Séminaire de probabilités (Strasbourg)

KARL SIGMUND

Propriétés générales et exceptionnelles des états statistiques des systèmes dynamiques stables

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 294-304

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__294_0>

Propriétés générales et exceptionnelles des états statistiques de systèmes dynamiques stables

par Karl Sigmund (Göttingen)

I. Introduction

Les systèmes considérés en physique classique sont donnés par l'espace X des états, des fonctions $f:X \longrightarrow \mathbb{R}$ appelés observables, et un groupe T_t ($t \in R$) de transformations de X gouvernant l'évolution du système.

En physique statistique ce cadre est modifié:

(a) Au lieu de X on considère l'espace M(X) des probabilités sur X. Les éléments de M(X) sont appelés les états statistiques : ils représentent ce que nous savons de la configuration du système. Les éléments de X , qu'on appelle états purs, forment un sous-ensemble de M(X), celui des mesures ponctuelles. L'évolution de M(X) est celle induite par T_t. On considère donc des systèmes ayant une dynamique déterministe et des configurations stochastiques.

(b) Le mesurement d'une observable macroscopique f dans un état pur x (ou dans un état statistique μ) n'est pas un processus instantané, mais demande un certain temps T. Ce que l'on mesure n'est donc pas f(x) (ou $\int f d\mu$), mais une moyenne temporelle $\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t x)dt$ (ou $\frac{1}{T}\int_0^T (\int f dT_t\mu)dt$). On remplace ces quantités par leurs limites (pour $T \to \infty$), espérant qu'elles existent. Ceci veut dire qu'on considère les moyennes $\mu_T = \frac{1}{T}\int_0^T T_t\mu \, dt$, pour $\mu \in M(X)$, et leurs limites, qui, si elles existent, sont invariantes sous T_t. On appelle ces états invariants des états d'équilibre.

On s'interesse donc aux descriptions des états d'équilibre et à l'évolution asymptotique des moyennes temporelles μ_T . Dans cet article, on se concentrera sur quelques classes de transformations structurellement stables et essayera de décrire la situation générique.

Pour simplifier, on considèrera au lieu du groupe de transformations $\{T_t: t \in R\}$ le groupe $\{T^n: n \in \mathbb{Z}\}$. La moyenne temporelle $\frac{1}{T}\int_0^T T_t\mu \, dt$ sera donc remplacée par $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} T^n\mu$.

II. Préliminaires

Soit X un espace compact avec une métrique d. Dénotons par C(X) l'espace des fonctions continues sur X, par B(X) l'espace des sous-ensembles boréliens , et par M(X) l'espace des probabilités boréliennes sur X. Munissons M(X) de la topologie faible: μ_n converge vers μ si et seulement si $\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu$ pour tout $f \in C(X)$. Alors M(X) est compact et admet une metrique p (la metrique de Prohorov) définie par

$$p(\mu,\nu) = \inf\{\varepsilon>0: \mu(A) \leq \nu(A^{\varepsilon})+\varepsilon \text{ et } \nu(A) \leq \mu(A^{\varepsilon})+\varepsilon \text{ pour tout } A \in B(X)\},$$

où $A^{\varepsilon} = \{x \in X: d(x,A) < \varepsilon\}$. Pour $x \in X$ soit $\pi(x)$ la mesure ponctuelle définie par $\pi(x)(A)=1$ si $x \in A$, $=0$ si $x \notin A$. L'application $x \longrightarrow \pi(x)$ est un homéomorphisme de X dans M(X). M(X) est convexe et les mesures ponctuelles sont exactement les points extrêmaux de M(X). Il s'ensuit que les combinaisons convexes de mesures ponctuelles (c'est à dire les mesures à support fini) sont denses dans M(X).

Soit T un homéomorphisme de X sur soi-même. T induit un homéomorphisme de M(X) sur soi-même, que l'on denote encore par T , defini par $T\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$ pour $A \in B(X)$. On a $T\pi(x) = \pi(Tx)$ pour $x \in X$.

Pour $\mu \in M(X)$ posons $\mu^N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} T^n\mu$ et désignons par $V(\mu)$ l'ensemble des points d'accumulation de μ^N. Il est facile à voir que $V(\mu)$ est non-vide, fermé et connexe et que tout élément de $V(\mu)$ est T-invariant.

