MARC OLIVIER GEBUHRER

# Une classe de processus de Markov en mécanique relativiste. Laplaciens généralisés sur les espaces symétriques de type non compact

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 8 (1974), p. 80-133

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__80_0>

# UNE CLASSE DE PROCESSUS DE MARKOV EN MECANIQUE RELATIVISTE

# LAPLACIENS GENERALISES SUR LES ESPACES SYMETRIQUES DE TYPE NON COMPACT

par M.O. GEBUHRER

Le texte qui suit est une Thèse de Troisième cycle, soutenue le 16 Novembre 1973 devant un jury composé de C.DELLACHERIE, J. FARAUT, P.A.MEYER .

Il est dédié par son auteur à CORREA, reparti pour le Chili, et dont on n'a plus de nouvelles.

TABLE DES MATIERES

## Première partie

## UNE CLASSE DE PROCESSUS DE MARKOV EN MECANIQUE RELATIVISTE.

## Deuxième partie

## PRINCIPE COMPLET DU MAXIMUM ET LAPLACIENS GENERALISES SUR LES ESPACES RIEMANNIENS SYMETRIQUES DE TYPE NON COMPACT.

# I$^{ère}$ PARTIE

# UNE CLASSE DE PROCESSUS DE MARKOV EN MECANIQUE RELATIVISTE

## § 1. RAPPELS DE CINEMATIQUE RELATIVISTE

On se propose d'étudier d'après un article de Dudley [1], certains types de processus stochastiques décrivant des mouvements aléatoires relativistes, qui possèdent à la fois une "propriété de Markov" raisonnable, et des propriétés d'invariance par le groupe de Lorentz qui les apparentent aux processus à accroissements indépendants classiques. Notre contribution à cette question est d'abord un essai de clarification de la notion de mouvement aléatoire relativiste et ensuite une modification des démonstrations de Dudley (dont il faut dire que certains points nous échappent, particulièrement dans celle du Théorème 5.1 [1]) destinée à les débarasser d'hypothèses que Dudley lui-même considère comme parasites.

Voici d'abord quelques notations générales. La vitesse de la lumière est prise comme unité. Intuitivement, nous appellerons référentiel d'inertie un couple $\rho = (R,H)$ constitué d'un repère orthonormé pour l'espace $R$, et d'une horloge $H$ liée à ce repère. L'expérience conduit à postuler l'existence de tels système de référence pour lesquels l'espace est homogène et isotrope et l'écoulement du temps uniforme. Tout autre référentiel d'inertie $\bar{\rho}$ considéré sera supposé en mouvement de translation uniforme par rapport à $\rho$ , à une vitesse strictement inférieure à celle de la lumière.

Du point du vue mathématique, cela a la signification suivante : nous disposons d'une certaine variété à 4 dimensions $E$ appelée espace-temps. Un référentiel d'inertie $\rho$ est une application de $E$ dans $R^4$ , bijective qu'on note

$$(1) \qquad M \longmapsto \rho^{-1}(M) = x$$

Si $\bar{\rho}$ est un second référentiel d'inertie, la relation entre le 4-vecteur $x$ et le 4-vecteur $\bar{x} = \bar{\rho}^{-1}(M)$ est

$$(2) \qquad \bar{x} = L^{-1} x = -\alpha + L_h^{-1} x$$

où $L$ appartient au groupe de Poincaré $\mathcal{L}$ ou groupe de Lorentz non homogène, $-\alpha = L^{-1}(0)$ et $L_h$ appartient au groupe de Lorentz proprement dit. On se bornera toujours dans la suite aux changements de référentiels d'inertie pour lesquels $L$ appartient à la composante connexe neutre de $\mathcal{L}$ c'est à dire pour lesquels $L_h$ conserve l'orientation de l'espace et le sens du temps. On supposera aussi que la coordonnée temporelle est celle d'indice $0$ . On écrira simplement $\bar{\rho} = \rho L = \alpha + \rho L_h$ .

Considérons le mouvement d'une particule relativiste ayant une masse au repos non nulle. Il sera commode pour nous de le représenter dans le référentiel $\rho$ par un couple $(t_o, \omega)$ d'un élément de $R$ (l'instant initial) et d'une application de $R$ dans $R^3$, le mouvement proprement dit ayant pour image dans $E$ par $\rho$ l'application $s \mapsto \omega(t_o + s)$ de $[0, +\infty[$ dans $R^3$.

La particule ayant une masse non nulle , sa vitesse est toujours strictement inférieure à celle de la lumière : une manière confortable d'exprimer cela est d'imposer à $\omega$ d'être sur tout intervalle compact $I$ de $R_+$, une fonction lipschitzienne de rapport $a_I < 1$ . (En fait dans ce paragraphe on n'utilisera que l'hypothèse moins forte : l'application $\omega$ est lipschitzienne de rapport 1 et telle que $|\dot{\omega}(t)| < 1$ presque partout pour la mesure de Lebesgue ).

Pour fixer les idées et travailler sur des fonctions partout définies, nous définirons le 3 vecteur vitesse $\dot{\omega}(t)$ comme la dérivée à droite $\frac{d\omega(t)}{dt^+}$ là où elle existe et 0 aux points t où elle n'existe pas.

Comment se représente le mouvement dans le référentiel $\bar{\rho} = \rho L$ ?

En fonction du temps écoulé dans l'hor~~o~~loge H représenté par le paramètre t , le mouvement est représenté par le 4-vecteur $L^{-1}(t_o+t,\omega(t)) = (t_o^L + \varphi_L(t),\omega_L(t))$ où le nouvel instant initial $t_o^L$ est déterminé par

$$(t_o^L , \omega_L(0)) = L^{-1} (t_o , \omega(0)) .$$

Il dépend donc de $t_o$ et de $\omega(0)$ . La fonction $\varphi_L$ est strictement croissante continue et nulle pour $t=0$ , telle que $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi_L(t) = +\infty$ comme on le démontrera plus loin.

Si $\Psi_L$ désigne la fonction réciproque de $\varphi_L$ , le mouvement est décrit dans le référentiel d'inertie $\bar{\rho}$ par le couple (3) $L^{-1}(t_o,\omega) = (t_o^L,\bar{\omega}_L)$ où $t_o^L$ a été défini plus haut et où $\bar{\omega}_L$ est l'application

$$s \longmapsto \omega_L(\Psi_L(s)) .$$

On a des considérations analogues pour les vitesses . Il est avantageux de caractériser la vitesse, non pas au moyen du 3-vecteur de composantes $\omega^i(t)$ $(i=1,2,3)$ mais au moyen du 4-vecteur de composantes.

