais alors il en est de même de $\theta_t\omega$ et $\theta_{t'}\omega'$, et $I_K\circ\theta_t\omega=I_K\circ\theta_{t'}\omega'$, X est constante sur les atomes de $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\underline{\underline{J}}$, et l'application $(t,\omega)\mapsto\theta_t\omega$ est mesurable lorsqu'on restreint la tribu sur Ω à $\underline{\underline{J}}$.

Si l'on considère un espace de BLACKWELL $(E,\underline{\underline{E}})$, et que l'on construit la version canonique d'un processus ponctuel discret à valeurs dans E, l'espace de base de cette version s'identifie à un sous-ensemble borélien de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\times E^{\mathbb{Z}}$: c'est donc un espace de BLACKWELL.