Soit $M_T(X)$ l'ensemble des probabilités T-invariantes. $M_T(X)$ est non-vide, compact et convexe. Si $T \neq Id$, $M_T(X)$ est rare dans M(X). Il est bien connu que les points extrêmaux de $M_T(X)$ sont exactement les mesures ergodiques, c'est à dire les $\mu \in M_T(X)$ telles que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

pour $A,B \in B(X)$. On vérifie facilement que deux mesures ergodiques sont mutuellement singulières.

Si $\nu \in M(X)$ est absolument continue par rapport à $\mu \in M_T(X)$, et si μ est ergodique, alors $\nu^N \to \mu$. Si, par surcroit, μ est même fortement mélangeante, c'est à dire si

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

pour $A,B\in B(X)$, alors on a même $T^n\nu \longrightarrow \mu$.

Si $M_T(X)$ consiste en un seul element μ_o , on dit que T est <u>uniquement ergodique</u>. Dans ce cas μ_o est évidemment ergodique et l'on a $\mu^N \longrightarrow \mu_o$ pour tout $\mu\in M(X)$.

Mais il arrive souvent que T ne soit pas uniquement ergodique. Quelles sont, dans ce cas, les propriétés des mesures invariantes, et quel est le comportement des moyennes temporelles ? Nous allons essayer de donner une réponse partielle en décrivant les propriétés 'typiques' des éléments de $M_T(X)$, et le comportement 'typique' des moyennes temporelles μ^N.

Mais que veut dire typique? Si l'on connaissait une mesure 'raisonnable' sur $M(X)$, ou sur $M_T(X)$, on dirait que c'est une propriété valide presque partout, par rapport à cette mesure. Mais on n'en connait pas. Cependant, $M(X)$ et $M_T(X)$ sont compacts et metriques, donc des espaces de Baire. Il est donc raisonnable de dire qu'une propriété est typique si elle est <u>générique</u>, c'est à dire si elle est valide pour un ensemble ouvert dense, ou pour une intersection dénombrable de tels ensembles, donc pour un G_δ dense. De même, une propriété sera considérée comme exceptionnelle si elle n'est valide que pour un ensemble maigre , c'est à dire un ensemble contenu dans une union dénombrable de fermés rares.

III. Un example

Soit $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ le tore à deux dimensions et T la transformation définie par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,Z)$, qui transforme $(x_1,x_2)\in X$ dans $(2x_1+x_2 \pmod 1), x_1+x_2 \pmod 1))$. T est un homéomorphisme de X sur soi-même. On sait que les points périodiques de T sont exactement les points à coordonnées rationelles. Donc les points périodiques sont denses. Remarquons aussi que T est <u>topologiquement transitif</u> (il existe des orbites denses dans X) et même <u>topologiquement mélangeant</u>, c'est à dire telle que pour deux ouverts $U,V\subset X$ il existe un N avec $T^nU\cap V\neq\phi$ pour tout $n>N$.

Soit λ la mesure de Lebesgue sur X. Alors $\lambda\in M_T(X)$. Il y a bien d'autres mesures T-invariantes sur X. En particulier, soit $x\in X$ tel que $T^px = x$. Alors la mesure $\frac{1}{p}(\pi(x)+\pi(Tx)+\ldots +\pi(T^{p-1}x))$ est dans $M_T(X)$. C'est une mesure invariante concentrée sur une orbite périodique. Appelons une telle mesure une <u>mesure o.p.</u>.Ces mesures sont évidemment ergodiques. $M_T(X)$ est un espace convexe à dimension infinie. Il est naturel de

Demandons donc quelles sont les propriétés typiques des éléments de $M(X)$ et de $M_T(X)$.Le résultat suivant est d'une grande utilité pour la recherche de ces propriétés génériques.

<u>Th.1:</u> Les mesures o.p. sont denses dans $M_T(X)$.

Remarquons que pour démontrer ce théorème, on a besoin de la propriété de spécification (voir section V). Il ne suffit certainement pas que les points périodiques soient denses d dans X.

Du théorème 1 s'ensuit que les mesures ergodiques sont denses. Puisque ces mesures sont les points extrêmaux d'un convexe, elles forment aussi un G_δ . Donc

<u>Th.2:</u> Génériquement, les mesures invariantes sont ergodiques.