(4) indice 0 : $(1-\|\dot{\omega}(t)\|^2)^{-1/2}$ , indice $i=1,2,3$ : $\omega^i(t)(1-\|\dot{\omega}(t)\|^2)^{-1/2}$

qui appartient à la nappe d'hyper boloïde

$$\mathcal{U} = \{x \in R^4 \mid x = (x_o,x_1,x_2,x_3),\ x_o > 0 ,\ x_o^2 - (x_1^2+x_2^2+x_3^2) = 1\}$$

Ce 4 - vecteur est appelé la 4 - vitesse de la trajectoire à l'instant $t_o + t$ . On le désignera par $\widehat{\dot\omega(t)}$ et ses coordonnées par $\widehat{\dot\omega(t)}^i$ $(i = 1,2,3)$

L'intérêt de ce 4 - vecteur tient au fait suivant : à l'instant $t_o + t$ de l'horloge $H$ , la 4 - vitesse de la trajectoire dans le référentiel d'inertie $\bar\rho$ est

$$\widehat{\dot\omega_L(t)} = L_h^{-1}(\widehat{\dot\omega(t)})$$

et la trajectoire de la 4 - vitesse dans le référentiel d'inertie $\bar\rho$ est l'application $s \to \widehat{\dot\omega_L(\psi_L(s))}$ . Une autre manière de décrire la trajectoire qui jouera un grand rôle dans la suite, consiste à la paramétrer par son temps propre. Le temps propre de la particule $\omega$ est le temps indiqué par une horloge entraînée par la particule en mouvement.

Si l'on place dans le référentiel $\rho$ , le temps propre à l'instant $t_o + t$ est

$$\tau(t,\omega) = \int_0^t (1 - \|\dot\omega(s)\|^2)^{1/2}\, ds \tag{5}$$

où $\dot\omega$ est le 3 - vecteur vitesse.

C'est aussi $\tau(t,\omega) = \int_0^t (\widehat{\dot\omega(s)}^o)^{-1}\, ds$ où $\hat{\dot\omega}^o$ est la composante temporelle de la 4 - vitesse de la particule $\omega$ .

Comme $\omega$ est lipschitzienne de rapport $< 1$ sur tout intervalle compact , l'application $\tau_\omega$ est une fonction strictement croissante de $t$ mais il n'est pas exclu que la vitesse de la particule se rapproche de plus en plus de celle de la lumière de telle sorte que la limite

$$\zeta(\omega) = \lim_{t \to +\infty} \tau_\omega(t) = \lim_{t \to \infty} \tau(t,\omega) \tag{6}$$

soit finie.

Soit alors $j_\omega$ l'application définie par

$$j_\omega(\sigma) = \tau_\omega^{-1}(\sigma) \quad \text{si} \quad \sigma \in [0, \zeta(\omega)[$$

et

$$\lim_{\substack{\sigma \to \zeta(\omega) \\ \sigma < \zeta(\omega)}} j_\omega(\sigma) = j_\omega(\zeta^-) = +\infty$$

Paramétrons au moyen du temps propre la trajectoire de la 4-vitesse ce qui nous donne l'application à valeurs dans la nappe d'hyperboloïde de $\mathcal{U}$

$$W : \tau \longmapsto \widehat{(\dot{\omega}(j_\omega(\tau))}. \tag{7}$$

C'est une fonction borélienne à valeurs dans $\mathcal{U}$ définie sur $[0, \zeta(\omega)[$ la première coordonnée est $\geq 1$ sur $[0, \zeta(\omega)[$ mais le fait que le module de Lipschitz de $\omega$ soit $< 1$ sur tout intervalle compact de $R_+$ entraîne que $W$ est bornée sur tout compact de $[0, \zeta(\omega)[$ .

De plus

$$\int_0^\tau W^0(s) \quad ds = j_\omega(\tau) \quad \text{si} \quad \tau < \zeta(\omega)$$

et

$$\lim_{\substack{\tau \to \zeta(\omega) \\ \tau < \zeta(\omega)}} \int_0^\tau W^0(s) \quad ds = +\infty = j_\omega(\zeta^-)$$

Inversement, si $W$ est une fonction à valeurs dans $\mathcal{U}$, borélienne bornée sur tout intervalle compact de son intervalle de définition $[0, \zeta(\omega)[$ et telle que

$$\lim_{\substack{\tau \to \zeta(\omega) \\ \tau < \zeta(\omega)}} \int_0^\tau (W^0(s)) \quad ds = +\infty \quad \text{la formule} \tag{8}$$

$$\omega^i(t) = \omega^i(0) + \int_0^{h_\omega(t)} W^i(s)ds \quad (i = 1,2,3) \quad \text{définit bien} \tag{9}$$

une fonction lipschitzienne de rapport $<1$ sur tout intervalle compact de $R_+$ à valeurs dans $R^3$ si $h_\omega$ est l'application réciproque de l'application $j_\omega$ : $[0,\zeta(\omega)[ \to R_+$ définie par

$$j_\omega(\tau) = \int_0^\tau (W^o(s)) \quad ds .$$

De plus on a $\widehat{(\dot{\omega}(h_\omega(t)))} = W(t)$ pour presque tout $t \in R_+$, l'application $h_\omega$ étant alors le temps propre de $\omega$.

L'avantage de cette représentation est le suivant : dans un référentiel d'inertie $\bar{\rho} = \rho L$ la nouvelle fonction $\bar{W}$ est tout simplement

$$(10) \qquad \bar{W} : s \longmapsto L_h^{-1}(W(s)).$$

Un résultat auxiliaire.

Reprenons la notation $\bar{\rho} = \rho L = \alpha + \rho L_h$. Soit $V_L$ le 3-vecteur représentant dans le référentiel $\rho$, la vitesse de translation du second repère par rapport au premier. Comme d'habitude on notera $\beta_L$, le module $\|V_L\|$ et $\gamma_L$ la quantité $(1-\beta_L^2)^{-1/2}$.

Nous désignons par $\rho_1$ le référentiel d'inertie $\alpha + \rho$ ; nous désignons par $\rho_2$ un référentiel au repos par rapport à $\rho$ et à $\rho_1$ (on aura donc $H_1 = H_2$) dont le repère $R_2$ a même origine que $R_1$ et son premier axe de coordonnées dirigé suivant le vecteur vitesse de $\rho_1$ ($V_L$). Nous désignons par $\bar{\rho}_3$ le référentiel en repos par rapport à $\bar{\rho}$ tels que les axes de $\bar{R}_3$ coïncident avec ceux de $R_2$ à l'instant 0 (commun) des horloges $H_2$ et $\bar{H}$. On écrira

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \alpha + \rho && \text{(translation pure)}\\
\rho_2 &= G\,\rho_1 && \text{(rotation spatiale pure)}\\
\rho_3 &= s_{\beta_L}\,\rho_2 && \text{(transformation de Lorentz spéciale)}\\
\bar{\rho} &= \bar{G}\,\rho_3 && \text{(rotation spatiale pure) .}
\end{aligned}$$

Les transformations $G$ , $\bar{G}$, $s_{\beta_L}$ sont déterminées de manière unique si $V_L \neq 0$ .

