SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

F. NANOPOULOS

Mesures d'information et représentation de semi-groupes associés

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 154-205
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__154_0>

Université de Strasbourg 1973/74

Séminaire de Probabilités

MESURES D'INFORMATION ET REPRESENTATION DE SEMI-GROUPES ASSOCIES

par F. NANOPOULOS

INTRODUCTION

Les travaux récents de Joseph Kampé de Fériet et Bruno Forte [4,5,6] constituent la première tentative pour définir la notion de "mesure d'information associée à un évènement" (en abrégé "information") d'une manière indépendante de la notion de probabilité. Ainsi l'information est définie sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{E})$ comme une application $J : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant essentiellement une propriété fondamentale appelée "composition". On suppose l'existence d'une loi de composition interne T sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :

$$\forall\ A, B \in \mathcal{E}\ ,\ A \cap B = \emptyset \quad \text{on a} \quad J(A \cap B) = J(A)\ T\ J(B)$$

et l'on dit que J admet T comme fonction de composition.

Le cadre naturel de l'étude des fonctions de composition sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ est celui des semi-groupes de composition. Un semi-groupe de composition est un couple (A,T) où A est un intervalle fermé $A = [a,b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ et T une loi de composition interne sur A vérifiant :

$$(1.2) \quad \begin{cases} (p_1) & T \text{ est associative} \\ (p_2) & T \text{ est continue} \\ (p_3) & b \text{ est élément neutre à droite} \\ (p_4) & \text{Les sections de } T \text{ sont croissantes.} \end{cases}$$

De tels semi-groupes ont été étudiés par FAUCETT [3], MOSTER et SHIELDS [9] et plus récemment par Mme LIGNY [8] .

L'étude du comportement de divers types d'information vis-à-vis de l'indépendance ensembliste ($\mathbb{M}$-indépendance de D. KAPPOS [14]) a conduit J.K. de FERIET et B. FORTE [6] à introduire le concept de "fonction de composition universelle". Ce sont des fonctions de composition sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ par rapport auxquelles l'addition est distributive.

RESUMES DES RESULTATS

Après une présentation rapide des concepts de "fonction de composition" et de "mesure d'information", nous passons à l'étude de semi-groupes de composition avec la démonstration du théorème (II.1) sur l'existence de suites T-denses. Nous montrons que si $([a,b],T)$ est un semi-groupe de composition sans idempotents intérieurs alors il existe une suite $\{r_n\}_{n\geq 0}$ d'éléments de $[a,b[$ telle que

1) $r_o = a$ et $\forall\, n \geq 0$, $r_n < r_{n+1}$
2) $\forall\, n \geq 1$, $r_n \, T r_n = r_{n-1}$
3) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = b$
4) pour tout $x \in [a,b]$ il existe $I_x \subset \mathbb{N}$ unique telle que

$$x = \underset{i\in I_x}{T} r_i \ .$$

Ce résultat s'est avéré un outil efficace pour l'étude des semi-groupes de composition. Il nous a permis de fournir des démonstrations nouvelles des théorèmes de L. MOSTERT et A. SHIELDS [9] et W. FAUCETT [5] , théorèmes de caractérisation de semi-groupes du type $\mathbb{P}$ (théorème II.3) et $\mathbb{M}$ (théorème II.4). D'autre part, grâce à ces résultats nous avons pu fournir une démonstration élégante du théorème de caractérisation des fonctions de composition universelles.

CHAPITRE I : MESURES D'INFORMATION

1. FONCTIONS DE COMPOSITION SUR $\overline{R}_+$.

Notations : Notre propos étant de définir une mesure d'information comme une fonctionnelle sur les évènements associés à une expérience, on se placera dans un espace mesurable $\{\Omega,\mathcal{E}\}$.

On notera $\overline{R}_+ = [0,+\infty]$.

Etant donnée une loi de composition interne T sur $\overline{R}_+$ et un élément $z \in \mathbf{R}_+$, on appellera "support de T en z " et l'on notera D_T^z l'adhérence de l'ensemble $\{(x,y) \in \overline{R}_+ \times \overline{R}_+ | xTy > z\}$. Ainsi D_T^0 désigne le support (au sens courant du terme) de T .

D'autre part, on dira que T est "croissante" (resp. strictement croissante sur son support D_T^0) si toutes les applications, sections de T , sont croissantes (resp. strictement croissantes sur leurs supports).

Des applications $F : \overline{R}_+ \times \overline{R}_+ \to \overline{R}_+$ seront utilisées pour exprimer la mesure d'information J de l'union de deux évènements disjoints $A,B \in \mathcal{E}$ en fonction de l'information de chacun d'eux : $J(A \cup B) = F(J(A),J(B))$.

Une telle fonction doit par conséquent "respecter" d'une part, les propriétés de l'union de deux ensembles et d'autre part, les propriétés que l'on imposera à une mesure d'information.

Les propriétés fondamentales d'une telle fonction sont données dans la définition suivante :

Définition I-1 . - Fonctions de composition sur $\overline{R}_+$.

On appelle fonction de composition sur $\overline{R}_+$, toute loi de composition interne T sur $\overline{R}_+$, vérifiant les conditions suivantes :

(C-1) : $\forall\ x,y,z \in \overline{\mathbb{R}}_+$ $xT(yTz) = (xTy)Tz$: Associativité

(C-2) : $\forall\ x,y \in \overline{\mathbb{R}}_+$ $xTy = yTx$: Commutativité

(C-3) : $\forall\ x \in \overline{\mathbb{R}}_+$ $xT(+\infty)=x$: $+\infty$ élément neutre

(C-4) : L'application $F : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par $F(x,y) = xTy$ est continue

(C-5) : T est croissante. i.e. $(\forall\ (x,y),(x,y') \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ : y < y' \Rightarrow xTy \leq xTy')$.

On notera Λ_T l'ensemble des idempotents de la loi T i.e. :

$$\Lambda_T = \{x \in \overline{\mathbb{R}}_+ \mid xTx = x\} .$$

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}_+$, muni d'une fonction de composition T, apparaît alors comme un semi-groupe topologique commutatif, muni d'un élément neutre $(+\infty)$ et qui est croissant.

Donnons quelques exemples de fonctions de composition, exemples qui nous seront utiles par la suite.

<u>Exemple</u> 1. - Fonction de composition du type INF.

Pour $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ on pose $xTy = \inf\{x,y\}$.

Il est évident que $T : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifie les conditions (c-i) $i = 1,\dots,5$; T est donc une fonction de composition sur $\overline{\mathbb{R}}_+$.

<u>Exemple</u> 2. - Fonction de composition de Shannon.

Pour $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ et $c \in]0,+\infty[$, on pose

$$xT_c y = -c \operatorname{Log}[e^{-\frac{x}{c}} \dotplus e^{-\frac{y}{c}}]$$

où l'on convient que :

a) $\operatorname{Log} x$ désigne le logarithme néperien du nombre x.

b) $\operatorname{Log} 0 = -\infty$, $e^{-\infty} = 0$.

c) Pour $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$, $x \dotplus y = \inf(1,x+y)$.

Comme on le verra c'est la fonction de composition associée à l'information de Shannon. Elle est liée à la fonction de composition du type INF par la relation suivante :

$$\lim_{c \to 0} xT_c y = \mathrm{INF}(x,y) .$$

<u>Exemple</u> 3 . - Généralisation de l'exemple 2 .

La fonction de composition de Shannon est définie à partir d'une fonction d'une variable réelle ; ceci nous suggère la généralisation suivante :

Considérons un intervalle fermé $[0,a]$, où $0 < a \leq +\infty$, et une application $h : \overline{R}_+ \to [0,a]$ bijective, décroissante.

Définissons "l'addition contractée" sur $[0,a]$ en posant

(1) $$\forall\ (x,y) \in [0,a] \times [0,a] \qquad x \dotplus y = \inf(x+y,a) .$$

La loi de composition $\dotplus$ sur $[0,a]$ est continue, associative, commutative, croissante et admet a comme élément neutre, de plus :

(2) $$x+y \leq a \Leftrightarrow x+y = x \dotplus y .$$

On déduit alors une loi de composition T_h sur $\overline{R}_+$ en posant

$$\forall\ (x,y) \in \overline{R}_+ \times \overline{R}_+ \qquad xT_n y = h^{-1}[h(x) \dotplus h(y)]$$

où h^{-1} désigne l'application inverse de h . Il est facile de voir que T_n est une fonction de composition sur $\overline{R}_+$. De plus, on a

$$\forall\ z \geq 0 \qquad D^z_{T_n} = \{(x,y) \in \overline{R}_+ \times \overline{R}_+ | h(x) + h(y) \leq h(z)\} .$$

Nous sommes maintenant en mesure de présenter le concept de mesure d'information.

2. DEFINITION I-2 . - MESURE D'INFORMATION.

Considérons un espace mesurable $\{\Omega,\mathcal{E}\}$. On appellera mesure d'information (ou information) sur $\{\Omega,\mathcal{E}\}$ une application J définie sur $\mathcal{E}$ à valeurs dans $\overline{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

PROPRIETE I. - *Valeurs universelles*: $J(\Omega) = 0$, $J(\emptyset) = +\infty$;

ces valeurs sont universelles en ce sens qu'on les impose à J quel que soit Ω (fini ou infini) et quelle que soit la definition particulière de J sur $\mathcal{E}$.

PROPRIETE II. - J *est monotone* . Autrement dit :

$\forall A \in \mathcal{E}$ et $\forall B \in \mathcal{E}$ tels que $A \subset B$ on a : $J(B) \leq J(A)$.

PROPRIETE III. - J *est σ-composable.*

Pour définir la σ-composition de J posons :

$$\Delta_J^z = \{(x,y) \in \overline{R}_+ \times \overline{R}_+ | \exists\, A,B \in \mathcal{E} \text{ , } A \cap B = \emptyset \text{ , } x = J(A) \text{ , } y = J(B), J(A \cup B) \geq z\} \text{ .}$$

On dira alors que J est composable (resp. σ-composable) s'il existe une fonction de composition T sur $\overline{R}_+$ telle que :

i) $\forall z \in R_+ \quad \Delta_J^z \subset D_T^z$

ii) Pour toute famille disjointe $\{A_i\}_{i \in I}$, I fini (resp. dénombrable), d'éléments de $\mathcal{E}$ on a :

$$J(\bigcup_{i \in I} A_i) = \underset{i \in I}{T}\, J(A_i) \text{ .}$$

Remarque 1 : Les propriétés que nous imposons à une mesure d'information diffèrent des postulats utilisés par J. KAMPE de FERIET [5] essentiellement sur deux points :

a) Le postulat de J.K.F. sur l'indépendance au sens de l'information d'une famille $\mathcal{K}$ de sous-tribus de $\mathcal{E}$, M-indépendantes, ne figure pas parmi les propriétés I , II et III . En fait nous l'envisageons au chapitre III .

b) Le postulat de σ-composition de J.K.F. ne contient pas la condition i) de la Propriété III . En fait, la condition i) est une condition de régularité qui nous permet d'avoir une équivalence parfaite entre les types d'une information et le type de sa fonction de composition (Propositions I-4, I-6).

Remarque 2 : Il serait plus précis de dire que J est T-composable (resp. T-σ-composable) au lieu de composable (resp. σ-composable) en spécifiant ainsi la fonction de composition sur $\overline{R}_+$.

En effet, on peut remarquer qu'une information J peut admettre plusieurs fonctions de composition mais qui coïncident sur Δ_J^o . Pour s'en convaincre, il suffit de prendre $\mathcal{E} = \{\Omega,\phi\}$; alors J est T-σ-composable quelle que soit la fonction de composition T sur $\overline{R}_+$. Par la suite on utilisera l'expression :"J admet T comme fonction de composition" dans le sens "J est T-σ-composable".