Les mesures o.p. sont peu intéressantes en elles-mêmes, pour plusieurs raisons. Elles ont des atomes, c'est à dire des points à masse strictement positive. Elles ne chargent pas tous les ouverts. Et elles ne sont pas fortement mélangeantes (sauf si elles se reduisent à des mesures ponctuelles). En tout ceci, elles se distinguent de la mesure λ . Quelle est la situation typique? On obtient:

<u>Th.3:</u> Génériquement, les mesures invariantes sont non-atomiques et chargent les ouverts.

<u>Th.4:</u> Génériquement, les mesures invariantes ne sont pas fortement mélangeantes.

Entre le mélange fort et l'ergodicité il y a la notion importante de mélange faible. $\mu\in M_T(X)$ est <u>faiblement mélangeante</u> si

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\mu(T^{-n}A\cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0$$

pour $A,B\in B(X)$.

<u>Th.5:</u> Génériquement, les mesures invariantes sont faiblement mélangeantes.

A tout $\mu\in M_T(X)$ est associé un nombre $h_\mu(T)$, l'<u>entropie</u> de μ, de la façon suivante. Soit $\alpha = \{A_1,\dots,A_n\}$ une partition finie de X en boréliens. On définit:

$$H_\mu(\alpha) = -\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\log \mu(A_i) \qquad \text{(avec } 0.\log 0=0).$$

Soit $\alpha\vee T^{-1}\alpha \vee\dots\vee T^{-N+1}\alpha$ la partition dont les éléments sont de la forme $A_{i_0}\cap T^{-1}A_{i_1}\cap \dots T^{-N+1}A_{i_{N-1}}$. On montre que

$$\lim \frac{1}{N} H_\mu(\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \ldots \vee T^{-N+1}\alpha)$$

éxiste. On dénote cette limite par $H_\mu(\alpha,T)$. Enfin on pose

$$h_\mu(T) = \sup\{H_\mu(\alpha,T) : \alpha \text{ est une partition finie en boréliens}\}.$$

On a toujours $h_\mu(T) \geq 0$. Si μ est une mesure o.p. alors $h_\mu(T) = 0$. D'autre part, $h_\lambda(T)$ est strictement positif: $h_\lambda(T)$ est égal au logarithme de la valeur absolue maximale des valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (qui servait à définir T). On obtient:

<u>Th.6:</u> Génériquement, les mesures invariantes ont entropie nulle.

Soit T_i un homéomorphisme de l'espace compact metrique X_i sur soi-même, et soit $\mu_i \in M_{T_i}(X_i)$ $(i=1,2)$. Alors μ_1 et μ_2 sont dits <u>isomorphes</u> s'il existe des $\bar{X}_i \in B(X_i)$ avec $\mu_i(\bar{X}_i)=1$ et une bijection bimesurable $\phi : \bar{X}_1 \longrightarrow \bar{X}_2$ qui transforme μ_1 en μ_2 et qui rend le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}_1 & \xrightarrow{T_1} & \bar{X}_1 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \bar{X}_2 & \xrightarrow{T_2} & \bar{X}_2 \end{array}$$

Dans ce cas , on a $h_{\mu_1}(T_1) = h_{\mu_2}(T_2)$.

Soit $\mathcal{S} = \{1,2,\ldots,s\}$ un espace fini à topologie discrète et $\mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ l'espace produit dont les éléments sont les suites bilatérales $x = (x_i)$ $(-\infty < i < +\infty)$ à éléments dans $\mathcal{S}$. Soit σ le shift défini par $(\sigma x)_i = x_{i+1}$ pour $x \in \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$. σ est un homéomorphisme de l'espace compact metrique $\mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ sur soi-même.

Soit $\bar{p} = (p_1,\ldots,p_s)$ un vecteur de probabilité, c'est à dire une mesure sur $\mathcal{S}$. La mesure produit sur $\mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ est appelée <u>mesure de Bernoulli au sens strict</u>. Elle est invariante, c'est à dire dans $M_\sigma(\mathcal{S}^{\mathbb{Z}})$. Elle est fortement mélangeante et son entropie est $-\sum p_i \log p_i$.

Cette définition de la mesure de Bernoulli de laisse généraliser. $\mu \in M_T(X)$ est dite <u>mesure de Bernoulli</u> s'il existe une mesure de Bernoulli au sens strict qui lui est isomorphe.