Ainsi
$$L_h = \bar{G}\, s_{\beta_L}\, G\ .$$

Rappelons l'expression de $s_\beta$ .

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \bar{x}_o & = & \gamma_L(x^o - \beta_L\, x^1) \\ x^1 & = & \gamma_L(x^1 - \beta_L\, x^o) \\ \bar{x}^2 & = & x^2,\ \bar{x}^3 = x^3 \end{array} \right.$$

Une première conséquence de cette décomposition est le comportement de la fonction $\varphi_L$ rencontrée en introduction.

Les translations et les rotations spatiales n'altèrent pas cette fonction la fonction $\varphi_L$ admet une représentation de la forme

$$(12) \qquad \varphi_L(t) = \gamma_L(t - \beta_L < a,\ \omega(t) - \omega(0) >)$$

où la forme linéaire $a$ (projection sur le premier axe du repère $\rho_2$) a une norme égale à 1.

Comme $\beta_L < 1$ et $\omega$ est lipschitzienne de rapport $\leq 1$ on trouve aussitôt que $\varphi_L$ est strictement croissante et que sa limite à l'infini est $+\infty$ .

Nous allons maintenant examiner de quelle manière varie, en fonction de $L$ (parcourant le groupe de Poincaré $\mathcal{L}$) le couple

$$(t_o^L\ ,\ \omega_L) = L^{-1}(t_o, \omega)$$

représentant le mouvement dans le référentiel $\bar{\rho} = \rho\, L$ .

LEMME 1. - Soit $f$ un élément de $C_o\ (R^4 \times \mathcal{U})$ et soit $\lambda > 0$ .

Pour tout couple $(t_o, \omega)$ posons

$$(13) \qquad u^\lambda((t_o, \omega)\ ; f) = \int_o^\infty f(t_o + s\ ,\ \omega(s),\ \hat{\dot{\omega}}(s))e^{-\lambda s}\, ds$$

Alors la fonction sur le groupe de Poincaré $\mathcal{L}$ à valeurs réelles :

(14) $$L \longmapsto u^{\lambda}(L^{-1}(t_o, \omega) ; f)$$

est dans $C_o(\mathcal{L})$.

Démonstration.

1) Continuité.

Il suffit de vérifier la continuité de cette application au point $I$ de $\mathcal{L}$. En utilisant comme paramètre le temps $t$ écoulé dans le référentiel d'inertie "fixe" $\rho$ [c'est à dire la coordonnée d'indice $0$ dans $R^4$]

(15) $$u^{\lambda}(L^{-1}(t_o, \omega), f) = \int_o^{\infty} f(L^{-1}(t_o+t, \omega(t)), L_h^{-1}\hat{\dot{\omega}}(t))\, e^{-\lambda\, \varphi_L(t)}\, \varphi_L'(t)\, dt$$

Lorsque $L$ tend vers l'élément neutre $I$ de $\mathcal{L}$, $\beta_L$ tend vers $0$ et $\gamma_L$ tend vers $1$ ; l'application $\omega$ étant lipschitzienne de rapport $\leq 1$, pour $L$ assez près de $I$ on a $\frac{1}{2} \leq \varphi_L'(t) \leq 2$ pour tout $t$ et donc $\frac{t}{2} \leq \varphi_L(t) \leq 2t$ (formule (12)).

Cela permet de majorer uniformément en $L$ (assez voisin de $I$) l'intégrale de $N$ à $+\infty$ (pour $N$ assez grand) et il nous suffit de montrer que sur $[0,N]$.

$$\lim_{L \underset{\mathcal{L}}{\to} I} L^{-1}(t_o+t, \omega(t)) = (t_o+t, \omega(t))$$

$$\lim_{L \underset{\mathcal{L}}{\to} I} L_h^{-1}(\hat{\dot{\omega}}(t)) = \hat{\dot{\omega}}(t)$$

$$\lim_{L \underset{\mathcal{L}}{\to} I} \exp - \lambda\, \varphi_2(t) = \exp - \lambda t$$

$$\lim_{L \underset{\mathcal{L}}{\to} I} \varphi_L'(t) = 1 .$$

Tout ceci est trivial et prouve la continuité de l'application définie par la formule (14) du lemme 1, § 1 par application du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

2) Comportement à l'infini.

On notera ici $f((t,x),\dot{x})$ la fonction $f$ sur $R^4 \times \mathcal{U}$.

On peut se borner au cas ou $f$ est continue à support compact comprise entre 0 et 1.

On fait la remarque suivante : L'ensemble

$$K_M = \{L \in \mathcal{L} \mid L = \alpha_L + L_h, \ \|\alpha_L\| \leq M, \ \beta_L \leq 1 - \frac{1}{M}\}$$

est compact dans le groupe de Poincaré pour tout $M \in [1, \infty[$. Il suffit par conséquent de montrer que $\lim\limits_{L \xrightarrow{\mathcal{L}} \infty} u^\lambda(L^{-1}(t_o,\omega) ; t) = 0$ dans chacun des deux cas suivants :

A) $\|\alpha_L\| \to +\infty, \quad \beta_L \leq a < 1$ B) $\beta_L \to 1$.

CAS A

Nous majorons $f$ par une fonction $h(t,x)$ comprise entre 0 et 1 continue à support compact sur $R^4$.

Nous écrivons $u^\lambda(L^{-1}(t_o,\omega) ; h)$ dans le repère $\bar{\rho} = L\rho$, soit

$$\int_o^\infty h(t_o^L + s, \quad \omega_L(s))e^{-\lambda s} ds$$

Pour montrer que cela tend vers 0 lorsque $L$ s'éloigne à l'infini de la manière indiquée, il suffit de montrer cela pour l'intégrale étendue à un intervalle fini $[0,N]$ où $N$ est choisi assez grand.

Or la fonction $s \longmapsto (t_o^L + s, \omega_L(s))$ est lipschitzienne (dans $R^4$ muni de la norme euclidienne) de rapport au plus $\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{1/2}$ ( car $\beta_L \leq a < 1$ ).

