SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PHILIPPE ARTZNER

Quelques résultats de décomposabilité en algèbre linéaire et en algèbre quadratique aléatoires

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 285-293

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__285_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1973/74

QUELQUES RESULTATS DE DECOMPOSABILITE EN ALGEBRE LINEAIRE ET EN ALGEBRE QUADRATIQUE ALEATOIRES

par Ph. ARTZNER

Si un couple indépendant (X,Y) de sous-espaces vectoriels de R^4, de dimension 2, admet une somme presque sûrement distincte de R^4, alors celle-ci n'est pas distribuée de façon absolument continue. Application aux facteurs d'une forme quadratique positive aléatoire de rang presque sûrement constant, mais non maximum.

INTRODUCTION

La notion intrinsèque de forme quadratique positive aléatoire avait permis de montrer simplement la non-décomposabilité des lois de Wishart à un degré de liberté, dans R^k, $k>1$ [1],[2] . Une étape dans l'étude des décompositions possibles des formes quadratiques positives aléatoires dans R^k, de rang r presque sûr, mais non égal à k, consiste à étudier les rangs des éventuelles formes positives facteurs. Les noyaux de toutes ces formes étant des sous-espaces vectoriels, nous sommes conduits à étudier des intersections (ou, par dualité, des sommes) de sous-espaces vectoriels aléatoires indépendants.

ENONCE DES RESULTATS

Nous n'étudierons ici que le premier cas non trivial, celui de la dimension $k=4$.

Nous fixerons les notations et conventions suivantes :

- les droites, plans et hyperplans dont nous parlerons seront toujours des sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^4$;

- les notions d'absolue continuité et d'ensembles de mesure nulle seront relatives à des mesures lebesguiennes normalisées, sur les grassmaniennes des droites, plans et hyperplans ci-dessus.

THEOREME 1. - Soit (X,Y) un couple indépendant de plans aléatoires de $\mathbb{R}^4$, tel que le sous-espace aléatoire $Z = X + Y$ soit presque sûrement un hyperplan. La loi de Z ne peut alors être absolument continue.

THEOREME 2. - Soit (Q_1 , Q_2) un couple indépendant de formes quadratiques positives aléatoires dans $\mathbb{R}^4$, tel que la forme $Q = Q_1 + Q_2$ soit presque sûrement de rang 3 , et que sa loi soit absolument continue. Alors il existe deux entiers r_1 , r_2 tels que :

$$r_1 + r_2 = 3 , \quad \text{rang } (Q_i) = r_i \quad 1 \leq i \leq 2 , \text{ presque sûrement} .$$

Première Partie

LE THEOREME 1 ETABLIT LE THEOREME 2

Désignons par R, R_1, R_2 les rangs, aléatoires, des formes Q_1+Q_2, Q_1, Q_2 ; en tout état de cause, nous avons la double inégalité :

$$\max(R_1,R_2) \leq R \,(= 3 \text{ p.s.}) \leq R_1+R_2 \ .$$

Nous allons montrer successivement ici :

(i) que les événements $(R_1 = 3,\ R_2 > 0)$ et $(R_2 = 3,\ R_1 > 0)$ sont de probabilité nulle.

(ii) que le Théorème 1 prouve que $P\{R_1 = R_2 = 2\} = 0$.

Il en résulte alors que $P\{R_1 + R_2 = 3\} = 1$, ce qui établit le Théorème 2 puisque R_1 et R_2 sont indépendants.

Preuve du point (i). - Supposons, par exemple, que $P\{R_2 = 3\ ,\ R_1 = 1\} > 0$. Par renormalisation de la restriction de la probabilité à l'événement $\{R_2 = 3\ ,\ R_1 = 1\}$ nous pouvons supposer que $P\{R_2 = 3\ ,\ R_1 = 1\} = 1$. Le noyau K de Q_1+Q_2 étant l'intersection des noyaux K_1 et K_2 de Q_1 et Q_2, nous trouverions que presque sûrement K_2 serait une droite, contenue dans l'hyperplan K_1 dont elle est cependant stochastiquement indépendante.

De façon précise, nous utilisons le :

LEMME 3. - Soit (X,Y) le couple aléatoire indépendant formé, soit d'une droite, soit d'un plan, soit d'un hyperplan X, et d'une droite Y de $\mathbb{R}^4$. Si presque sûrement $X \cap Y = Y$, il n'est pas possible que la loi de $X \cap Y$ soit absolument continue.

Si la loi de Y était absolument continue, pour tout x droite, plan ou hyperplan de R^4, on aurait $P\{x \supset Y\} = 0$, et, par intégration par rapport à la loi de X, on trouverait que $P\{X \supset Y\} = 0$.

Le lemme 1 établit ainsi le point i).