<u>Th.7:</u> Les mesures de Bernoulli sont denses dans $M_T(X)$.

En particulier, les mesures fortement mélangeantes et les mesures à entropie positive forment des ensembles maigres, mais denses dans $M_T(X)$.

Considérons maintenant les moyennes temporelles μ^N et l'ensemble $V(\mu)$ de leurs points d'accumulation, pour $\mu \in M(X)$.

Th.8: Soit V un ensemble non vide, fermé et connexe de $M_T(X)$. Alors l'ensemble des $\mu \in M(X)$ telles que $V(\mu) = V$ est dense dans $M(X)$, et l'ensemble des $x \in X$ tels que $V(\pi(x)) = V$ est dense dans X.

Ceci montre que pour beaucoup de mesures μ, les moyennes temporelles μ^N ne convergent pas. On peut préciser ceci. Disons que la mesure $\mu \in M(X)$ est à oscillation maximale si $V(\mu) = M_T(X)$ et si pour tout $\nu \in M(X)$ il existe une suite $n_k \uparrow \infty$ telle que $T^{n_k}\mu \longrightarrow \nu$. Disons que le point $x \in X$ est à oscillation maximale si $V(\pi(x)) = M_T(X)$ et si pour tout $y \in X$ il existe une suite $n_k \uparrow \infty$ telle que $T^{n_k}x \longrightarrow y$.

Th.9: Génériquement, les points de X et les mesures sur X sont à oscillation maximale.

IV. Transformations structurellement stables

Les théorèmes précédants sont valides pour tous les automorphismes de tores à n dimensions définis par des matrices de $SL(n,Z)$ qui sont hyperboliques, c'est à dire dont les valeurs propres ne sont pas sur le cercle unité. Ces resultats ne dependent pas de la structure linéaire de telles transformations. En effet, pour tout difféomorphisme T de cette forme, il existe un voisinage C^2 tel que tout difféomorphisme T' dans ce voisinage est topologiquement conjugé à T. Ceci veut dire que si les applications T et T' et leurs dérivées d'ordre premier et second sont suffisamment voisines, il existe un homéomorphisme ϕ du tore X sur-soi-même tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \phi\downarrow & & \downarrow\phi \\ X & \xrightarrow{T'} & X \end{array}$$

On dit dans ce cas que T est stucturellement stable. Donc les théorèmes 1 à 9 sont valides pour un ensemble ouvert (dans la topologie C^2) de difféomorphismes du tore.

Une classe importante de transformations structurellement stables sont les difféomorphismes d'Anosov, dont les automorphismes hyperboliques du tore sont des examples.

Soit X une variété riemannienne compacte, $T:X \longrightarrow X$ un difféomorphisme de classe C^2 et T^* la différentielle de T. On dit que T est un difféomorphisme d'Anosov s'il existe des constantes $c > 0$, $0 < \ell < 1$ et deux champs tangents continus C_x et D_x $(x \in X)$ invariants sous T^*, tels que $C_x \oplus D_x$ soit l'espace tangent en x et que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$

(a) $\|(T^n)^* v\| \leq c\ell^n \|v\|$ pour $v \in C_x$

(b) $\|(T^{-n}) v\| \leq c\ell^n \|v\|$ pour $v \in D_x$.

($\|\cdot\|$ designe une metrique riemannienne). On dit que T est dilatant sur D_x et contractant sur C_x.

Dans le cas d'un automorphisme hyperbolique du tore donné par une matrice A, C_x est parallèle au vecteur propre de A qui correspond à la valeur propre à l'intérieur du cercle unité, et D_x est parallèle à l'autre vecteur propre.

Une classe de difféomorphismes bien plus large encore a été introduite par Smale dans [12] . Soit Ω l'ensemble des points non-errants de T, c'est à dire des points x tels que pour tout voisinage U de x il existe un $n \neq 0$ tel que $T^n U \cap U \neq \phi$. Ω est un ensemble non vide, fermé et invariant qui contient les points périodiques. On dit que T satisfait l'axiome A si

(1) les points périodiques sont denses dans Ω,

(2) l'espace tangent de X, restreint à Ω , peut être décomposé en somme continue de deux champs de vecteurs C_x et D_x, invariants par T^* , tels que T soit contractant sur C_x et dilatant sur D_x.