Sur l'intervalle $[0,N]$ le graphe de la fonction $s \to (t_o^L + s\,,\ \omega_L(s))$ est contenu dans la boule $(t_o^L, \omega_L(0))$ et de rayon $\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{1/2} N$. Mais cette boule s'éloigne à l'infini car son rayon est fixe et son centre $-q_L + L_h^{-1}(t_o, \omega(0))$ s'éloigne à l'infini. Elle finit donc par ne plus rencontrer le support de $h$ et on a le résultat cherché.

CAS B

Nous majorons $f$ par une fonction $h$ comprise entre $0$ et $1$ continue à support compact sur $\mathcal{U}$ ; puis nous majorons celle-ci par une fonction de la forme $k(x^o)$ ne dépendant que de la première coordonnée sur $\mathcal{U}$ $k$ étant continue à support compact sur $R$ comprise entre $0$ et $1$. Nous prenons $u^\lambda$ sous la forme (15) :

$$\int_o^\infty k((L_h^{-1}(\widehat{\dot{\omega}(t)}))^o)e^{-\lambda\,\varphi_L(t)}\,\varphi_L'(t)dt \tag{16}$$

Comme $\beta_L$ tend vers $1$, nous pouvons supposer $\beta_L \neq 0$ et utiliser la forme $L_h = \overline{G}\,s_\beta\,G$ de $L_h$ rencontrée plus haut.

L'action de $\overline{G}$ ne modifie pas les composants d'indice $0$ sur la fonction $\varphi_L$ qui intervient dans une composante temporelle. L'intégrale est donc la même que pour $s_\beta G$. Pour évaluer celle-ci nous pouvons supposer que $\omega(o) = 0$ puisque les termes de translation n'interviennent pas. Alors $\varphi_L$ est donnée par la formule

$$\varphi_L(t) = \gamma_L(t - \beta_L < a, \omega(t) >) \tag{17}$$

où la forme linéaire $a$ sur $R^3$ de norme $1$ dépend de $G$. La composante d'indice $0$ de la $4$-vitesse s'écrit alors

$$\frac{\gamma_L(1 - \beta_L < a, \omega(t) > )}{(1 - \|\dot{\omega}(t)\|^2)^{1/2}} \tag{18}$$

où $\dot{\omega}(t)$ est ici la $3$-vitesse

Choisissons $N > 0$ fixe. La composante temporelle de la 4-vitesse est le produit d'une quantité bornée inférieurement sur $[0,N]$, (du fait que $\omega$ est lipschitzienne sur $[0,N]$ de rapport $< 1$), par $\gamma_L$ qui tend vers $+\infty$. Par conséquent elle tend uniformément vers $+\infty$ et comme $k$ est à support compact, la fonction intégrée finit par être identiquement nulle du $[0,N]$. D'autre part la mesure positive $\exp -\lambda\,\varphi_L(t)\quad \varphi_L(t)dt = \frac{1}{\lambda} d(1-\exp(-\lambda\varphi_L(t)))$ est de masse $\frac{1}{\lambda}$ sur $R_+$ et la masse de l'intervalle $[N, +\infty[$ est

$$\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\varphi(N)} = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\,\gamma_L(N - \beta_L < a,\, \omega(N)>)} \leq \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\gamma_L(N - \|\omega(N)\|)}$$

Elle tend bien vers 0 lorsque L tend vers l'infini dans les conditions indiquées et le lemme est établi.

## § 2. PROCESSUS RELATIVISTES

RAPPELS. - PROCESSUS PRESQUE MARKOVIENS.

Nous laissons de côté pour l'instant la cinématique relativiste, et nous considérons un espace d'états $E$ localement compact à base dénombrable. Nous nous donnons sur cet espace une résolvante markovienne $(V_p)$, qui transforme les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes. Nous supposerons qu'elle satisfait à la condition de continuité faible suivante (entraînant qu'elle sépare les points de $E$ )

(19) $$\lim_{p\to\infty} pV_pf = f \quad \text{si} \quad f\in \underline{\underline{C}}_c(E)$$

La méthode exposée dans l'article (Meyer) [2] ou Walsh [1] nous montre que $E$ peut être plongé, de manière naturelle (comme espace mesurable, non comme espace topologique) dans un espace compact $\bar{E}$ métrisable, muni d'une résolvante de Ray $\bar{V}_p$ markovienne induisant $V_p$ sur $E$, tel en outre que $E$ soit dense dans $\bar{E}$, et que la résolvante $\bar{V}_p$ sépare $\bar{E}$. Nous noterons $\underline{\underline{c}}$ l'algèbre (séparable) de fonctions boréliennes sur $E$ formé des restrictions à $E$ des fonctions de $\underline{\underline{C}}(\bar{E})$.

Considérons maintenant un processus $(Z_t)$ à valeurs dans $E$, progressivement mesurable par rapport à une famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$. Nous dirons que ce processus est presque markovien, avec résolvante $(V_p)$, si pour presque tout $t$ on a

$$E[\int_0^\infty e^{-ps} f\circ Z_{t+s}\,ds \mid \underline{\underline{\mathcal{F}}}_t] = V_p(Z_t,f) \quad \text{p.s.}$$

$(p>0,\ f\in\underline{\underline{C}}_c(E))$. On peut en fait choisir un ensemble de mesure nulle $N$ indépendant de $p$ et $f$, et alors la relation vaut aussi pour $f$ borélienne bornée, en particulier $f\in\underline{\underline{c}}$.

On en déduit que les processus $(p \in ]0,\infty[\,,\ f \in \underline{\underline{c}})$

$$\int_0^t e^{-ps} f \circ Z_s \, ds + e^{-pt} V_p(Z_t, f)$$

sont, pour $t \notin N$, des martingales. Utilisant la théorie de Walsh [2], et le fait que les $\overline{V}_p f$ $(f \in \underline{\underline{c}})$ séparent $\overline{E}$, et sont continues sur $\overline{E}$, nous voyons que le processus à valeurs dans $\overline{E}$

$$Y_t = Z_{t+} = \lim_{s \downarrow\downarrow t} \text{ess } Z_t$$

existe, est continu à droite et pourvu de limites à gauche, markovien avec $(\overline{P}_t)$ - le semi-groupe associé à la résolvante de Ray - comme s.g. de transition, par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+})$, et enfin que $Y_t = Z_t$ p.s. pour <u>presque tout</u> $t$. Autrement dit, un processus presque markovien n'est rien d'autre qu'un processus obtenu en modifiant un vrai processus markovien, de manière arbitraire sur un ensemble de mesure nulle.