Preuve du point (ii). - Là encore, il suffit d'examiner le cas où $P\{R_1 = R_2 = 2\} = 1$. Les sous-espaces orthogonaux à K, K_1, K_2 vérifient alors les hypothèses du Théorème 1 :

$$K^\perp = K_1^\perp + K_2^\perp , \qquad K^\perp \text{ presque sûrement de dimension } 3 ;$$

ce théorème établit que la loi de K ne peut être absolument continue, ce qui serait pourtant le cas si la loi de $Q_1 + Q_2$ était absolument continue, puisque nous allons montrer en effet que l'application $\varkappa$ associant à une forme quadratique positive de rang 3, son noyau, est une fibration sur l'espace projectif $P(R^4)$ des droites de R^4.

Soit q_o une forme de rang 3, de noyau k_o. L'application ψ :

$$q \mapsto (\text{noyau de } q \text{ , restriction de } q \text{ à } k_o^\perp)$$

est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de q_o, sur le produit de $P(R^4 \cap \complement(k_o^\perp))$ par $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ espace des formes quadratiques positives sur k_o^+, non dégénérées. Par l'application ψ, l'application $\varkappa$ est transformée en la projection sur le premier facteur.

Seconde Partie

PREUVE DU THEOREME 1

Nous aurons à utiliser plusieurs fois le

LEMME 4. - *Soit* (X,Y) *un couple indépendant de plans aléatoires de* $\mathbb{R}^4$ *, tel que* $X + Y$ *soit presque sûrement un hyperplan. Pour tout* a *appartenant au support de la loi de* X *, on a l'égalité :*

$$P\{\text{dimension de } a + Y \leq 3\} = 1 .$$

Soit en effet (V_n) une base décroissante de voisinages ouverts de a. Définissons la suite d'ensembles :

E_n = ensembles des plans y tels qu'il existe x dans V_n avec $x + y \neq \mathbb{R}^4$.

Nous allons montrer

. que pour tout n , $P\{Y \in E_n\} = 1$,

. que pour tout $b \in \bigcap_n E_n$, $a + b \neq \mathbb{R}^4$,

et le lemme 4 sera établi.

Les événements $\{X \in V_n$ et $Y \in E_n\}$ et $\{X \in V_n\}$ ont même probabilité puisque $X + Y$ est presque sûrement de dimension trois.

Puisque $P\{X \in V_n\} > 0$ et que (X,Y) est un couple indépendant, nous trouvons que

$$P\{Y \in E_n\} = P\{Y \in E_n | X \in V_n\} = 1 .$$

Si pour $b \in \bigcap_n E_n$ on avait $a + b = R^4$, il en serait de même en remplaçant a par a' assez voisin de a, ce qui est contraire à la définition de $\bigcap_n E_n$. Le lemme 4 est ainsi établi.

Nous noterons S_X et S_Y les supports respectifs des lois de X et de Y.

PROPOSITION 5. - Avec les données et les hypothèses du Théorème 1 on peut affirmer, s'il existe a et b dans S_X tels que dimension de $a + b = 3$,

- soit que $P\{Y \subset a+b\} = 1$
- soit que la loi de $X + Y$ n'est pas absolument continue.

Appliquons en effet le lemme 4 :

$$P\{a+Y \neq R^4\} = 1 \quad , \quad P\{b+Y \neq R^4\} = 1 \ .$$

Il résulte de là que

$$P\{Y \subset a+b \quad \text{ou} \quad Y \supset a \cap b\} = 1 \ .$$

Si donc $P\{Y \subset a+b\} \neq 1$, on peut affirmer que la loi de $Z = X + Y$ charge la sous-variété de dimension deux constituée par ceux des hyperplans de R^4 qui contiennent la droite $a \cap b$; cette loi ne peut donc être absolument continue.

PROPOSITION 6. - Avec les données et les hypothèses du Théorème 1 on peut affirmer, s'il existe a et b dans S_X tels que dimension de $a+b = 3$, que la loi de $X+Y$ n'est pas absolument continue.

Si en effet on a trouvé, à la suite de la proposition 5, que $P\{Y \subset a+b\} = 1$, on sait que pour tout couple c,d de points distincts de S_Y on a d'une part $c+d = a+b$ et d'autre part $P\{X \subset c+d\} = 1$. Il en résulte que $P\{X$ et Y inclus dans $a+b\} = 1$ et que Z est presque sûrement contenu dans $a+b$.

Pour établir le Théorème 1 , il suffit maintenant de démontrer la

PROPOSITION 7. - Avec les données et les hypothèses du Théorème 1, on peut affirmer, si quels que soient $a,b \in S_X$, $a \neq b$, $a+b = \mathbb{R}^4$, que la loi de $Z = X+Y$ n'est pas absolument continue.