Remarque 3 : On impose à une mesure d'information J la propriété d'être σ-composable au lieu de composable, et ceci pour s'assurer de la continuité séquentielle ascendante de J .

En effet, on a la proposition suivante :

PROPOSITION I-1 .

> Pour qu'une application $J : \mathcal{E} \to \overline{R}_+$, T-composable, soit T-σ-composable, il faut et il suffit qu'elle possède la continuité séquentielle ascendante.

3. LES DIVERS TYPES D'INFORMATIONS.

3.1. - Informations du type $\mathbb{P}$.

L'exemple le plus connu de mesure d'information est celui de Wiener-Shannon où la mesure d'information est définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{E},P)$.

Pour tout $A \in \mathcal{E}$, on pose :

(3.1.1) $$J_c(A) = -c \operatorname{Log} (P(A))$$

où c est une constante réelle strictement positive qui dépend du choix de l'unité d'information (habituellement on choisit $c = 1/\operatorname{Log} 2$).

On peut facilement généraliser cette manière de construire des mesures d'information sur des espaces probabilisés.

PROPOSITION I-2 .

> Considérons une application $g : \overline{R}_+ \to [0,1]$ bijective, décroissante, et posons pour $x,y \in \overline{R}_+$ $xT_g y = g^{-1}[g(x) \dotplus g(y)]$. Alors pour tout espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{E},P)$ l'application
>
> (3.1.2) $$J : \mathcal{E} \to \overline{R}_+ \text{ telle que } \forall A \in \mathcal{E} \quad J(A) = g^{-1}(P(A))$$
>
> est une mesure d'information sur $(\Omega,\mathcal{E})$ admettant T_g comme fonction de composition.

La proposition I-2 nous conduit à poser les deux définitions qui suivent :

DEFINITION I-3 . - Informations du type $\mathbb{P}$.

On dira qu'une information J définie sur $(\Omega,\mathcal{E})$ est du type $\mathbb{P}$ s'il existe une mesure de probabilité P sur $(\Omega,\mathcal{E})$ et une application $g : \overline{R}_+ \to [0,1]$ bijective, décroissante, telles que :

(3.1.3) $$\forall A \in \mathcal{E} \quad J(A) = g^{-1}(P(A)) .$$

DEFINITION I-4 . - Fonctions de composition du type $\mathbb{P}$.

On dira qu'une fonction de composition T sur $\overline{R}_+$ est du type $\mathbb{P}$ s'il existe une application $g : \overline{R}_+ \to [0,1]$ bijective, décroissante, telle que :

$$\forall\ (x,y) \in \overline{R}_+ \times \overline{R}_+ \qquad xTy = g^{-1}[g(x) \dot{+} g(y)] \tag{3.1.4}$$

où $\dot{+}$ désigne l'addition contractée sur $[0,1]$.

La proposition suivante met en évidence la relation existant entre les informations et les fonctions de composition du type $\mathbb{P}$.

PROPOSITION I-3 .

a) Toute information du type $\mathbb{P}$ admet une fonction de composition du type $\mathbb{P}$.

b) Toute information admettant une fonction de composition du type $\mathbb{P}$, est du type $\mathbb{P}$.

3.2. - Informations du type $\mathbb{M}$.

La proposition I-2 se généralise facilement dans le cas des mesures dans le sens suivant :

PROPOSITION I-4 .

Considérons $\ell \in \overline{R}_+$, $\ell > 0$ et une application $f : \overline{R}_+ \to [0,\ell\,]$ bijective décroissante. Alors pour tout espace mesuré $(\Omega,\mathcal{E},\mu)$ tel que $\mu(\Omega) = \ell$ l'application $J : \mathcal{E} \to \overline{R}_+$ telle que à $A \in \mathcal{E} \to J(A) = f^{-1}(\mu(A))$ est une mesure d'information sur $(\Omega,\mathcal{E})$ admettant T_f comme fonction de composition.

Néanmoins, on peut remarquer que si $\ell < +\infty$ alors l'information $J = f^{-1} \circ \mu$ est du type $\mathbb{P}$. Seul le cas $\ell = +\infty$ présente un intérêt nouveau.

DEFINITION I-5 . - Informations du type $\mathbb{M}$.

Une information J sur $(\Omega,\mathcal{E})$ est du type $\mathbb{M}$ s'il existe une mesure μ , non finie, sur $(\Omega,\mathcal{E})$ et une application $f : \overline{R}_+ \to \overline{R}_+$ bijective décroissante telle que :

$$\forall A \in \mathcal{E} \qquad J(A) = f^{-1}[\mu(A)] \ .$$

Dans ce cas J admet une fonction de composition qui est du type suivant :

DEFINITION I-6 . - Fonctions de composition du type $\mathbb{M}$.

On dira qu'une fonction de composition T sur $\overline{R}_+$ est du type $\mathbb{M}$, s'il existe une application $f : \overline{R}_+ \to \overline{R}_+$ bijective décroissante telle que :

$$\forall \ (x,y) \in \overline{R}_+ \times \overline{R}_+ \qquad xTy \ = f^{-1}[f(x) + f(y)] \ .$$

On a une proposition analogue à I-3 pour les mesures d'information et les fonctions de composition de type $\mathbb{M}$.

PROPOSITION I-5 .

Une information J sur $(\Omega,\mathcal{E})$ est du type $\mathbb{M}$ si et seulement si elle admet une fonction de composition du type $\mathbb{M}$.

On a remarqué au début de ce chapitre qu'une information peut admettre plusieurs fonctions de composition, et l'on peut penser qu'une information peut être à la fois du type $\mathbb{P}$ et $\mathbb{M}$, mais ceci n'est possible que dans un cas très particulier.

PROPOSITION I-6 .

Si une information J sur $(\Omega,\mathcal{E})$ est à la fois du type $\mathbb{P}$ et $\mathbb{M}$, alors elle ne prend que les valeurs universelles.

Preuve : Supposons que J est à la fois du type $\mathbb{P}$ et $\mathbb{M}$, alors il existe : deux applications $f : \overline{R}_+ \to \overline{R}_+$ et $g : \overline{R}_+ \to [0,1]$, bijectives, décroissantes ; une mesure μ , non finie et une probabilité P sur $(\Omega,\mathcal{E})$ telles que :

$$J = f^{-1} \circ \mu = g^{-1} \circ P .$$

Soit $A \in \mathcal{E}$ et posons $x = J(A)$. Montrons que si $x < +\infty$, alors $x = 0$.

On a $x < +\infty \Rightarrow \mu(A) = f(x) < +\infty$ d'où $\mu(A^c) = +\infty$ et par conséquent

$$J(A^c) = f^{-1}(\mu(A^c)) = f^{-1}(+\infty) = +\infty .$$

D'autre part, $J(A^c) = g^{-1}(P(A^c)) = g^{-1}[1 - P(A)] = g^{-1}[1 - g(x)] = +\infty$.
D'où $g(x) = 1 \Rightarrow x = 0$.

3.3. - Informations du type INF .

Comme on a vu dans l'exemple 1 , au début de ce chapitre, la loi $xTy = \inf(x,y)$ est une fonction de composition sur $\overline{R}_+$.

DEFINITION I-7 . - Mesures d'information du type INF .

Nous dirons qu'une mesure d'information J sur $(\Omega,\mathcal{E})$ est du type INF , si elle admet comme fonction de composition la loi $xTy = \inf(x,y)$.

Une classe remarquable d'information du type INF est formée par des informations dérivantsd'une "fonction génératrice" ([4]) , où l'on appelle ainsi toute application

$$\Phi : \Omega \to \overline{R}_+ \quad \text{telle que} \quad \inf_{\omega \in \Omega} \Phi(\omega) = 0 .$$

En effet, étant donnée une fonction génératrice Φ sur Ω l'application $J : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{R}_+$ définie par :

$$(3.3.1) \qquad J(A) = \begin{cases} \inf\limits_{\omega \in A} \Phi(\omega) & \text{si} \quad A \neq \emptyset \\ +\infty & \text{si} \quad A = \emptyset \end{cases}$$

est une mesure d'information du type INF sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

On remarquera que si J est du type INF alors la relation $J(A \cup B) = \inf(J(A), J(B))$ reste vraie même quand A et B ne sont pas disjoints.

En fait, cette propriété caractérise les informations du type INF .

3.4. - Informations du type MIXTE .

Nous verrons lors de l'étude des semi-groupes de composition que toute fonction de composition sur $\overline{R}_+$ peut être exprimée à l'aide d'une famille au plus dénombrable de semi-groupes de trois types $\mathbb{P}$, $\mathbb{M}$ et INF . Ceci nous suggèrel d'appeler les mesures d'information (resp. fonctions de composition) n'appartenant pas à l'un des trois types cités informations (resp. fonctions de composition) du type MIXTE .

CHAPITRE II : CARACTERISATION DES DIVERS TYPES DES FONCTIONS DE COMPOSITION

1. SEMI GROUPES DE COMPOSITION (S.G.C).

Dans le premier chapitre, on a présenté divers types d'informations et de fonctions de composition. On peut donc se poser le problème de savoir, pour une information donnée, si elle est de tel ou tel type.

Or d'après les propositions I-3 , I-5 et I-6 , une réponse à ce problème peut être apportée par l'étude du type de la fonction de composition T de cette information.

L'ensemble Λ_T , ensemble des idempotents de T , joue un rôle fondamental dans cette étude car il est évident que si T admet un idempotent $c \in]0,+\infty[$, alors T n'est pas du type $\mathbb{P}$ ni du type $\mathbb{M}$.

Toutefois, on peut remarquer que si $a,b \in \Lambda_T$ tels que $a < b$ alors la restriction de T à $[a,b] \times [a,b]$ est une loi de composition interne sur $[a,b]$ vérifiant toutes les conditions imposées à une fonction de composition, à cela près que 0 est remplacé par a et $+\infty$ par b .

Ceci nous conduit à généraliser le concept de fonction de composition en nous plaçant dans un intervalle fermé $[a,b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ au lieu de $[0,+\infty]$ et d'affaiblir les conditions imposées, car comme on le verra, elles ne sont pas indépendantes.

DEFINITION II-1 . - Semi-groupes de composition (S.G.C.).

Considérons un intervalle fermé $A = [a,b] \subset \overline{R}$, et une loi de composition T , interne sur A . On dira que le couple (A,T) est un "semi-groupe de composition" s'il vérifie les conditions suivantes :

(p_1) T est associative

(p_2) $T : A \times A \to A$ est continue

(p_3) b est un élément neutre à droite

(p_4) T est croissante.

On constate qu'une fonction de composition est un S.G.C. tel que $A = \overline{R}_+$.

Remarque : "La condition (p_3) peut être remplacée par la condition plus faible

$$(p_3') \quad aTb = a \ ; \ bTb = b \ .$$

En effet, si (A,T) vérifie (p_1,p_2,p_3,p_4) alors l'application $\varphi : A \to A$ telle que $x \leadsto \varphi(x) = xTb$ est continue $-(p_2)$ - et il résulte de (p_3') : $\varphi(a) = a$; $\varphi(b) = b$. Par conséquent, $\forall\ x \in A$, $\exists\ y \in A$: $x = yTb$ d'où :
$xTb = (yTb)Tb = yT(bTb) = yTb = x$. Autrement dit (A,T) vérifie (p_3) ."

Le problème que l'on se pose est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un S.G.C. (A,T) soit isomorphe au semi-groupe $([0,1],\dot{+})$ ou à $(\overline{R}_+,+)$.

DEFINITION II-2 .