Nous avons développé tout cela pour parvenir aux résultats suivants si $T$ est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F}_{t+})$ on a pour presque tout $t$ $Z_{T+t} = Y_{T+t}$ (Théorème de Fubini), donc le processus $Z_{T+t}$ est presque markovien avec la même résolvante. De même soit $(A_t)$ une fonctionnelle addition continue strictement croissante de la forme

$$A_t = \int_0^t h \circ Z_s \, ds \text{ ( } h \text{ positive borélienne bornée sur } E \text{ )}$$

Nous supposerons pour simplifier que $A_\infty = \infty$. Soit $(\tau_t)$ le changement de temps inverse de $(A_t)$ : on sait que le processus $y_{\tau_t}$ est markovien et on a d'autre part

$$E[\int_0^\infty I_{\{Z_{\tau_s} \neq Y_{\tau_s}\}} ds] = E[\int_0^\infty I_{\{Z_s \neq Y_s\}} dA_s] = 0$$

(en fait, on n'utilise pas la forme explicite de $A$ mais seulement le fait qu'elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue). Donc le processus $Z_{T_s}$ est encore presque markovien. On peut écrire sa résolvante

$$(20) \qquad V'_p f(x,t) = E^x\left[\int_0^\infty e^{-ps} f \circ Z_{T_s}\, ds\right] = E^x\left[\int_0^\infty e^{-pA_u} f \circ Z_u\, dA_u\right]$$

<u>Processus Relativistes.</u>

Désignons par $\Omega$ l'ensemble de toutes les applications $\omega$ de $R_+$ dans $R^3$ qui sont lipschitziennes de rapport $<1$ sur tout intervalle compact. Nous poserons $\omega(t) = X_t(\omega)$ et nous munirons $\Omega$ de la plus petite tribu rendant mesurables les applications $X_t$ de $\Omega$ dans $R^3$ tribu que nous noterons $\mathfrak{F}$.

Nous travaillerons également sur l'espace $\hat{\Omega} = \mathbb{R} \times \Omega$ muni de la tribu $\beta(\mathbb{R}) \times \mathfrak{F}$ : si $(t_o,\omega)$ est un élément de $\hat{\Omega}$ nous conviendrons de poser $T_o(t_o,\omega) = t_o$, $\hat{X}_t(t_o,\omega) = X_t(\omega)$.

<u>Un mouvement aléatoire relativiste</u> est (intuitivement) un phénomène aléatoire qui, pour chaque référentiel d'inertie donné, se présente comme un processus stochastique ordinaire dont les trajectoires sont des mouvements relativistes possibles. Autrement dit, pour chaque référentiel d'inertie $\rho$, on se donne une loi $P_\rho$ de probabilité sur $\hat{\Omega}$ : c'est le processus résultant de l'observation du mouvement aléatoire dans le référentiel d'inertie $\rho$ considérée. Ces lois sont soumises à une condition de compatibilité qu'on va expliciter.

Considérons un second référentiel d'inertie $\bar{\rho} = \rho L$ ; nous avons défini au § 1 une application de $\hat{\Omega}$ dans lui-même

$$(t_o,\omega) \longmapsto L^{-1}(t_o,\omega) = (t_o^L, \omega_L)$$

Cette application sera notée tout naturellement $L^{-1}$, elle est mesurable et on peut donc considérer pour toute mesure P sur $\hat{\Omega}$, la mesure image $L^{-1} \circ P$. Notre condition de compatibilité s'écrit alors :

(21) $\quad P_{\rho L} = L^{-1} \circ P_\rho$ pour tout L et tout référentiel d'inertie $\rho$.

Pour déterminer le mouvement aléatoire, il suffit bien entendu de se donner $P_\rho$ pour <u>un</u> référentiel $\rho$. On notera le rôle de l'instant initial : si le processus commence à l'instant 0 dans un référentiel donné, mais sa répartition initiale n'est pas ponctuelle, alors dans un autre référentiel les mouvements commenceront à un instant aléatoire. La situation est donc un un peu plus compliquée que dans le cas "non relativiste".

Avec la définition que nous avons prise pour la 3-vitesse et la 4-vitesse, au § 1, nous pouvons considérer les variables aléatoires $\dot{X}_t$ sur $\Omega$ à valeurs dans la boule unité ouverte de $R^3$ ou les variables $\hat{\dot{X}}_t$ sur $\hat{\Omega}$ à valeurs dans $\mathcal{U}$.

Il s'agit là d'une définition artificielle, qui permet seulement de faire du processus $(\dot{X}_t)$ ou $(\hat{\dot{X}}_t)$ un processus partout défini progressivement mesurable par rapport à la famille de tribus naturelle $\hat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{T}(T_o, \hat{X}_s ; s \leq t)$ rendue continue à droite ou (la famille $\overline{\mathcal{F}}_t$ analogue sur $\Omega$) mais seules les fonctionnelles du processus $(X_t)$ dépendant seulement de la trajectoire auront une signification intrinsèque.

<u>Processus markoviens relativistes.</u>

Il est bien connu que les processus markoviens classiques présentent rarement des trajectoires continues et encore plus rarement des trajectoires différentielles. Etant donné le caractère négatif de cette remarque qui dit qu'une certaine direction de recherche n'est pas intéressante, affirmation confirmée par une étude plus détaillée de Dudley, nous nous dirigerons tout de suite vers la situation intéressante.

Nous allons rechercher des processus relativistes $(X_t)$, non pas tels que le processus $(X_t)$, observé dans un référentiel d'inertie quelconque soit un processus de Markov ordinaire (puisque cela ne conduirait à rien d'intéressant), mais tels que le couple $(X_t, \dot{X}_t)$ observé dans un référentiel d'inertie quelconque, présente un caractère markovien au sens ordinaire. Bien entendu, le "temps" est celui du référentiel d'inertie d'observation. Cependant le processus $(\dot{X}_t)$ n'étant pas défini de manière naturelle pour tous les $t$, le caractère markovien sera en fait un caractère presque markovien.