Démonstration. -

A. - Il suffit d'examiner le cas où l'on peut trouver dans S_X au moins trois éléments a,b,c tels que

$$a+b = b+c = c+a = \mathbb{R}^4$$

$$P\{\text{dimension de } a+Y = 3\} = 1$$

$$P\{\text{dimension de } b+Y = 3\} = 1$$

$$P\{\text{dimension de } c+Y = 3\} = 1$$

puisque si par exemple $P\{Y=c\} > 0$, on aurait $P\{Z \supset c\} > 0$, et la loi de Z ne serait pas absolument continue.

B. - Soient alors

V l'ensemble des plans x tels que dimension de $x+a = 3$, dimension de $x+b = 3$.

W le sous-ensemble des éléments x de V tels que dimension de $x+c = 3$.

On trouve que V est une sous-variété de la grassmanienne des plans de $\mathbb{R}^4$, difféomorphe au produit de la droite projective par elle-même, dans l'application

$$x \mapsto (x \cap a \ , \ x \cap b) \ .$$

C. - Montrons que W est une sous-variété de dimension un de V . Soit (v,w) une base du plan c ; puisque $a+b = \mathbb{R}^4$ on peut écrire

$$v = e_1 + e_3 \qquad e_1 \in a,\ e_3 \in b$$

$$w = e_2 + e_4 \qquad e_2 \in a,\ e_4 \in b\ .$$

Si on avait $e_1 - \lambda e_2 = 0$, $\lambda \neq 0$, on trouverait que $v - \lambda w = e_3 - \lambda e_4$ ce qui est impossible ; ainsi (e_1, e_2, e_3, e_4) forme une base de R^4 . Dans l'ouvert A de V constitué par les plans $x_{\alpha,\gamma} = (R.(\alpha e_1 + e_2)) \oplus (R.(\gamma e_3 + e_4))$, les éléments qui appartiennent à W sont ceux pour lesquels le rang du système de vecteurs $(e_1 + e_3, e_2 + e_4, \alpha e_1 + e_2, \gamma e_3 + e_4)$ est trois, c'est-à-dire pour lesquels $\gamma - \alpha = 0$.

D. - Soit alors M la variété, de dimension 3, des hyperplans de R^4 qui ne contiennent ni a ni b . Si la loi de Z est absolument continue, on doit avoir

$$P\{Z \in M\} = 1\ .$$

Définisson l'application π de M sur V par

$$\pi(z) = (z \cap a) \oplus (z \cap b)\ ,$$

et montrons que c'est une fibration de la variété M sur la variété V .

Considérons par exemple pour l'élément x_o de M repéré par le couple des vecteurs $(\alpha_o, 1) \in x_o \cap a$, $(\gamma_o, 1) \in x \cap b$, le voisinage ouvert U repéré par l'ensemble des couples de vecteurs $(\alpha, 1)$, $(\gamma, 1)$, $\alpha \in R$, $\gamma \in R$. L'image réciproque de U par π est l'ensemble des classes de quadruplets $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ où $\beta\delta \neq 0$ (pour la relation d'équivalence définissant l'espace projectif associé à R^4) .

On a l'égalité :

$$\pi(\text{classe de } (\alpha,\beta,\gamma,\delta)) = (\text{classe de } (\alpha/_\beta, 1)\ , \text{classe de } (\gamma/_\delta, 1))\ .$$

L'application

$$\text{classe de } (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \rightarrow (\text{classe de } (\alpha/_\beta,1)\,,\ \text{classe de } (\gamma/_\delta,1),\ \beta/_\delta)$$

réalise un difféomorphisme de $\pi^{-1}(U)$ sur le produit $U \times R^*$, qui transforme l'application π en la projection sur le facteur U .

E. - L'élément $\pi(Z)$ est presque sûrement défini, et nous allons montrer qu'il est presque sûrement égal à Y .

On sait en effet qu'avec probabilité 1 :

dimension de $Y \cap a = 1$ dimension de $Y \cap b = 1$

dimension de $Z \cap a = 1$ dimension de $Z \cap b = 1$,

tandis que l'on a toujours $Y \subset Z$.

F. - D'après le point A , nous savons que $P\{Y \in W\} = 1$, c'est-à-dire que $P\{\pi(Z) \in W\} = 1$.

G. - L'image réciproque de la sous-variété W de V par la fibration π est une sous-variété $\pi^{-1}(W)$, de codimension un , de M . Cette sous-variété porte la masse unité pour la loi de Z , ce qui établit que cette loi n'est pas absolument continue.

REFERENCES

[1] Ph. ARTZNER, Sur les formes quadratiques aléatoires et les variables du chi-deux généralisé. (Thèse Sciences Math., Strasbourg 1972) .

[2] P. LEVY, The arithmetical character of the Wishart distribution. Proc. Cambridge Phil. Soc., 44 , 1948, p. 295-297 .