- On dira qu'un semi-groupe de composition (A,T) est du type $\mathbb{P}$ s'il est isomorphe à $([0,1],\dot{+})$ i.e.
  il existe $g : [a,b] \to [0,1]$ bijective décroissante telle que
  $$\forall\ (x,y) \in A \times A \quad xTy = g^{-1}[g(x) \dot{+} g(y)]\ ) \ .$$
- On dira qu'un semi-groupe de composition (A,T) est du type M s'il est isomorphe à $(\overline{R}_+,+)$ i.e.
  Il existe $f : [a,b] \to \overline{R}_+$ bijective décroissante telle que :
  $$\forall\ (x,y) \in A \times A \quad xTy = f^{-1}[f(x) + f(y)] \ .$$

L'ensemble des idempotents $\Lambda_T = \{x \in [a,b] : xTx = x\}$ joue un rôle fondamental dans l'étude des semi-groupes. Il est facile de voir que Λ_T est une partie fermée de $[a,b]$ contenant les points a et b .

2. SEMI-GROUPES DE COMPOSITION SANS IDEMPOTENTS INTERIEURS.

On suppose dans ce paragraphe que le semi-groupe (A,T) vérifie en plus la condition :

(p_5) $$\forall\ x \in\ ]a,b[\qquad xTx \neq x\ .$$

On en déduit les propriétés suivantes (voir [8]) :

PROPRIETE 1.

Pour tout $x \in [a,b[$ la suite $(x^n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$x^1 = x$$

$$x^{n+1} = x^n\ Tx \qquad \text{pour} \qquad n \geq 1$$

tend vers a quand $n \to +\infty$.

PROPRIETE 2.

Pour tout $x \in [a,b]$ on a $xTa = aTx = a$.

(On interprète ceci en disant que a est un zéro de (A,T).)

PROPRIETE 3.

Le point b est un élément neutre.

PROPRIETE 4.

i) Pour tout $(x,y) \in A \times A$ on a : $xTy \leq \inf(x,y)$

ii) Si $x \leq y < b$ et $xTy = x$ alors $x = a$

iii) Si pour $x \in A$ il existe $y_1,y_2 \in A$ tels que $y_1 < y_2$ et $xTy_1 = xTy_2$ alors $xTy_1 = xTy_2 = a$.

iv) Pour tout $(x,y) \in A \times A$ tel que $a < x < y$ il existe u (resp. v) unique tel que $x = yTu$ (resp. $x = vTy$).

PROPRIETE 5.

Si $x_0 \in]a,b[$ est tel que $x_0 T x_0 = a$ et $\forall\ x > x_0\ \ xTx > a$ alors $\forall\ y > x_0\ \ x_0 T y > a$.

3. THEOREME FONDAMENTAL. SUITES T-DENSES

Le théorème qui suit est essentiel pour la suite.

THEOREME II-1 .

Soit (A,T) un semi-groupe de composition sans idempotents intérieurs, vérifiant la condition :

(p_6) : Il existe $x_o \in]a,b]$ tel que $x_o T x_o = a$.

Alors il existe une suite $(r_n)_{n\geq 0}$ dans $[a,b[$ vérifiant :

i) $\{r_n\}_{n\geq 0}$ est strictement croissante et tend vers b .

ii) $r_o = a$ et $\forall\ n \geq 0\ \ r_{n+1} T r_{n+1} = r_n$

iii) Pour tout $x \in [a,b[$ il existe une sous-suite $(r_{n_k})_{k\geq 1}$ unique, extraite de $\{r_n\}_{n\geq 1}$, strictement croissante, telle que :

$$x = \lim_{m\to\infty} \mathop{T}_{k=1}^{m} r_{n_k} = \mathop{T}_{k=1}^{\infty} r_{n_k} .$$

La sous-suite correspondant à un $x \in [a,b[$ sera appelée développement de x , et on dira que la suite $\{r_n\}_{n\geq 1}$ est T-dense.

LEMME 1.

Considérons l'application $\varphi : [a,b] \to [a,b]$

$$x \to \varphi(x) = xTx .$$

Sous les conditions du théorème II-1 , l'application φ vérifie :

1) φ est continue et $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$.

2) $\forall\, x \in\,]a,b[\quad \varphi(x) < x$.

3) Il existe $\xi \in\,]a,b[$ tel que φ est strictement croissante sur $[\xi,b]$ et φ est constante, égale à a , sur $[a,\xi]$.

<u>Preuve du lemme</u> :

1) $\varphi(a) = a$, et $\varphi(b) = b$ car $a,b \in \Lambda_T$. D'autre part, φ est continue croissante car T l'est.

2) C'est évident car : $\varphi(x) = xTx \leq \inf(x,x) = x$ (propriété 4-i)) et d'autre part, $\varphi(x) = xTx \neq x$ (condition p_5) .

3) Posons $\xi = \sup\{x \in A | \varphi(x) = a\}$, alors de (p_6) on déduit que $\xi \geq x_o > a$. D'autre part, comme φ est continue croissante on a :

$$\varphi(\xi) = a \quad ; \quad \forall\, x \in [a,\xi] \qquad \varphi(x) = a\ .$$

Montrons que φ est strictement croissante sur $[\xi,b]$.

Sinon il existerait $y_1,y_2 \in [\xi,b]$, $y_1 < y_2$ tels que

$$\varphi(y_1) = \varphi(y_2) = c\ .$$

On en déduit que :

$$c = \varphi(y_1) = y_1Ty_1 \leq y_1Ty_2 \leq y_2Ty_2 = c\ ,$$

d'où $c = y_1Ty_1 = y_1Ty_2$ et comme $y_1 < y_2$, on déduit de la propriété (4-iii) que $c = a$. D'où $\varphi(y_2) = a$; or ceci est impossible car $y_2 > \xi = \sup\{x \in A | \varphi(x) = a\}$.

<u>Démonstration du théorème</u> II-1 : D'après le lemme précédent, l'application $\varphi : [\xi,b] \to [a,b]$ est bijective strictement croissante.

Posons alors $\boxed{r_o = a\ ;\ \text{pour } n \geq 0 \quad r_{n+1} = \varphi^{-1}(r_n)\ .}$

. Montrons que la suite $(r_n)_{n\geq 0}$ ainsi définie vérifie i) , ii) , iii).

i) D'après le lemme on a :

$$r_n = \varphi(r_{n+1}) < r_{n+1}$$

d'où $(r_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante, par conséquent, elle converge dans $[a,b]$. Posons $c = \lim_{n\to\infty} r_n$. On a :

$$c = \lim_n r_n = \lim_n \varphi(r_{n+1}) = \varphi(\lim_n r_{n+1}) = \varphi(c) = cTc$$

d'où $c \in \Lambda_T$ et comme $c > \xi > a$ et (A,T) est sans idempotents interieures on a,

ii) Ce point est trivial de par la définition de la suite $(r_n)_{n\geq 0}$.

iii) Il s'agit de montrer que tout $x \in [a,b[$ admet un développement unique.

. <u>Existence</u> : Considérons $x \in]a,b[$, il existe alors un entier n_1 , unique, tel que :

$$r_{n_1-1} \leq x < r_{n_1}$$

et d'après la propriété 4-iv) il existe x_1 <u>unique</u> tel que $x = r_{n_1} T x_1$.

Par récurrence on définit alors deux suites $(r_{n_k})_{k\geq 1}$ et $(x_k)_{k\geq 1}$ en posant pour $k \geq 1$:

$$(*) \begin{cases} r_{n_{k+1}} = \text{l'unique terme de la suite } (r_n)_{n\geq 1} \text{ tel que : } r_{n_k-1} \leq x_k < r_{n_{k+1}} \\ \\ x_{k+1} = \text{l'unique élément de } A \text{ tel que : } x_k = r_{n_{k+1}} T x_{k+1} . \end{cases}$$

Ces deux suites vérifient la relation suivante :

$$(**) \qquad \forall\, k \geq 0 \quad x_k < r_{n_{k+1}} \leq x_{k+1} \qquad (\text{où } x_o = x) .$$

En effet, d'après (*) on a :

$$r_{n_{k+1}} T r_{n_{k+1}} = r_{n_{k+1}-1} \leq x_k = r_{n_{k+1}} T x_{k+1}$$

et comme T est croissante on en déduit que :

$$x_k < r_{n_{k+1}} \leq x_{k+1} .$$

Il en résulte que $(r_{n_k})_{k\geq 1}$ est une sous-suite de $(r_n)_{n\geq 1}$ strictement croissante et que $(x_k)_{k\geq 1}$ est une suite strictement croissante et $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = b$.

On a alors :

(***) $$x = r_{n_1} T x_1 = r_{n_1} T r_{n_2} T x_2 = \ldots = (\mathop{T}_{i=1}^{k} r_{n_i}) T x_k \quad \text{pour tout } k \geq 1 ,$$

et en passant à la limite :

$$x = [\lim_{k\to\infty} \mathop{T}_{i=1}^{k} r_{n_i}] T [\lim_{k\to\infty} x_k] = [\mathop{T}_{i=1}^{\infty} r_{n_i}] T b = \mathop{T}_{i=1}^{\infty} r_{n_i} ,$$

on a ainsi montré l'existence du développement de x .

. <u>Unicité</u> : Montrons maintenant que la suite $\{r_{n_k}\}_{k\geq 1}$ définie par (*) est l'unique sous-suite de $\{r_n\}_{n\geq 1}$ développement de x .

Pour cela, montrons d'abord que si $x \in]a,b[$ admet deux développements : $(r_{n_k})_{k\geq 1}$ défini par (*) et un autre $(r_{n'_k})_{k\geq 1}$, alors nécessairement $r_{n_1} = r_{n'_1}$.

En effet, $x = r_{n'_1} T (\mathop{T}_{k=2}^{\infty} r_{n'_k}) < r_{n'_1} \Rightarrow r_{n_1} \leq r_{n'_1}$.

Supposons $r_{n_1} < r_{n'_1}$.

On en déduit que :

$$\forall\, k \geq 1 \quad r_{n_1+k} \leq r_{n'_k} .$$

Or $r_{n_1} = r_{n_1+1} T r_{n_1+1} = r_{n_1+1} T (r_{n_1+2} T r_{n_1+2}) = (r_{n_1+1} T r_{n_1+2}) T r_{n_1+2}) \dots$
$(\overset{p}{\underset{k=1}{T}} r_{n_1+k}) T r_{n_1+p}$ et ceci pour tout $p \geq 1$. D'où :

$$r_{n_1} = \lim_{p\to\infty} \overset{p}{\underset{k=1}{T}} r_{n_1+k} \leq \lim_{p\to\infty} \overset{p}{\underset{k=1}{T}} r_{n'_k} = x ,$$

mais ceci est impossible car $x < r_{n_1}$. D'où $r_{n_1} = r_{n'_1}$.

Nous montrons alors, par récurrence que $\forall\, k \geq 1 \quad r_{n'_k} = r_{n_k}$.

Supposons $r_{n'_i} = r_{n_i}$ pour $i = 1,\dots,m \quad m \geq 1$. On a :

$$x = (\overset{m}{\underset{i=1}{T}} r_{n_i}) T (\underset{i>m}{T} r_{n_i}) = (\overset{m}{\underset{i=1}{T}} r_{n_i}) T (\underset{i>m}{T} r_{n'_i}) .$$

De la propriété 4-iii) et de (***) on déduit que :

$$x_m = \overset{\infty}{\underset{i=1}{T}} r_{n_{m+i}} = \overset{\infty}{\underset{i=1}{T}} r_{n'_{m+i}}$$

et d'après ce qui précède : $r_{n_{m+1}} = r_{n'_{m+1}}$, car $r_{n_{m+1}}$ et $r_{n'_{m+1}}$ sont les premiers termes de deux développements de x_m .

La récurrence étant ainsi établie on en conclut l'unicité du développement de $x \in]a,b[$.