Pour chaque référentiel d'inertie $\rho$ donnons nous une application $(x,v) \longmapsto P_\rho^{(x,v)}$ de $R^4 \times \mathcal{U}$ dans l'ensemble des mesures de probabilité sur $\hat{\Omega}$. Cette application doit être mesurable. Nous posons si $f$ est une fonction borélienne positive sur $E = \mathbb{R}^4 \times \mathcal{U}$

$$V_\lambda^\rho((x,v);f) = E_\rho^{(x,v)} \left[\int_0^{\omega} e^{-\lambda t} f(t_0+t, X_t, \hat{X}_t)dt\right]$$

Nous exigeons que les noyaux forment une résolvante satisfaisant en outre à la condition de continuité faible :

$$(19) \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \text{vague } \lambda V_\lambda^\rho((x,v), .) = \epsilon_{x,v}$$

et que le processus $(T_0 + t, X_t, \dot{X}_t)$ soit, pour toute loi $P_\rho^{x,v}$, un processus presque markovien admettant cette résolvante $(V_\lambda^\rho)$ et la loi initiale $\epsilon_{x,v}$. Il est maintenant très facile de vérifier, compte tenu de ce que nous avons dit plus haut sur les processus presque markoviens et leurs changements de temps, que si l'on se place dans un repère $\bar{\rho} = L\rho$ et si l'on définit

$$(22) \qquad P_{\bar{\rho}}^{(x,v)} = L^{-1} \circ P_\rho^{L(x,v)}$$

Ces nouvelles mesures possèdent encore les mêmes propriétés (résolvante, caractère presque markovien...) Cessant de faire jouer un rôle privilégié à $\rho$ , on peut dire qu'un processus de Markov relativiste est une famille de mesures de probabilité $(P_\rho^{x,v})_{(x,v)\in E}$ sur $\hat{\Omega}$ satisafaisant pour chaque référentiel d'inertie $\rho$ aux conditions ci-dessus et à la condition de compatibilité (22) .

Processus homogènes relativistes.

Il faut remarquer qu'il n'y a pas d'homogénéité temporelle séparée dans le cas relativiste.

Nous allons maintenant borner notre étude (toujours en suivant Dudley) au processus relativistes qui possèdent une homogénéité complète par rapport au groupe de Lorentz : ceux qui correspondent aux processus à accroissements indépendants dans le cas classique.

Fixons un référentiel d'inertie $\rho$ et deux points $(x,v)$, $(x',v')$ de $R^4 \times \mathcal{U}$. Il existe un élément unique du groupe de Poincaré $\mathcal{L}$ , soit $L$ , tel que $L(x,v) = (x',v')$.

La condition d'homogénéité est alors la suivante

$$P_\rho^{(x',v')} = L \circ P_\rho^{(x,v)} \tag{23}$$

Si cette condition d'homogénéité a lieu dans le repère $\rho$ , elle a lieu dans tous les repères. Elle est donc intrinsèque.

Vérification.

Soit $\bar{\rho} = \rho M$. Nous avons d'une part

$$P_{\bar{\rho}}^{L(x,v)} \underset{(22)}{=} M^{-1} \circ P_\rho^{ML(x,v)} \underset{(23)}{=} M^{-1} ML\, P_\rho^{(x,v)}$$

D'autre part

$$L \circ P_{\bar{\rho}}^{(x,v)} \underset{(22)}{=} LM^{-1} \circ P_\rho^{M(x,v)} \underset{(23)}{=} LM^{-1}M \circ P_\rho^{(x,v)}$$

C'est bien la même chose !

Fixons alors $\rho$ , $(x,v)$ et utilisons le lemme 1 §1.
Si $f \in C_o(R^4 \times \mathcal{U})$ la fonction (14) est continue et tend vers 0 à l'infini sur le groupe de Poincaré pour tout $(t_o , \omega) \in \hat{\Omega}$ . Intégrant par rapport à $P_\rho^{(x,v)}$ nous obtenons par convergence dominée que

$$(x,u) \mapsto E_\rho^{L(x,v)}[u^\lambda(t_o, \omega ; t)] = E_\rho^{(x,v)}[u^\lambda(L(t_o,\omega); t)]$$

est continue et tend vers 0 à l'infini sur $R^4 \times \mathcal{U}$. Autrement dit, nous avons une résolvante fellérienne faiblement continue sur $R^4 \times \mathcal{U}$, dans tout repère $\rho$ . Il est bien connu qu'une telle résolvante est associée à un semi-groupe de Feller.

Il est bien connu aussi que pour toute loi initiale, un processus presque markovien admettant cette résolvante et cette mesure initiale admet une modification essentielle continue à droite et pouvue de limites à gauche (aussi borné sur tout intervalle compact)

$$(t_o + t , X_t(\omega), \dot{X}_t(\omega)) \text{ modifié en } (t_o + t, X_t^+(\omega), \dot{X}_t^+(\omega))$$

Or $X_t$ est continu donc $X_t = X_t^+$ et la propriété indiquée signifie tout simplement que la fonction $\dot{X}_t$ est égale presque partout à une fonction continue à droite et pourvue de limites à gauche. Revenant à la définition de $\dot{X}_t$ on voit que pour presque tout $\omega$ la dérivée à droite $\dot{X}_t(\omega)$ existe (pour <u>tout</u> $t$ ) et est une fonction de $t$ continue à droite et pourvue de limites à gauche.

Désormais nous restreindrons donc $\Omega$ à l'ensemble des applications de $R_+$ dans $\Omega$ lipschitziennes de rapport $<1$ sur tout intervalle compact, partout dérivables à droite, dont la dérivée à droite est continue à droite et pourvue de limites à gauche.

On va maintenant étudier les processus de manière plus approfondie.

## § 3 . Changement de temps associé au temps propre et caractérisation des processus markoviens relativistes homogènes.

Nous rencontrerons dans ce paragraphe la situation suivante :

Soient $M_1$ et $M_2$ deux espaces localement compacts à base dénombrable et $G$ un groupe localement compact à base dénombrable opérant continuement, transitivement et librement sur $M_1$. On définit alors l'action de $G$ sur l'espace topologique $E = M_1 \times M_2$ en posant

$$g(x_1,x_2) = (gx_1, x_2) \quad \text{pour tout couple} \quad (x_1,x_2) \in M_1 \times M_2 .$$

Il est clair que de cette manière l'opération de $G$ sur $E$ possède les mêmes propriétés que celles qui sont associées à l'opération de $G$ sur $M_1$.

De manière naturelle, $G$ opère sur $C_o(F)$ et si $f \in C_o(F)$ on appellera $f^g$ l'élément de $C_o(E)$ défini par

$$f^g(x) = f(g.x) \quad \text{ou encore on posera}$$

$$\tau_g f(x) = f(g^{-1}.x)$$

On dira qu'un opérateur linéaire continu $V$ de $C_o(E)$ est invariant par l'action de $G$ si pour tout $g \in G$ et tout $f \in C_o(E)$

$$\tau_g Vf = V\tau_g f \quad \text{ou de manière équivalente si}$$

$$(V(f^g))^{g-1} = Vf .$$

On a alors la proposition suivante (triviale pour l'essentiel mais destinée à éviter des circonlocutions dans la suite).