Sur toute variété compacte, il existe des difféomorphismes structurellement stables satisfaisant à l'axiome A.(Il n'en est pas de même pour les difféomorphismes d'Anosov.) On conjecture que tout difféomorphisme structurellement stable satisfait à l'axiome A.

Si T satisfait à l'axiome A, Ω peut être décomposé de manière unique en nombre fini d'ensembles fermés, disjoints et T-invariants Ω^j tels que T: $\Omega^j \to \Omega^j$ soit topologiquement transitif ($1 \leq j \leq s$). Chaque Ω^j à son tour peut être décomposé d'une manière unique en un nombre fini d'ensembles fermés et disjoints Ω^j_k ($1 \leq k \leq m_j$) tels que T envoie Ω^j_k sur Ω^j_{k+1} (et $\Omega^j_{m_j}$ sur Ω^j_1) et que T^{m_j}: $\Omega^j_1 \to \Omega^j_1$ soit topologiquement mélangeant ([12] et [2]).

Ω^j_1 peut se reduire à un point : dans ce cas Ω^j est une orbite périodique isolée dans Ω. Sinon, Ω^j_1 est infini. Posons $T^{m_j} = S$, $\Omega^j_1 = Y$, et appelons les systèmes dynamiques S: Y $\longrightarrow$ Y des <u>systèmes basiques</u>. On peut montrer que les théorèmes 1 à 9 sont valides pour les systèmes basiques ([6], [7] , [10]). L'information correspondante pour T:X $\to$ X en est facile à tirer. En effet, $M_T(X)$ est juste $M_T(\Omega)$, puisque toute mesure invariante sur X est concentrée sur la partie non-errante. Tout élément de $M_T(\Omega)$ est une combinaison convexe $a_1\mu_1 + \ldots + a_s\mu_s$, avec $\mu_j \in M_T(\Omega^j)$. Enfin, il y a un homéomorphisme évident entre $M_S(Y)$ et $M_T(\Omega^j)$: à $\mu \in M_S(Y)$ correspond $\tilde{\mu} = \frac{1}{m_j}(\mu + T\mu \ldots + T^{m_j - 1}\mu) \in M_T(\Omega^j)$.

Revenons maintenant au cas d'un groupe de transformations à un paramètre réel. Toutes les notions utilisées dans ce qui précède ont un analogue continu. Les théorèmes 1,2,3,8 et 9 ont été étendus au cas de flots différentiables satisfaisant (l'analogue de) l'axiome A ([8] et [10]). (Les résultats correspondant aux théorèmes 4 et 6 semblent facile à démontrer, ceux des théorèmes 5 et 7 peut-être moins). En particulier, 1,2,3,8 et 9 sont valides pour les flots géodésiques sur des variétés compactes à courbure négative. Ce sont là des systèmes dynamiques déjà assez 'mécaniques'. Ainsi, Kolmogoroff a remarqué que l'on peut définir une surface fermée W (dans l'espace euclidien à 3 dimensions) et placer près de W un nombre fini de centres d'attraction et de répulsion tels que sous l'action de ce potentiel, le mouvement d'un point matériel sur W soit équivalent à un flot géodésique sur une surface à courbure négative (voir [4]). Ceci laisse espérer que l'on peut aborder les problèmes correspondants pour des modèles vraiment 'physiques' de la mécanique statistique, comme le modèle de Bohr ou le modèle de Boltzmann-Gibbs.

V. Quelques remarques sur les démonstrations

Pour démontrer les théorèmes 1 à 9 , on se sert avant tout d'une propriété topologique qui a été introduite par Bowen dans [2] . On dit que l'homéomorphisme T de l'espace compact metrique X sur soi-même satisfait la <u>propriété de spécification</u> si , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $M(\varepsilon) > 0$ tel que si x_1 et x_2 sont des points de X et a_1, a_2, b_1, b_2, et p des entiers satisfaisant

(a) $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2$
(b) $a_2 - b_1 > M(\varepsilon)$
(c) $p-(b_2-a_1) > M(\varepsilon)$

il existe un $z \in X$ tel que $T^p z = z$ et

$$d(T^j x_1, T^j z) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad a_1 \leq j \leq b_1$$
$$d(T^j x_2, T^j z) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad a_2 \leq j \leq b_2.$$