Remarquons que le développement d'un terme r_p , de la suite $(r_n)_{n\geq 1}$ est $\{r_{p+i}\}_{i\geq 1}$. D'où comme $a = r_1 T r_1$ on a :

$$a = \overset{\infty}{\underset{n=1}{T}} r_n .$$

a admet donc un développement. Montrons qu'il est unique.

Si $(r_{n_k})_{k\geq 1}$ est une sous-suite extraite de $(r_n)_{n\geq 1}$ non identique à $(r_n)_{n\geq 1}$ alors il existe k tel que

$$r_i \leq r_{n_i} \qquad i = 1,\dots,k$$

$$r_{i+1} < r_{n_i} \quad \text{pour} \quad i \geq k \ .$$

D'où :

$$a = \mathop{T}_{i=1}^{\infty} r_i < \mathop{T}_{i=1}^{k+1} r_i \qquad \text{(propriété 5) d'où :}$$

$$a < (\mathop{T}_{i=1}^{k} r_i) T r_{k+1} = (\mathop{T}_{i=1}^{k} r_i) T (\mathop{T}_{i=k+2}^{\infty} r_i) \leq (\mathop{T}_{i=1}^{k} r_{n_i}) T (\mathop{T}_{i=k+1}^{\infty} r_{n_i}) = \mathop{T}_{i=1}^{\infty} r_{n_i} \ .$$

<u>Remarque</u> : La suite $(r_n)_{n\geq 1}$ construite précédemment n'est pas l'unique suite répondant au théorème II-1 . Cette suite vérifie

(1) $$r_1 = \sup\{x \mid \varphi(x) = a\} \qquad \forall\, n \geq 1 \quad r_{n+1} = \varphi^{-1}(r_n) \ .$$

Or si l'on choisit $r'_1 \in]a, r_1[$ et si l'on pose pour $n \geq 1$ $r'_{n+1} = \varphi^{-1}(r'_n)$ alors la suite $(r'_n)_{n\geq 1}$ est T-dense. Toutefois, on a :

$$\forall\, n \geq 1 \qquad r'_n < r_n < r'_{n+1} \ .$$

Ce qui, à notre sens caractérise la suite $(r_n)_{n\geq 1}$ parmi les suites T-denses, est que $(r_1, r_1) \in D_T^a$, et cette propriété nous sera fort utile pour la démonstration du théorème III-1 .

4. CARACTERISATION DES S.G.C. DU TYPE $\mathbb{P}$ et $\mathbb{M}$.

Considérons maintenant un semi-groupe de composition $([a,b],T)$ sans idempotents intérieurs, et ne vérifiant pas la condition (p_6) : i.e.

(4.1) $$\forall\ x \in\ ]a,b] \qquad a < xTx .$$

Montrons alors que le semi-groupe $([a,b],T)$ est limite d'une suite $\{(A_n,T_n)\}_{n\geq 1}$ des semi-groupes vérifiant les conditions p_i : $i = 1,\ldots,6$, c'est-à-dire les conditions du théorème II-4.

Pour cela considérons l'application $\varphi : [a,b] \to [a,b]$

$$x \rightsquigarrow \varphi(x) = xTx .$$

Par des raisonnements analogues à ceux du lemme 1 on montre que :

(4.2) $$\begin{cases} \text{i) } \varphi \text{ est continue strictement croissante} \\ \\ \text{ii) } \forall\ x \in\ ]a,b[\quad a < \varphi(x) < x . \end{cases}$$

A l'aide de φ on construit deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(d_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante :

On choisit $a_o \in\ ]a,b[$ et on pose : $d_o = a_o$

On définit alors, par récurrence, les deux suites en posant :

(4.3) $$\left.\begin{aligned} a_n &= \varphi(a_{n-1}) \\ \\ d_n &= \varphi^{-1}(d_{n-1}) \end{aligned}\right\} \text{ pour } n \geq 1 .$$

On a :

(4.4) $$\begin{cases} \text{La suite } (a_n)_{n\geq 0} \text{ est strictement décroissante et } \lim\limits_n a_n = a . \\ \text{La suite } (d_n)_{n\geq 0} \text{ est strictement croissante et } \lim\limits_n d_n = b . \\ \text{De plus : } \forall\ n \geq 1 \quad a_n = a_{n-1}Ta_{n-1} \text{ et } d_{n-1} = d_nTd_n . \end{cases}$$

En effet,

$$\forall\, n \geq 1 \qquad a < a_n = \varphi(a_{n-1}) = a_{n-1}Ta_{n-1} < a_{n-1} \leq x_o$$

d'où $\lim\limits_{n} a_n = c$ existe et vérifie $cTc = c \leq x_o \Rightarrow c = a$.

De même,

$$\forall\, n \geq 1 \qquad x_o \leq d_{n-1} = \varphi(d_n) = d_nTd_n < d_n \ .$$

D'où $\lim\limits_{n} d_n = c'$ existe et vérifie $x_o \leq c'Tc' = c' \Rightarrow c' = b$.

On pose alors pour $n \geq 1$:

. $A_n = [a_n,b]$; et pour $(x,y) \in A_n \times A_n$

. $xT_ny = \max\,\{a_n, xTy\}$.

LEMME 2 .

a) Pour tout n , (A_n,T_n) est un S.G.C. vérifiant les conditions p_i , $i = 1,\dots,6$.

b) La suite $\{(A_n,T_n)_{n\geq 1}$ tend vers (A,T) , en ce sens que :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n,b] =]a,b]$

2. $\forall\,(x,y) \in]a,b] \times]a,b]$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall_n \geq n_0$, on a $xT_ny = xTy$.

Preuve : Le point a) découle sans peine de la définition de (A_n,T_n) . Le 1. de b) est évident car $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tend vers a en décroissant.

Montrons le 2) : Soit $(x,y) \in]a,b] \times]a,b]$, alors, comme $a < \min(x,y)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq n_o \quad a_n < \min\,(x,y)$. Alors pour $n \geq n_o+1$ on a :

. $a_n < a_{n_o} < \min\,(x,y) \Rightarrow (x,y) \in]a_n,b] \times]a_n,b]$

.. $xTy > a_{n_o}Ta_{n_o} = a_{n_o+1} \geq a_n \Rightarrow xT_ny = xTy$.

D'où $\lim\limits_{n\to\infty} (xT_n y) = xTy$.

<u>Remarque</u> : Les semi-groupes $\{(A_n,T_n)\}_{n\geq 1}$ vérifient les conditions p_i $i=1,\ldots,6$ et d'après le théorème II-1 chacun d'eux admet une suite dense. Pour n fixé, notons $\{r_k^n\}_{k\geq 0}$ la suite T_n-dense du semi-groupe (A_n,T_n) construite dans le théorème II-1 . On a les relations :

$$(4.5)\qquad \begin{cases} r_k^n = a_{n-k} & \text{pour} \quad k = 0,1,\ldots,n \\ r_{n+k}^n = d_k & \text{pour} \quad k \geq 0 \,. \end{cases}$$

En effet, le zéro de $([a_n,b]),T_n)$ étant a_n on a_n: $r_o^n = a_n$ d'autre part $a_{n-1} = \sup\{y \in [a_n,b] \,|\, yT_n y = a_n\}$ d'où : $r_1^n = a_{n-1}$ et le reste découle de la définition des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(d_n)_{n\geq 1}$.

On est en mesure maintenant d'énoncer les théorèmes de caractérisation des S.G.C. du type $\mathbb{P}$ et $\mathbb{M}$.

<u>THEOREME</u> II-2 . (voir aussi [9])

Un semi-groupe de composition $([a,b],T)$ est du type $\mathbb{P}$ si et seulement si il vérifie les conditions :

(p_5) $\Lambda_T = \{a,b\}$

(p_6) $\exists\, x_o \in]a,b[$ tel que $x_o T x_o = a$.

<u>Preuve</u> : - Montrons d'abord que les conditions (p_5) et (p_6) sont nécessaires. Supposons donc $([a,b],T)$ du type $\mathbb{P}$; il existe alors $g : [a,b] \to [0,1]$ bijective décroissante telle que

$$\forall\, (x,y) \in [a,b] \times [a,b] \qquad xTy = g^{-1}[g(x) \dotplus g(y)] \,.$$

Les seuls idempotents du semi-groupe $([0,1],\dot{+})$ étant 0 et 1 ; on en déduit que les seuls idempotents de $([a,b],T)$ sont :

$$g^{-1}(0) = b \quad \text{et} \quad g^{-1}(1) = a \quad \text{d'où } (p_5) .$$

D'autre part, il existe $x_o \in]a,b[$ tel que $g(x_o) = \frac{1}{2}$, alors on a :

$$x_o T x_o = g^{-1}[g(x_o) \dot{+} g(x_o)] = g^{-1}(1) = a \quad \text{d'où } (p_6) .$$

- Montrons maintenant que les conditions sont suffisantes.

Si le S.G.C. $([a,b],T)$ vérifie les conditions (p_5) et (p_6) alors du théorème II-1 on déduit l'existence d'une suite $(r_n)_{n\geq 0}$, T-dense. On définit alors l'application $g : [a,b] \to [0,1]$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = b \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_i}} & \text{si} \quad x < b \quad \text{et} \quad D(x) = \{r_{n_i}\}_{i \geq 1} \end{cases}$$

où $D(x)$ désigne le développement de x dans $\{r_n\}_{n\geq 1}$.

On a :

1) g <u>est strictement décroissante</u> :

Considérons $x,y \in [a,b[$ tels que $x < y$, et notons $\{r_{n_i}\}_{i\geq 1}$ (resp. $\{r_{n'_i}\}_{i\geq 1}$) le développement de x (resp. y).

Alors il existe un plus petit indice k_o tel que :

$$n_{k_o} < n'_{k_o} \quad \text{et} \quad \forall\, i < k_o \quad n_i = n'_i .$$

On a :

$$g(y) = \sum_{i=1}^{k_o-1} \frac{1}{2^{n_i}} + \sum_{i \geq k_o} \frac{1}{2^{n'_i}} \leq \sum_{i=1}^{k_o-1} \frac{1}{2^{n_i}} + \frac{1}{2^{n'_{k_o}-1}} \quad \text{d'où :}$$

$$g(y) \leq \sum_{i=0}^{k_o-1} \frac{1}{2^{n_i}} + \frac{1}{2^{n_{k_o}}} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n_i}} = g(x) .$$

2) g <u>est bijective</u> :

L'application g étant strictement décroissante elle est injective. Il suffit donc de montrer que g est surjective. Pour cela $t \in]0,1]$ étant donné, on considère le développement en base 2 de t.

Soit $\left(\frac{1}{2^{n_k}}\right)_{k\geq 1}$ ce développement, on pose alors :

$$x_t = \underset{k=1}{\overset{\infty}{T}} r_{n_k} .$$

D'après le théorème II-1(iii), $\{r_{n_k}\}_{k\geq 1}$ est le développement de x_t et par conséquent on a $g(x_t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_k}} = t$.

3) $\forall\ (x,y) \in [a,b] \times [a,b]$ on a : $g(xTy) = g(x) \dotplus g(y)$

Montrons d'abord que :

$$\forall\ n \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall\ k \geq 0 \quad g(r_n T r_k) = g(r_n) \dotplus g(r_k) .$$

En effet, le développement de r_n étant $\{r_{n+k}\}_{k\geq 1}$ on a :

$$\forall\ n \geq 0 \qquad g(r_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^n}$$

$$g(r_{n+1} T r_{n+1}) = g(r_n) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} \dotplus \frac{1}{2^{n+1}} = g(r_{n+1}) \dotplus g(r_{n+1}) .$$

Supposons $n < k$ et posons $x = r_n T r_k$, alors le développement de x est $\{r_n, r_{k+i} \quad i \geq 1\}$ d'où :

$$g(x) = g(r_n T r_k) = \frac{1}{2^n} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+i}} = g(r_n) + \frac{1}{2^k} = g(r_n) \dotplus (g(r_k) .$$

Or l'application g étant bijective décroissante elle est <u>bi-continue</u> .