PROPOSITION 3.1. - <u>Soit</u> $(U^p)_{p>0}$ <u>une famille résolvante d'opérateurs bornés positifs sur</u> $C_o(E)$ <u>invariants par</u> $G$ .

<u>Alors</u>

1) Pour tout $p>0$ l'opérateur $U^p$ se prolonge de manière unique en un opérateur borné positif de $C_o(M_2)$ identifié à un sous-espace de $C_b(E))$ dans $C_o(E)$ et si $f \in C_o(M_2)$ l'application partielle

$$x_2 \longmapsto U^p f(x_1,x_2) \quad \text{est dans} \quad C_o(M_2) \quad \text{pour tout} \quad x_1 \in M .$$

2) Si $x_1$ est fixé dans $M_1$ et si on pose pour $p>0$ et $f \in C_o(M_2)$ $V^p_{x_1} f = U^p f(x_1,.)$ on définit une famille résolvante d'opérateurs bornés positifs sur $C_o(E)$ indépendante de $x_1 \in M_1$ et notée $(V^p)_{p>o}$ .

<u>Démonstration</u> :

1) Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $C^+_{\mathcal{K}}(E)$ telle que

$$\lim \varphi_n(x) = 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in E.$$

Soit $f \in C_{\mathcal{K}}(M_2)$. Alors $U^p(\varphi_n.f)$ appartient à $C_o(E)$ puur tout entier $n \in \mathbb{N}$ et de plus

$$(2') \qquad |U^p[(\varphi_n-\varphi_m)f]| \leq U^p[|\varphi_n-\varphi_m|.|f|] \leq U^p|\varphi_n-\varphi_m|.\|f\|_\infty \quad \text{si} \quad n \geq m .$$

La suite $(U^p\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et simplement bornée sur $E$ donc convergente mais comme d'après le théorème de Dini, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 1 sur tout compact de E, la suite $(U^p\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|U^p\|_{\mathcal{L}(C_o(E),C_o(E))}$ et donc encore par le théorème de Dini, uniformément sur tout compact de $E$ .

L'inégalité (24) montre que la suite $(U^p(\varphi_n.f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $E$ d'après ce qu'on vient de dire. Si on appelle $U^pf$ la limite de cette suite (ce qui a un sens car cette limite est indépendante de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie), on voit donc que $U^p f \in C_o(E)$ et de plus l'inégalité (24) montre que

$$\|U^p f\|_\infty \leq \|U^p\|_{\mathcal{L}(C_o(E),C_o(E))}\|f\|_\infty$$

Le prolongement $U^p$ ainsi défini est un opérateur borné de $C_{\mathcal{K}}(M_2)$ dans $C_o(E)$ et $\|U^p\|_{\mathcal{L}(C_{\mathcal{K}}(M_2),C_o(E))} = \|U^p\|_{\mathcal{L}(C_o(E),C_o(E))}$ . Il est alors clair que si $f \in C_{\mathcal{K}}(M_2)$, pour tout $x_1 \in M_1$ , l'application $x_2 \mapsto U^p f(x_1,x_2) \in C_o(M_2)$. La conclusion cherchée résulte alors de la densité de $C_{\mathcal{K}}(M_2)$ dans $C_o(M_2)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur $M_2$ .

2) Soient $x$ et $x'$ deux points de $M_1$ ; il existe un élément $g \in G$ tel que $g.x = x'$ et donc $g(x,y) = (x',y)$ pour tout $y \in M_2$ d'après la façon dont on a défini l'opération de $G$ sur $E$ . Alors si $f \in C_o(M_2)$
$V^p_{x'} f = U^p f(gx, .) = (U^p(f^{g^{-1}}))^g(x, .)$ .

Donc

$$V^p_{x'} f = U^p f(x, .) = V^p_x f \quad .$$

Le fait que la famille $(V^p)_{p>0}$ d'opérateurs bornés positifs sur $C_o(M_2)$ ainsi définie soit une famille résolvante est alors trivial.

Reprenons maintenant l'étude des processus de Markov relativistes homogènes définis antérieurement.

Un tel processus est la donnée de

$$(\hat{\Omega}, \mathcal{F}, M \times \mathcal{U}, P_\rho^{(x,v)}, (X_t, \hat{\dot{X}}_t), \text{ etc } \ldots)$$

où les $P_\rho^{(x,v)}$ sont des mesures de probabilités usur $\hat{\Omega}$ associées à un référentiel d'inertie $\rho$ et où $\hat{\dot{X}}_t$ est le 4-vecteur vitesse "à droite" associé à $X_t$.

Notons qu'en général on n'a pas $\hat{\dot{x}}_t = \dfrac{\widehat{dX_t}}{dt^+}$.

L'application $(t,\omega) \mapsto \tau_t(\omega) = \int_0^t (\hat{\dot{X}}^o_s(\omega))^{-1}\, ds$ de $R_+ \times \hat{\Omega}$ dans $R_+$ définit une fonctionnelle additive continue, parfaite, strictement croissante, adaptée du processus $(\hat{X}_t, \hat{\dot{X}}_t)$. On va étudier la résolvante du processus changé de temps par rapport à cette fonctionnelle additive c'est-à-dire étudier l'évolution du processus par rapport au temps propre de la particule.

Pour tout $\omega \in \hat{\Omega}$, posons

$$j(\sigma,\omega) = j_\sigma(\omega) = \tau_\omega^{-1}(\sigma) \text{ si } \sigma \in [0,\zeta(\omega)[$$

$$j(\zeta^-(\omega)) = +\infty = \lim_{\substack{\sigma \to \zeta(\omega) \\ \sigma < \zeta(\omega)}} j(\sigma,\omega) = j(\zeta^-(\omega)) = +\infty$$

On a alors la

PROPOSITION 3.2. - <u>La résolvante du processus change de temps</u> $(\hat{X}_{j_\sigma}, \hat{\dot{X}}_{j_\sigma})$ <u>est fellérienne</u>.

<u>Démonstration</u>.

Soit $f \in C_K(R^4 \times \mathcal{U})$. On a :

$$V_\lambda^P f(x,v) = E_\rho^{(x,v)}\left[\int_0^\zeta e^{-\lambda\sigma} f(\hat{X}_{j\sigma}, \hat{\dot{X}}_{j\sigma})\, d\sigma\right]$$

et ceci s'écrit encore $V_\lambda^P f(x,v) = E_\rho^{(x,v)}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda\tau_t} f(\hat{X}_t, \hat{\dot{X}}_t).h(\hat{\dot{X}}_t)dt\right]$ où on a posé $h(v) = (v^o)^{-1/2}$ pour $v \in \mathcal{U}$.