Ceci veut dire que deux pièces d'orbite quelconques $\{T^j x_1 : a_1 \leq j \leq b_1\}$ et $\{T^j x_2 : a_2 \leq j \leq b_2\}$ peuvent être approchées, à ε près, par une orbite périodique $\{T^j z\}$, pourvu que les temps $a_2 - b_1$ (pour aller de la première pièce d'orbite à la seconde) et $p-(b_2-a_1)$ (pour retourner de la seconde pièce d'orbite à la première) soient supérieurs à $M(\varepsilon)$. L'uniformité de cette condition - $M(\varepsilon)$ ne dépend ni des x_i , ni des longueurs $b_i - a_i$ des pièces d'orbite - la semble rendre très sévère: mais elle est satisfaite pour bien de transformations. En premier lieu, les systèmes basiques $S: Y \rightarrow Y$ remplissent la condition de spécification, comme l'a montré Bowen dans [2]. Il en est de même pour les shifts, et pour de nombreux examples de sous-shifts (c'est à dire des restrictions d'un shift à un sous-ensemble fermé et invariant). Cette condition est aussi remplie pour bien de transformations non-invertibles, par example pour les expansions $x \rightarrow sx \pmod 1$ de l'intervalle unité ($s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$). Mentionnons enfin que la propriété de spécification est naturelle : elle est conservée par les homomorphismes et les produits de systèmes dynamiques. De plus si $T:X \longrightarrow X$ remplit cette condition, il en est de même de $T:M(X) \longrightarrow M(X)$ (voir [9] et [1]).

La condition de spécification suffit pour démontrer les théorèmes 1,2,3,4,8 et 9. Il semble possible qu'elle le soit aussi pour les théorèmes 5,6 et 7.

Jusqu'à présent on a besoin de la <u>condition d'expansivité</u> pour démontrer le théorème 6 : cette condition est remplie s'il existe une constante δ telle que $d(T^n x_1, T^n x_2) < \delta$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ implique $x_1 = x_2$. Ruelle a montré dans [5] que spécification et expansivité suffisent pour la démonstration.

Quant aux théorèmes 5 et 7 , on se sert de la théorie des partitions de Markoff, due à Sinai et Bowen. Cette théorie affirme que les systèmes basiques $S:Y \rightarrow Y$ se laissent représenter comme images homomorphes de certains sous-shifts de type particulier (voir [3]). On peut montrer que toute mesure o.p., pour ces sous-shifts, se laisse approcher par des mesures données par des chaines de Markoff apériodiques et irréducibles [7] . Ornstein a montré que de telles mesures sont des mesures de Bernoulli, et que les images homomorphes de mesures de Bernoulli sont encore des mesures de Bernoulli ([4]). Le théorème 7 en découle facilement. Il s'ensuit que les mesures faiblement mélangeantes sont denses. Comme d'autre part elles forment un G_δ , le théorème 5 en résulte.

Bibliographie

1 W.BAUER et K.SIGMUND, Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures, to appear in Monatshefte für Math.

2 R.BOWEN, Periodic points and invariant measures for Axiom A diffeomorphisms, Transactions AMS <u>154</u> (1971) 377-397

3 R.BOWEN Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms, Amer.J.Math <u>92</u> (1970) 725-747

4 D.ORNSTEIN, Some new results in the Kolmogorov-Sinai theory on entropy and ergodic theory, Bulletin AMS <u>77</u> (1971) 878-890

5 D.RUELLE, Statistical mechanics on compact sets with Z^{ν} action satisfying expansiveness and specification, Bulletin AMS 78 (1972) 988-991

6 K.SIGMUND, Generic properties of invariant measures for Axiom A diffeomorphisms, Inventiones math.11(1970) 99-109

7 --- , Mixing measures for Axiom A diffeomorphisms, Proceedings AMS 36 (1972) 497-504

8 --- , On the space of invariant measures for hyperbolic flows, Amer. J.Math 94 (1972) 31-37

9 --- , On dynamical systems with the specification property, to appear in Transactions AMS

10 --- , On the time evolution of statistical states for hyperbolic flows, to appear

12 S.SMALE, Differentiable dynamical systems, Bulletin AMS 73 (1967) 747-817.