D'autre part, elle échange les "bases" $\{r_n\}_{n\geq 1}$ et $\{\frac{1}{2^n}\}_{n\geq 1}$ des semi-groupes $([a,b],.T)$ et $([0,1],\dot{+})$ et vérifie :

$$\forall\ n,k \geq 0 \qquad g(r_n T r_k) = g(r_n) \dot{+} g(r_k)\ .$$

C'est donc un isomorphisme.

Remarque : L'application g construite précédemment n'est pas unique car d'après la remarque (2.1) la suite $(r_n)_{n\geq 1}$ ne l'est pas.

THEOREME II-3 . (voir aussi [3])

> Un semi-groupe de composition $([a,b],T)$ est de type $\mathbb{M}$, si, et seulement si il vérifie les conditions :
>
> (p_5) $\Lambda_T = \{a,b\}$
>
> (p'_6) $\forall\ x \in\ ]a,b]$ $\quad a < xTx$.

Preuve : a) les conditions sont nécessaires car s'il existe $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}_+$ bijective décroissante telle que :

$$\forall\ (x,y) \in [a,b]^2 \qquad xTy = f^{-1}[f(x) + f(y)]$$

alors on a :

$$\forall\ x \in\ ]a,b[\qquad f(x) \in\ ]0,+\infty[\quad \text{d'où} \quad 0 < f(x) < f(x) + f(x) < +\infty$$

et par conséquent :

$$a = f^{-1}(+\infty) < f^{-1}[f(x) + f(x)] = xTx < f^{-1}[f(x)] = x < f(0) = b\ .$$

Cette relation montre que (p_5) et (p'_6) sont vérifiées.

b) <u>les conditions sont suffisantes</u>.

Si (p_5) et (p'_6) sont vérifiées alors, on considère l'application $\varphi : [a,b] \to [a,b]$, $x \rightsquigarrow xTx$ et un point $x_o \in]a,b[$ qui reste fixé pour tout ce qui suit.

Posons, $a_o = d_o = x_o$ et

$$\text{pour } n \geq 0 \text{ , } a_{n+1} = \varphi(a_n)$$
$$d_{n+1} = \varphi^{-1}(d_n) \text{ .}$$

Alors du lemme 2, on déduit que la suite des semi-groupes $\{[a_n,b],T_n\}_{n\geq 1}$ converge vers $([a,b],T)$ et que pour tout $n \geq 1$, le S.G.C. $([a_n,b],T_n)$ vérifie les conditions du théorème II-2 , où la suite T_n-dense est :

$$r_k^n = a_{n-k} \qquad k = 0,\ldots,n$$

$$r_{n+k}^n = d_k \qquad k \geq 0 \text{ .}$$

Notons g_n l'isomorphisme entre $([a_n,b],T_n)$ et $([0,1],\dot{+})$ associé à la suite $(r_k^n)_{k\geq 0}$.

Pour tout $n \geq 1$, on a :

1° $g_n(a_{n-k}) = \frac{1}{2^k}$ pour $k = 0,1,\ldots,n$

$g_n(d_k) = \frac{1}{2^{n+k}}$ pour $k \geq 0$.

2° $\forall\ (x,y) \in [a_{n-1},b]^2$ et $\forall\ m \geq n$.

$$xTy = xT_my = g_m^{-1}[g_m(x) + g_m(y)] \text{ .}$$

3° Si l'on pose, pour $x \in [a_n,b]$, $f_n(x) = 2^n.g_n(x)$ alors $f_n : [a_n,b] \to [0,2^n]$ est bijective strictement décroissante telle que :

$$\forall\ (x,y) \in [a_n,b]^2 \qquad xT_ny = f_n^{-1}[f_n(x) \dotplus f_n(y)]$$

($\dotplus$ étant ici l'addition contractée sur $[0,2^n]$)

$$\forall\ (x,y) \in [a_{n-1},b]^2 \qquad xT_ny = xTy = f_n^{-1}[f_n(x) + f_n(y)]\ .$$

De 1°) on déduit que :

$$\text{Pour}\quad k = 0,\dots,n \qquad f_n(a_k) = 2^k$$

$$\text{Pour}\quad k \geq 0 \qquad f_n(d_k) = \frac{1}{2^k}\ .$$

On en déduit que pour tout $x \in [a_n,b]$ la suite $\{f_m(x)\}_{m \geq n}$ est constante.

Posons alors pour $x \in]a,b]$: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Alors de 2°), on a :

$\forall\ (x,y) \in]a,b] \times]a,b]$, il existe n tel que $a_n < \inf\ (x,y)$ et par conséquent, pour tout $m > n$

$$f(xTy) = f_m(xTy) = 2^m(g_m(xTy)) = 2^m[g_m(x) + g_m(y)]$$

$$= f_m(x) + f_m(y) = f(x) + f(y)\ .$$

D'où :

$$\forall\ (x,y) \in]a,b] \times]a,b] \qquad xTy = f^{-1}[f(x) + f(y)]\ .$$

D'autre part, $f :]a,b] \to]0,+\infty]$ est continue strictement décroissante car pour tout $n \geq 1$ la restriction de f sur $[a_n,b]$ est égale à f_n et $f_n : [a_n,b] \to [0,2^n]$ est bijective décroissante.

De plus, on a :

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f_n(a_n) = \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty\ .$$

On prolonge alors f sur $[a,b]$ en posant $f(a) = +\infty$.

Ainsi $f : [a,b] \to [0,+\infty]$ est continue, bijective, strictement décroissante. On définit un S.G.C. du type $\mathbb{M}$ sur $[a,b]$, en posant pour $(x,y) \in [a,b]^2$

$$xT_f y = f^{-1}[f(x) + f(y)] .$$

Or d'après (4), T et T_f coïncident sur le pavé semi-ouvert $]a,b] \times]a,b]$ et comme elles sont continues, elles coïncident sur le fermé $[a,b] \times [a,b]$ d'où $T \equiv T_f$. C.Q.F.D.

Jusqu'à présent on a vu que les S.G.C. sans idempotents intérieurs sont ou bien du type $\mathbb{P}$ ou bien du type $\mathbb{M}$.

Le théorème qui suit montre que tout semi-groupe de composition peut être décrit à l'aide d'une famille au plus dénombrable de semi-groupes de composition, chacun appartenant à l'un des trois types $\mathbb{P}$, $\mathbb{M}$, INF.

<u>THEOREME</u> II-4.

> Pour tout S.G.C. (A,T), il existe une famille unique, au plus dénombrable de S.G.C., soit $([a_i,b_i],T_i)_{i\in I}$ telle que :
>
> a) Les intervalles $(]a_i,b_i[)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints et leur réunion est contenue dans A.
>
> b) Pour tout $i \in I$, le S.G.C. $([a_i,b_i],T_i)$ est du type $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{M}$.
>
> c) Pour tout couple $(x,y) \in A \times A$, on a
>
> $$xTy = \begin{cases} xTy & \text{s'il existe } \quad i \in I : x,y \in [a_i,b_i] \\ \inf(x,y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

<u>Preuve</u> : L'ensemble des idempotents Λ_T de (A,T) est fermé, par conséquent $\overline{\Lambda}_T = A - \Lambda_T$ est un ouvert d'un $\mathbb{R}$ contenu dans A. Il existe donc une famille unique, au plus dénombrable, d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, soit $\{]a_i,b_i[\}_{i\in I}$ telle que

$$\overline{\Lambda}_T = \bigcup_{i \in I}]a_i,b_i[\ .$$

On en déduit que pour tout $i \in I$, $a_i \in \Lambda_T$ et $b_i \in \Lambda_T$, et si l'on note par T_i la restriction de T à $[a_i,b_i]$ alors il est évident que $([a_i,b_i],T_i)$ est un S.G.C. sans idempotents intérieurs. Il est donc, ou bien du type $\mathbb{P}$, ou bien du type $\mathbb{M}$, ce qui prouve a) et b). Pour montrer c), considérons $(x,y) \in A \times A$. S'il existe $i \in I$ tel que $(x,y) \in [a_i,b_i] \times [a_i,b_i]$ alors $xTy = xT_iy$. Si pour tout $i \in I$, $(x,y) \notin [a_i,b_i] \times [a_i,b_i]$, alors en supposant que $x \leq y$, on en conclut que l'intervalle $[x,y]$ n'est pas contenu dans $\overline{\Lambda}_T$. Il en résulte qu'il existe $c \in [x,y] \cap \Lambda_T$ et par conséquent :

$$x = xTc \leq xTy \leq \inf(x,y) = x$$

d'où $xTy = \inf(x,y)$.

C.Q.F.D.

5. CARACTERISATION DES DIVERS TYPES DE FONCTIONS DE COMPOSITIONS SUR $\overline{R}_+$.

Les résultats obtenus dans les paragraphes précédents nous permettent de caractériser les divers types des fonctions de composition sur $\overline{R}_+$.

Ce qui est remarquable c'est que la restriction de T à la diagonale de $\overline{R}_+ \times \overline{R}_+$ détermine parfaitement le type de T .

En effet, considérons une fonction de composition T sur $\overline{R}_+$ et notons $\varphi_T : \overline{R}_+ \to \overline{R}_+$ telle que $x \rightsquigarrow \varphi_T(x) = xTx$, alors :

$$\Lambda_T = \{0,+\infty\} \Leftrightarrow (\forall\ x \in]0,+\infty[\quad \varphi_T(x) < x) \ .$$

Ainsi des théorèmes II-2 et II-3 , on en déduit :

PROPOSITION II - 2.

$$\boxed{\begin{array}{l} T \text{ est du type } \mathbb{M} \text{ si et seulement si :} \\ \qquad\qquad \forall\ x \in]0,+\infty[\quad 0 < \varphi_T(x) < x \ . \end{array}}$$

PROPOSITION II - 3.

T est du type $\mathbb{P}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{a) } \forall\, x \in \,]0,+\infty[& 0 \leq \varphi_T(x) < x \\ \text{b) } \exists\, c \in \,]0,+\infty[& \varphi_T(c) = 0 \,. \end{cases}$$

PROPOSITION II - 4.

T est du type $\mathbb{INF}$ si et seulement si :

$$\forall\, x \in \overline{R}_+ \qquad \varphi_T(x) = x \,.$$

L'ensemble des fonctions de composition des types $\mathbb{P}$ et $\mathbb{M}$ est caractérisé par l'absence d'idempotents dans $]0,+\infty[$. Or, d'après la propriété 4 du chapitre II, on a :

$$\Lambda_T = \{0,+\infty\}$$

$$\Updownarrow$$

(T est strictement croissante à l'intérieur de son support $\overset{\circ}{D}_T$) .

Si T est du type $\mathbb{M}$ alors $\overset{\circ}{D}_T = \overline{R}_+ \times \overline{R}_+$ et T est strictement croissante à l'intérieur de $\overset{\circ}{D}_T$ mais non sur la frontière de $\overset{\circ}{D}_T$ car $\forall\, x \in \overline{R}_+ \quad 0Tx = 0$.

Par contre, si T est du type $\mathbb{P}$, alors il existe $g : \overline{R}_+ \to [0,1]$ bijective décroissante telle que :

$$\forall\, (x,y) \in \overline{R}_+^2 \qquad xTy = g^{-1}[g(x) \dotplus g(y)] \,,$$

On en déduit que :

$$\overset{\circ}{D}_T = \{(x,y) \in \overline{R}_+^2 \,|\, g(x) + g(y) \leq 1\}$$

ce qui entraine que T est strictement croissante sur $\overset{\circ}{D}_T$.

D'autre part, si T est strictement croissante sur $\overset{\circ}{D}_T$ alors $(0,0) \notin \overset{\circ}{D}_T$ ce qui implique qu'il existe $x_o > 0$ tel que $x_o T x_o = 0$ et de la proposition 4.2., on tire que T est du type $\mathbb{P}$. D'où :

PROPOSITION II - 2'.

T est du type $\mathbb{M}$ si et seulement si :
α) $(0,0) \in \overset{\circ}{D}_T$
β) T est strictement croissante à l'intérieur de son support.

PROPOSITION II - 3'.

T est du type $\mathbb{P}$ si et seulement si :
T est strictement croissante sur son support.

D'autre part, T étant associative, continue, croissante, entraine que T_i l'est aussi et comme $b_i \in \Lambda_T$, alors on a pour tout $x \leq b_i$ $\quad xTb_i = x$ (propriété 2.4, Chapitre I) d'où :

$$\forall\ x \in [a_i,b_i] \qquad xT_ib_i = x\ .$$

On en déduit que $([a_i,b_i],T_i)$ est un semi-groupe de composition ; de plus il est sans idempotents intérieurs car $]a_i,b_i[\subset \Lambda_T^c$.

On en déduit donc que les S.G.C. $\{[a_i,b_i],T_i\}_{i\in I}$ sont du type $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{M}$.

PROPOSITION II - 6.

Pour tout couple $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$, on a :

$$xTy = \begin{cases} xT_iy & \text{s'il existe} \quad i \in I : x,y \in [a_i,b_i] \\ \inf(x,y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve : S'il existe $i \in I$ tel que $x,y \in [a_i,b_i]$ alors d'après la définition de T_i , on a $xTy = xT_iy$.

Si $\forall\ i \in I$ $(x,y) \notin [a_i,b_i] \times [a_i,b_i]$ alors en supposant que $x = \inf(x,y)$, on a :

L'intervalle $[x,y] \not\subset \Lambda_T^c$ ce qui implique qu'il existe $c \in [x,y] \cap \Lambda_T$ et par conséquent :

$$x = xTc \leq xTy \leq \inf(x,y) = x \quad \text{d'où} \quad xTy = \inf(x,y) .$$

C.Q.F.D.

On conclut donc que toute fonction de composition sur $\overline{R}_+$ peut être définie "par morceaux" à l'aide des S.G.C. des types $\mathbb{P}$, $\mathbb{M}$ et $\mathbb{INF}$.

Le théorème II-4 nous permet d'établir la proposition suivante :

PROPOSITION II-7.

> Pour toute fonction de composition T sur $\overline{R}_+$, il existe un espace mesurable $\{\Omega,\mathcal{E}\}$ et une information J sur $\mathcal{E}$ tel que :
>
> a) J admet T comme fonction de composition ;
>
> b) $\forall\ z \in \mathbb{R}_+$ et $\forall\ (x,y) \in \Gamma_T^z$, il existe $A,B \in \mathcal{E}$ tels que
>
> $$A \cap B = \emptyset \ ; \ x = J(A) \ ; \ y = J(B) .$$

Preuve : Considérons la décomposition de Λ_T^c en intervalles ouverts :

$$\Lambda_T^c = \bigcup_{i\in I}]a_i,b_i[\ ; \ I \subset \mathbb{N}^* .$$

Posons $A_o = \Lambda_T$; $A_i =]a_i,b_i[$ pour $i \in I$; $I_o = \{0\} \cup I$ ainsi $\bigcup_{i\in I} A_i = \Lambda_T \cup \Lambda_T^c = \overline{R}_+$ c'est-à-dire $\{A_i\}_{i\in I_o}$ est une partition de $\overline{R}_+$.

Notons par $\mathcal{B}$ la tribu des boréliens de $\overline{R}_+$ et posons pour tout $i \in I_o$

$$\mathcal{B}_i = A_i \cap \mathcal{B}$$

de sorte que $\forall\ i \in I_o$ $\{A_i, \mathcal{B}_i\}$ est un espace mesurable.

On sait que $\forall\ i \in I$ le semi-groupe $\{\overline{A}_i, T_i\}$ est du type $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{M}$ et par conséquent on peut considérer une famille d'applications $\{h_i\}_{i \in I}$ et une famille de mesures $\{\mu_i\}_{i \in I}$ telles que :

1) <u>Si</u> $(\overline{A}_i, T_i)$ <u>est du type</u> $\mathbb{P}$ <u>alors</u> :

. $h_i : [a_i, b_i] \to [0,1]$ bijective décroissante telle que $T_i = T_{h_i}$

.. μ_i est une probabilité non atomique sur $(A_i, \mathcal{E}_i)$. (Par exemple si $b_i < +\infty$ alors μ_i est la loi uniforme sur $]a_i, b_i[$ et si $b_i = +\infty$ alors μ_i est définie par une densité strictement positive) .

2) <u>Si</u> $(\overline{A}_i, T_i)$ <u>est du type</u> $\mathbb{M}$ <u>alors</u> :

. $h_i : [a_i, b_i] \to \overline{R}_+$ bijective décroissante telle que $T_i \equiv T_{h_i}$

.. μ_i est une mesure infinie sur $\{]a_i, b_i[, \mathcal{E}_i\}$ telle que

$\forall\ x,y \in \overline{R}_+$ il existe $A,B \in \mathcal{E}_i$ tels que $A \cap B = \emptyset$, $x = \mu_i(A)$, $y = \mu_i(B)$.

(On peut par exemple choisir μ_i définie par une densité $f_i :]a_i, b_i[\to R_+$ telle que l'intégrale de f_i diverge au voisinage de a_i et de b_i.)

Considérons d'autre part l'application $\Phi : \Lambda_T \to \Lambda_T$ telle que $\Phi(x) = x$. Comme $0 \in \Lambda_T$ et $\Phi(0) = 0$, Φ est une "fonction génératrice" .

Pour tout $i \in I$ et tout $A \in \mathcal{B}_i$ on pose :

$$J_i(A) = \begin{cases} h_i^{-1}(\mu_i(A)) & \text{si} \quad A \neq 0 \\ +\infty & \text{si} \quad A = 0\ . \end{cases}$$

Pour tout $A \in \mathcal{E}_o$ on pose :

$$J_o(A) = \begin{cases} \inf\limits_{x\in A} \Phi(x) & \text{si} \quad A \neq \emptyset \\ +\infty & \text{si} \quad A = \emptyset . \end{cases}$$

Ainsi $\forall\, i \in J_o$, $J_i : \mathcal{B}_i \to A_i \cup \{+\infty\}$ et pour tout $A,B \in \mathcal{E}_i$ tels que $A \cap B = \emptyset$ on a : $J_i(A \cup B) = J_i(A) T_o J_i(B)$, d'autre part, de nos hypothèses sur les (μ_i) découle que J_i est surjective.

Considérons maintenant un élément $B \in \mathcal{B}$ et posons $\forall\, i \in J_o \quad B_i = B \cap A_i$. On définit alors :

$$J : \mathcal{B} \to \overline{R}_+$$
$$B \to J(B) = \underset{i\in I_o}{T}\, J_i(B_i) .$$

Il en découle que pour tout $i \in I_o$ la restriction de J à $\{A_i, \mathcal{B}_i\}$ est identique à J_i , ceci parce que $J_i(\emptyset) = +\infty$ élément neutre de T .

- Montrons que J est T-σ-composable :

Soit $\{B_k\}_{k\geq 1}$ une suite disjointe d'éléments de $\mathcal{B}$; posons pour tout $k \geq 1$ et tout $i \in I_o$ $B_{k,i} = B_k \cap A_i$ alors on a :

$$J(\bigcup_{k\geq 1} B_k) = \underset{i\in I_o}{T}\, J_i[(\bigcup_{k\geq 1} B_k) \cap A_i] = \underset{i\in I_o}{T}\, [J_i(\bigcup_{k\geq 1} (B_k \cap A_i))]$$

$$= \underset{i\in I_o}{T}\, [\underset{k\geq 1}{T}\, J_i(B_k \cap A_i)]$$

$$= \underset{k\geq 1}{T}\, [\underset{i\in I_o}{T}\, J_i(B_k \cap A_i)] = \underset{k\geq 1}{T}\, [J(B_k)] .$$

D'autre part, il est évident que J prend les valeurs universelles et est monotone. Par conséquent J est une information sur $(\Omega, \mathcal{E})$ admettant T comme fonction de composition.

- Montrons maintenant le point b) .

Soit $z \in \mathbb{R}_+$ et $(x,y) \in \Gamma_T^z$, alors il existe $i \in I_o$ (resp. $j \in I_o$) tel que $x \in A_i$ (resp. $y \in A_j$) . D'où :

Si $i \neq j$: alors il existe $B_i \in \mathcal{B}_i$ et $B_j \in \mathcal{B}_j$ tels que

$$x = J_i(B_i) = J(B_i) \ ; \ y = J_j(B_j) = J(B_j)$$

et comme $i \neq j$ alors $B_i \cap B_j = \emptyset$.

Si $i = j$: alors de nos hypothèses sur les $(\mu_i)_{i \in I}$ et Φ découle qu'il existe $B, C \in \mathcal{B}_i$ tels $x = J_i(B)$, $y = J_i(C)$ et $B \cap C = \emptyset$.

C.Q.F.D.

CHAPITRE III : INFORMATIONS CONDITIONNELLES - INDEPENDANCE

1. INFORMATIONS CONDITIONNELLES.

Considérons un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{E},P)$ et la mesure d'information de Shannon : $J(A) = -\mathrm{Log}_2(P(A))$ définie sur $(\Omega,\mathcal{E})$.

Donnons nous un évènement fixé $E \in \mathcal{E}$ tel que $P(E) > 0$ et considérons la mesure de probabilité P' définie sur $(\Omega,\mathcal{E})$ comme étant la probabilité conditionnelle par rapport à E .

Notons J' l'information de Shannon associée à $(\Omega,\mathcal{E},P')$.

On se trouve alors en présence de deux mesures d'information sur $(\Omega,\mathcal{E})$ liées par la relation :

$$\forall\ A \in \mathcal{E} \qquad J'(A) = J(A \cap E) - J(E) .$$

La quantité $J'(A)$ est interprétée comme l'information conditionnelle de A par rapport à E .

Ceci nous suggère de définir l'information conditionnelle dans le cas général de la manière suivante :

DEFINITION III-1 . Information conditionnelle.

Soit J une mesure d'information sur $(\Omega,\mathcal{E})$ et soit $E \in \mathcal{E}$ tel que $J(E) < +\infty$. Alors pour $A \in \mathcal{E}$ on définit l'information conditionnelle de A par rapport à E , et l'on note $J(A/E)$, par :

$$J(A/E) = J(A \cap E) - J(E) .$$

L'application $J' : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par $J'(A) = J(A/E)$ vérifie :

1) $J'(\Omega) = J(E) - J(E) = 0$

2) $J'(\emptyset) = J(\emptyset) - J(E) = +\infty$

3) Si $A,B \in \mathcal{E}$ tels que $A \subset B$ alors

$$J'(B) = J(B \cap E) - J(E) \leq J(A \cap E) - J(E) = J'(A)$$

i.e. J' est monotone.

4) Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que $A = \bigcup_n A_n$ alors on a :

$$J'(A) = J(A \cap E) - J(E) = \lim_{n\to\infty} [J(A_n \cap E) - J(E)] = \lim_n J'(A_n)$$

autrement dit J' possède la continuité séquentielle ascendante.

Il suffit donc de montrer que J' est composable pour en conclure que J' est une mesure d'information sur $(\Omega,\mathcal{E})$. A cet effet, on montre le lemme suivant :

<u>LEMME</u> 1 .

Soit T une fonction de composition sur $\overline{\mathbb{R}}_+$. Pour tout $z \in \mathbb{R}_+$ la loi T_z définie sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$xT_z y = \max\{(x+z)T(y+z) - z, 0\}$$

est une fonction de composition sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :

$$\forall\ h \geq 0 \qquad D^h_{T_z} = D^{h+z}_T - z .$$

La démonstration de ce lemme étant triviale, nous la négligerons.

<u>PROPOSITION</u> III-1 .

Si J est une mesure d'information sur $(\Omega,\mathcal{E})$, T-composable, alors pour tout $E \in \mathcal{E}$ tel que $J(E) < +\infty$, l'information conditionnelle $J(./E)$, est une mesure d'information sur $(\Omega,\mathcal{E})$, $T_{J(E)}$-composable.

Preuve : Soit $E \in \mathcal{E}$ tel que $J(E) < +\infty$, alors en vertu du lemme 1, on peut considérer la loi de composition T_z définie par $xT_zy = \max\{(x+z)T(y+z) - z, 0\}$.

Montrons que $J' = J(./E)$ est T_z composable.

En effet, considérons $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $A \cap B = \emptyset$ et posons

$$u = J'(A) \ , \ v = J'(B) \ , \ h = J'(A \cup B)$$

alors on a :

$$h = J'(A \cup B) = J((A \cup B) \cap E) - J(E) = J((A \cap E) \cup (B \cap E)) - z$$

$$= (J(A \cap E))T(J(B \cap E)) - z = [J'(A)+J(E)]T[J'(B)+J(E)] - J(E) .$$

Or comme $J((A \cup B) \cap E) \geq J(E)$ on a :

. $h = J'(A \cup B) = J'(A)T_zJ'(B)$

. $(u+z, v+z) \in D_z^{h+z} \Rightarrow (u,v) \in D_{T_z}^{h}$.

C.Q.F.D.

Examinons maintenant les relations qui peuvent exister entre le type de J et le type de $J(./E)$.

A cet effet, montrons le lemme suivant :

LEMME 2 .

Soit T une fonction de composition sur $\bar{R}_+$ telle que $\Lambda_T = \{0, +\infty\}$.
Alors pour tout $z \in]0, +\infty[$ la fonction de composition T_z définie par :

$$xT_zy = \max\{(x+z)T(y+z) - z, 0\}$$

est du type $\mathbb{P}$.

Preuve : D'après la proposition II-3 chapitre II, il suffit de montrer que :

1) $\forall\ x \in]0, +\infty[\quad \varphi_{T_z}(x) = xT_zx < x$

2) Il existe $x_o \in]0,+\infty[$ tel que $\varphi_{T_z}(x_o) = 0$.

Or comme $\Lambda_T = \{0,+\infty\}$ on en déduit que :

$$\forall\ x \in]0,+\infty[\quad \varphi_T(x) = xTx < x$$

d'où

$$\forall\ x \in]0,+\infty[\quad \varphi_T(x+z) - z < x\ .$$

On a alors :

$$\varphi_{T_z}(x) = xT_zx = \max\{(x+z)T(x+z) - z,0\}$$

$$= \max\ \{\varphi_T(x+z) - z,0\} < x\ .$$

D'où

$$\forall\ x \in]0,+\infty[\quad \varphi_{T_z}(x) < x\ .$$

D'autre part, l'application φ_T étant continue croissante et $\varphi_T(z) < z < +\infty$ on en déduit qu'il existe $z_o \in]z,+\infty[$ tel que $\varphi_T(z_o) = z$. Posons alors $x_o = z_o - z$ on a :

i) $x_o \in]0,+\infty[$

ii) $\varphi_{T_z} = \max\{\varphi_T(x_o+z) - z,0\} = 0$.

C.Q.F.D.

De la proposition III-1 et du lemme 4 on déduit facilement la :

<u>PROPOSITION</u> III-2 .

Soit J une mesure d'information sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{E})$.
1) Si J est du type $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{M}$ alors pour tout $E \in \mathcal{E}$ tel que $J(E) \in]0,+\infty[$, l'information conditionnelle $J(./E)$ est du type $\mathbb{P}$.
2) Si J est du type INF alors $J(./E)$ est du type INF .

<u>Remarque</u> : Si $J(E) = 0$ alors on a toujours $T_{J(E)} = T_o = T$ c'est-à-dire J et $J(./E)$ ont la même fonction de composition mais en général $J(./E) \neq J$. D'une manière générale on a $J(A/E) = J(A \cap E) - J(E) = J(A \cap E) \geq J(A)$. Un cas où l'égalité a lieu est celui où J est du type $\mathbb{P}$, en effet, dans ce cas $J(E) = 0 \Rightarrow J(E^c) = +\infty \Rightarrow J(A \cap E^c) = +\infty$ d'où

$$\forall A \in \mathcal{E} \qquad J(A/E) = J(A \cap E) = J(A \cap E) T J(A \cap E^c) = J(A) .$$

2. <u>INDEPENDANCE AU SENS DE L'INFORMATION</u>.

Soit J une mesure d'information sur $(\Omega, \mathcal{E})$ T-composable. Il est naturel de dire qu'un évènement $A \in \mathcal{E}$ est indépendant d'un autre évènement $B \in \mathcal{E}$, si la connaissance de la réalisation de B ne modifie pas l'information contenue dans A , c'est-à-dire $J(A/B) = J(A)$.

Or si $J(B) = +\infty$ la quantité $J(A/B)$ n'est pas définie, néanmoins chaque fois qu'elle a un sens la relation $J(A/B) = J(A)$ est équivalente à $J(A \cap B) = J(A) + J(B)$, et cette dernière garde un sens même si l'un des deux évènements est d'information infinie. Ceci nous conduit à la définition suivante :

<u>DEFINITION</u> III-2 .

<u>On dira que deux évènements</u> $A, B \in \mathcal{E}$ <u>sont J-indépendants. si</u> :

$$J(A \cap B) = J(A) + J(B) .$$

Ainsi Ω et $\emptyset$ sont toujours indépendants de tout autre évènement et ceci quelle que soit la mesure d'information J , considérée sur $(\Omega, \mathcal{E})$.

On remarquera aussi que pour l'information de Shannon $J_c(A) = -c \log(P(A))$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ on a : deux évènement $A, B \in \mathcal{E}$ sont J-indépendants si et seulement s'ils sont P-indépendants.

Toutefois on peut constater que la notion d'indépendance au sens de l'information n'est pas la même que celle au sens des probabilités. En effet, l'indépendance probabiliste vérifie la :

PROPRIETE C : - Si $A,B \in \mathcal{E}$ sont "indépendants" alors leurs tribus engendrées $\sigma(A) = \{\Omega, A, A^c, \emptyset\}$ et $\sigma(B) = \{\Omega, B, B^c, \emptyset\}$ sont "indépendantes".

Cette propriété n'est pas toujours vraie pour l'indépendance au sens de l'information. En effet, considérons l'information du type mixte, J définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, P)$:

$$J(A) = \begin{cases} +\infty & \text{si } P(A) = 0 \\ 1 - P(A) & \text{si } P(A) > 0 . \end{cases}$$

Considérons alors deux évènements $A,B \in \mathcal{E}$ tels que :

$$0 < P(A) < 1 \; ; \; 0 < P(B) < 1 \; ; \; 0 < P(A \cap B) < 1 \; ; \; A \cup B = \Omega \; ;$$

alors on a :

$$J(A \cap B) = 1 - P(A \cap B) = 1 + P(A \cup B) - P(A) - P(B) = J(A) + J(B)$$

autrement dit A et B sont J-indépendants. Montrons que $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ ne sont pas J-indépendants. En effet :

$$A \cup B = \Omega \Rightarrow A^c \subset B$$

d'où

$$J(A^c \cap B) = J(A^c) = 1 - P(A^c) \quad \text{car} \quad P(A^c) \in \,]0,1] \quad \text{d'où :}$$

$$J(A^c \cap B) < 1 - P(A^c) + 1 - P(B) = J(A^c) + J(B)$$

on en déduit que A^c et B ne sont pas J-indépendantes.

Par conséquent, on peut se poser le problème de rechercher les mesures d'information pour lesquelles la propriété $\mathcal{C}$ est vérifiée.

Remarque : Pour une information J sur $(\Omega,\mathcal{E})$, vérifiant $\mathcal{C}$, on aurait :

$$\text{(i)} \qquad J(A \cap B) = J(A) + J(B)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{(ii)} \qquad J(A^c \cap B) = J(A^c) + J(B)$$

Or si (i) et (ii) ont lieu simultanément et si T est une fon ction de composition admise par J alors on a :

$$J(B) = J((A \cap B) \cup (A^c \cap B)) = J(A \cap B) T J(A^c \cap B) = (J(A) + J(B)) T (J(A^c) + J(B)) .$$

Par conséquent, T doit vérifier la relation

$$\text{(iii)} \qquad [J(A) + J(B)] T [J(A^c) + J(B)] = J(B) .$$

Remarquons que le couple $(J(A), J(A^c)) \in \Gamma_T^o$ où Γ_T^o désigne la frontière du support D_T^o de T.

On constate donc que la fonction de composition T, admise par J, joue un rô e fondamental dans le comportement de J vis à vis de la propriété $\mathcal{C}$. En effet, pour que J vérifie la propriété $\mathcal{C}$, il faut que T vérifie (iii) pour les valeurs $J(A)$, $J(A^c)$, $J(B)$ où A et B sont J-indépendants.

3. FONCTIONS DE COMPOSITION UNIVERSELLES.

DEFINITION III-3 . [5]

Nous dirons qu'une fonction de composition T est universelle si, étant donnés :

1) Un ensemble Ω et deux parties A et B de Ω telles que $A \cap B \neq \emptyset$, $A^c \cap B \neq \emptyset$.

2) Deux couples (x,x'), $(y,y') \in \Gamma_T^o$; on peut définir une information J sur l'algèbre engendrée par $\{A,B\}$ telle que :

α) J est T-composable ;

β) $J(A) = x$; $J(B) = y$; $J(A^c) = x'$; $J(B^c) = y'$;

γ) Les algèbres $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ sont J-indépendantes ;

et ceci quel que soient les choix de Ω , A , B , (x,x') , (y,y') .

De la remarque précédente, on déduit facilement la

PROPOSITION III-3 .

Une fonction de composition T est universelle si et seulement si :

(*) $$\forall\ (x,x') \in \Gamma_T^o \text{ et } \forall\ z \in \mathbb{R}_+ \quad (x+z)T(x'+z) = z\ .$$

Le concept de fonction de composition universelle a été introduit par J. KAMPE de FERIET dans [6] , où il énonce le résultat suivant :

PROPOSITION III-4 .

Les seules fonctions de composition universelles sont :

1) La fonction de composition de Shannon :

$$xT_c y = -c \operatorname{Log}[e^{-\frac{x}{c}} + e^{-\frac{y}{c}}]\ .$$

2) La fonction de composition INF :

$$xTy = \inf(x,y)\ .$$

Nous donnons une nouvelle démonstration de cette proposition, que nous avons obtenue à partir du théorème II-1 .

Démonstration de la proposition III-4 :

A) Il est facile de vérifier que les fonctions de composition 1) et 2) vérifient la condition (*) de la proposition III-3 . En effet, on a :

$$(x,x') \in \Gamma^o_{T_c} \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x'}{c}} = 1\ .$$

D'où $\forall\, z \in R_+$ on a :

$$(x+z,x'+z) \in D^o_{T_c} \Rightarrow (x+z)T_c(x'+z) = -c\, \mathrm{Log}[e^{-\frac{x+z}{c}} + e^{-\frac{x'+z}{c}}]$$

$$= -c\, \mathrm{Log}[e^{-\frac{z}{c}}(e^{-\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x'}{c}})] = z\ .$$

De même $(x,x') \in \Gamma^o_{INF} \Leftrightarrow \inf(x,x') = 0$, d'où

$$\forall\, z \in \overline{R}_+ \qquad \inf(x+z,x'+z) = \inf(x,x') + z = z\ .$$

B) Montrons maintenant que 1) et 2) sont les seules fonctions de composition universelles.

D'après la proposition III-3 , si T est universelle, elle vérifie (*) . Alors :

a) <u>Si $(0,0) \in D^o_T$</u> :

Choisissons $(x,x') = (0,0)$ alors, de (*) , on a :

$$\forall\, z \in \overline{R}_+ \qquad \varphi_T(z) = zTz = z$$

et de la proposition II.4. , on en déduit que $T \equiv INF$.

b) <u>Si $(0,0) \notin D^o_T$</u> :

Alors il existe $x_o > 0$ tel que $(x_o,x_o) \in \Gamma^o_T$ et de (*) , on déduit que :

$$\forall\, z \in \overline{R}_+ \qquad (x_o+z)T(x_o+z) = z\ .$$

Considérons l'application $\varphi_T : x \rightsquigarrow xTx$, on a :

. $\forall\, x \in]0,x_o] \qquad \varphi_T(x) = 0 < x$

.. $\forall\, x \in]x_o,+\infty[\qquad \varphi_T(x) = \varphi_T(x_o+(x-x_o)) = (x_o+(x-x_o))T(x_o+(x-x_o))$

$$= x - x_o < x\ .$$

On en déduit donc que T vérifie les conditions du théorème II-1 et et par conséquent, il existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ une suite $\{r_n\}_{n\geq 1}$ T-dense. Rappelons que cette suite vérifie entre autres :

. $r_1 = \sup\{x \in \overline{\mathbb{R}}_+ | \varphi_T(x) = 0\}$

. $\forall\, n \geq 1 \qquad r_n = \varphi_T(r_{n+1})$

. $\varphi_T : [r_1,+\infty] \to [0,+\infty]$ est bijective strictement croissante.

Or $(r_1,r_1) \in \Gamma_T^o$ et de (*) , on déduit que :

$$\forall\, n \geq 1 \qquad \varphi_T(r_1+r_n) = (r_1+r_n)T(r_1+r_n) = r_n = \varphi_T(r_{n+1}) \ .$$

D'où :

$$\forall\, n \geq 1 \qquad r_{n+1} = r_n + r_1 \Leftrightarrow \boxed{\forall\, n \qquad r_n = n.r_1} \ .$$

Considérons maintenant l'application g construite dans le théorème II-2 à partir de la suite $\{r_n\}_{n\geq 1}$. On rappelle que g vérifie :

. $g : \overline{\mathbb{R}}_+ \to [0,1]$ est bijective décroissante

.. $\forall\, n \geq 1 \qquad g(r_n) = \dfrac{1}{2^n}$

... $\forall\, (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \qquad g(xTy) = g(x) \dotplus g(y)$

.... $\forall\, (x,y) \in D_T^o \qquad g(xTy) = g(x) + g(y)$.

Il en découle que :

(i) $$\forall\, n \geq 0 \qquad g(n.r_1) = \frac{1}{2^n} = [g(r_1)]^n$$

(ii) $\forall\, (x,x') \in \Gamma_T^o$ et $\forall\, z \in \overline{\mathbb{R}}_+ \qquad (x+z,x'+z) \in D_T^o$ et $g(x+z) + g(x'+z) = g(z)$

(iii) $$\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}}_+ \qquad x' = g^{-1}[1-g(x)]$$

est l'unique point de $\overline{\mathbb{R}}_+$ tel que $(x,x') \in \Gamma_T^o$.

Faisons maintenant intervenir les faits que $(r_1,r_1) \in \Gamma_T^o$ et $g(r_1) = \frac{1}{2}$.

On a :

$$\forall\ z \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad g(z) = 2g(z+r_1) \Rightarrow g(z+r_1) = \tfrac{1}{2}g(z) = g(z).g(r_1) \ .$$

D'autre part, comme $\forall\ n \geq 1 \quad r_n = n.r_1$, on en déduit que :

$$\forall\ z \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad g(z+r_n) = g(z+n.r_1) = g(z).[g(r_1)]^n = g(z).g(r_n)$$

d'où

(iv) $$\forall\ n \geq 1 \text{ et } \forall\ z \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad g(z+r_n) = g(z).g(r_n) \ .$$

Les deux lemmes qui suivent nous permettront de conclure.

<u>LEMME</u> 1 .

Pour tout partie finie $E \subset \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$r_p + \underset{i\in E}{\mathrm{T}}\, r_i = \underset{i\in E}{\mathrm{T}}\, r_{i+p} = \underset{i\in E+p}{\mathrm{T}}\, r_i$$

où l'on pose $E + p = \{n+p | n \in E\}$.

<u>Preuve</u> : En effet, E étant fixé, de (iv) on déduit que :

$$\forall\ p \geq 1 \quad g(\underset{i\in E}{\mathrm{T}}\, r_i + r_p) = g(r_p).g(\underset{i\in E}{\mathrm{T}}\, r_i) = g(r_p).\sum_{i\in E} \frac{1}{2^i}$$

$$= \frac{1}{2^p} \sum_{i\in E} \frac{1}{2^i} = \sum_{i\in E} \frac{1}{2^{i+p}} = g(\underset{i\in E}{\mathrm{T}}\, r_{i+p}) \ .$$

ce qui prouve le lemme, car g est bijective.

LEMME 2 .

Pour toute partie finie $E \subset \mathbb{N}^*$ et pour tout $z \in \overline{\mathbb{R}}_+$, on a :

$$g(z + \underset{i\in E}{\mathrm{T}}\, r_i) = g(z).g(\underset{i\in E}{\mathrm{T}}\, r_i) \ .$$

Preuve : On opèrera par récurrence sur $m(E) = \max\limits_{k\in E}(k)$.

D'après (iv), le lemme est vrai pour $m(E) = 1$. Supposons le lemme vrai pour $m(E) \leq n$ et montrons qu'il est aussi vrai pour $m(E) = n+1$.

Soit $E \subset \mathbb{N}^*$ tel que $m(E) = n+1$ ($\Rightarrow n+1 \in E$) . Posons $x = \underset{i\in E}{\mathrm{T}}\, r_i$ $E' = \{1,\dots,n+1\}\backslash E$. On distingue deux cas :

α) Si $1 \notin E$:

Alors $x = \underset{i\in E}{\mathrm{T}}\, r_i = r_1 + \underset{i\in E-1}{\mathrm{T}}\, r_i$ .en vertu du lemme 1 . D'où

$$\forall\ z \in \overline{\mathbb{R}}_+ \qquad g(z+x) = g(z+r_1 + \underset{i\in E-1}{\mathrm{T}}\, r_i)$$

et d'après (iv)

$$= g(z + \underset{i\in E-1}{\mathrm{T}}\, r_i).g(r_1)$$

et comme $m(E-1) = n$

$$= g(z).g(\underset{i\in E-1}{\mathrm{T}}\, r_i)g(r_1)$$

$$= g(z).g(r_1 + \underset{i\in E-1}{\mathrm{T}}\, r_i) = g(z).g(x) \ .$$

β) Si $1 \in E$:

Dans ce cas, l'ensemble, $E'' = E' \cup \{n+1\}$ ne contient pas 1 , et d'autre part, si $x = \underset{i\in E}{\mathrm{T}}\, r_i$ alors $x' = \underset{i\in E''}{\mathrm{T}}\, r_i$. Ainsi de (ii) on déduit que $\forall\ z \in \overline{\mathbb{R}}_+$, on a :

$$g(z+x) = g(z) - g(z + \underset{i\in E''}{\mathrm{T}} r_i) .$$

Or $1 \notin E''$ et d'après (α) , $g(z+\underset{i\in E''}{\mathrm{T}} r_i) = g(z).g(\underset{i\in E''}{\mathrm{T}} r_i) = g(z).g(x)$ d'où

$$g(z+x) = g(z)[1-g(x')] = g(z).g(x) .$$

C.Q.F.D.

Montrons maintenant que :

(v) $$\forall\ (x,y) \in R_+ \times R_+ \qquad g(x+y) = g(x).g(y) .$$

Pour cela il suffit de considérer le développement de y , noté $\{r_{n_k}\}_{k\geq 1}$, dans la suite $(r_n)_{n\geq 1}$; et de poser $y_p = \overset{p}{\underset{k=1}{\mathrm{T}}} r_{n_k}$. On a :

. $\lim\limits_{p\to\infty} y_p = y$

.. $g(x+y_p) = g(x + \overset{p}{\underset{k=1}{\mathrm{T}}} r_{n_k}) = g(x).g(y_p)$ en vertu du lemme 2 .

... $g(x+y) = \lim\limits_{p\to\infty} g(x+y_p) = g(x).g(y)$ en vertu de (..) et de la continuité de g .

De la continuité de g et de (v) , on déduit que :

$$\forall\ x \in \overline{R}_+ \qquad g(x) = e^{-\frac{x}{c}}$$

où $c = -\dfrac{1}{\mathrm{Log}\,[g(1)]} > 0$ car $g(1) \in]0,1[$, et par conséquent

$$\forall\ (x,y) \in \overline{R}_+ \times \overline{R}_+ \qquad x\mathrm{T}y = -c\ \mathrm{Log}[e^{-\frac{x}{c}} \dotplus e^{-\frac{y}{c}}] .$$

La proposition III-4 est ainsi établie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DAROCZY (Z.) "Uber eine Charakterisierung der Shannon'schen Entropie".
Statistica 27, 1967, p.p. 199-205.

[2] FADEEV (D.K.) "Zum Begriff der Entropie eines endlichen Wahrscheinlich keitsschema".
Uspehi Mat.

[3] FAUCETT (W.M.) "Compact semi-groups irreducibily connected betwenn two idempotents".
Proc. Amer. Math. Soc., 6, 1955, p. 741.

[4] KAMPE de FERIET (J.) "Mesure d'information fournie par un évènement".
Séminaire sur les questionnaires I.H.P. (1971).

[5] KAMPE de FERIET (J.)- FORTE (B.) "Information et Probabilité".
C.R.A.S., Paris, 265 A (1969).

[6] KAMPE de FERIET (J.)- FORTE (B.)- BENVENUTI (A.) "Forme générale de l'opération de composition continue d'une information".
C.R.A.S., Paris, 269 A (1969).

[7] KINTCHINE (A.I.) "Mathematical Foundations of information theory".
Dover Publications, Inc., New-York (1957).

[8] LING (C.H.) "Representation of associative functions".
Publicationes Math., 12, 1965, p. 189.

[9] MOSTERT (P.S.)- SHIELDS (A.L.) On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary.
Ann. of Math., 65, 1957, p. 117.

[10] PINTACUDA (N.) "Shannon Entropy. A more general derivation".
Statistica n° 2 anno XXVI, 1966, p.p. 511-524.

[11] RENYI (A.) "Calcul des probabilités".
Dunod, Paris, 1966.

[12] SHANNON (C.) "The mathematical theory of communications". Univ. of Illinois Press, Urbana (1948).

[13] WIENER (N.) "Cybernetics". Paris, Hermann, Act. Sc. 1053, (1948).

[14] KAPPOS (D.A.) Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeits-Felder und Räume, Berlin, Springer (1960), p. 77.