On a $0 < h(v) \leq 1$ pour $v \in \mathcal{U}$.

Donc, si $\pi_{\mathcal{U}}$ désigne la projection canonique de $R^4 \times \mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}$, le nombre $\alpha_f = \inf_{v \in \pi_{\mathcal{U}}(\text{supp } f)} h(v) > 0$.

Alors $\tau_t \geq \alpha_f t$ sur l'ensemble $(X_t, \hat{\dot{X}}_t) \in \text{supp } f$.

Par conséquent

$$|V_\lambda^P f(x,v)| \leq E_\rho^{(x,v)} [\int_0^\infty e^{-\lambda \alpha_f t} \; |f(X_t, \hat{\hat{X}}_t)| dt$$

et le terme de droite de cette inégalité n'est autre que

$$U^P_{\lambda\alpha_f}(|f|)(x,v) \text{ et on sait que la résolvante } (U^P_\lambda)_{\lambda>0}$$

est fellérienne. Par conséquent $\lim\limits_{\substack{(x,v) \to \infty \\ (x,v) \in \mathbb{R}^4 \times \mathcal{U}}} V^P_\lambda f(x,v) = 0$ .

Considérons pour $\lambda > 0$ et $f \in C_K(R^4 \times \mathcal{U})$ la fonction sur $\hat{\Omega}$ à valeurs réelles définie par

$$V^\lambda(\omega ; f) = \lambda \int_0^{\zeta(\omega)} e^{-\lambda\sigma} f(\hat{\omega}(j_\sigma), \hat{\hat{\omega}}(j_\sigma)) d\sigma$$

où on désigne par $\hat{\omega}(j_\sigma)$ le 4-vecteur "position" de la particule $\omega$ à l'instant $t_0 + j_\sigma(\omega)$ et par $\hat{\hat{\omega}}(j_\sigma)$ le 4-vecteur "vitesse à droite" de la particule $\omega$ au même instant.

Mais si on pose $W_\sigma(\omega) = \hat{\omega}(j_\sigma)$ alors $\hat{\hat{\omega}}(j_\sigma) = \dfrac{dW_\sigma}{d\sigma^+}(\omega)$ et par conséquent

$$V^\lambda(\omega ; f) = \int_0^{\zeta(\omega)} e^{-\lambda\sigma} f(W_\sigma(\omega), \dot{W}_\sigma + (\omega)) d\sigma .$$

Alors l'application du groupe de Poincaré $\mathcal{L}$ dans R définie par

$$L \longmapsto V^\lambda \; (L^{-1}\omega ; f) \text{ est continue.}$$

Il suffit comme dans la démonstration du lemme (1.1) de vérifier la continuité de cette application au point I de $\mathcal{L}$ .

En utilisant le temps propre du repère $\rho$ on peut écrire

$$V^\lambda(L^{-1}\omega ; f) = \int_0^{\zeta_L(\omega)} e^{-\lambda\varphi_L(\sigma)} f(L^{-1} W_\sigma(\omega), L_h^{-1} \dot{W}_\sigma + (\omega)) \, \varphi'_L(\sigma) d\sigma$$

Comme l'application $L \longmapsto L^{-1}(x,v)$ est continue de $\mathcal{L}$ dans

$R^4 \times \mathcal{U}$ et que $f$ est continue il suffit de voir que

$$\lim_{\substack{L \to I \\ \mathcal{L}}} \zeta_L(\omega) = \lim_{\substack{L \to I \\ \mathcal{L}}} \zeta(L^{-1}\omega) = \zeta(\omega)$$

car ce qui a été vu dans le lemme (1.1) permet de conclure.

Or, la définition du temps propre montre que c'est un invariant du groupe de Poincaré, c'est-à-dire que si $L \in \mathcal{L}$,

$$\tau(\varphi_L(t), \omega_L) = \tau(t, \omega) \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}_+$$

et par suite $\zeta$ est un invariant de ce groupe, c'est-à-dire que si $\zeta_L(\omega) = \zeta(\omega_L)$, on a $\zeta(\omega_L) = \zeta(\omega)$ pour tout $L \in \mathcal{L}$.

La démonstration de la proposition 3.2 est achevée.

Dans la suite on appellera $K$ le groupe $SO(3)$, qui est un sous groupe maximal compact de $SO_o(1,3) = \mathcal{L}_n$. On notera $\mathcal{M}_+^1(K\backslash\mathcal{L}_n|K)$ l'ensemble des mesures de Radon positives de masse totale inférieure à l'unité sur $\mathcal{L}$ qui sont biinvariantes par $K$.

DEFINITION 3.1.- <u>Un semi-groupe de convolution</u> $\{\mu_\sigma\}_{\sigma \in \mathbb{R}_+}$ <u>de mesures de</u> $\mathcal{M}_+^1(K|\mathcal{L}_n|K)$ <u>est de type</u> $(H)$ <u>si</u> $\lim_{\substack{\sigma \to 0 \\ \sigma > 0}} \mu_\sigma = m_K$ ( <u>au sens de la convergence vague des mesures sur</u> $\mathcal{L}_n$) <u>où</u> $m_K$ <u>est la mesure de Haar de</u> $K$.

THEOREME 3.1.- <u>Soit</u> $(\hat{\Omega}, \hat{\mathfrak{F}}, M \times \mathcal{U}, P_\rho^{(x,v)}; (\hat{X}_t, \hat{\dot{X}}_t)))$ <u>un processus de Markov relativiste homogène tel que</u> $\xi = +\infty$ p.s. (notations du § 1 (6)). <u>Il existe un unique semi-groupe de convolution</u> $\{\mu_\sigma\}_{\sigma \in \mathbb{R}_+}$ <u>de mesures de type</u> $(H)$ <u>tel que si</u> $f$ <u>appartient à</u> $C_o(\mathcal{U})$ <u>on ait pour tout point</u> $v$ <u>de</u> $\mathcal{U}$, $f * \mu_\sigma(v) = E_\rho^{(x,v)}[f \circ W_\sigma]$ <u>quel que soit le point</u> $x$ <u>de</u> $\mathbb{R}^4$, <u>où</u> $W_\sigma$ <u>représente la quadrivitesse du processus</u> $(\hat{X}_t, \hat{\dot{X}}_t)$ <u>paramétrée dans le temps propre.</u>

Réciproquement tout semi-groupe de convolution $\{\mu_\sigma\}_{\sigma\in\mathbb{R}_+}$ de mesures de type (H) définit un unique processus de Markov relativiste homogène dont le semi-groupe $P^\rho_\sigma$ de la quadrivitesse du processus paramétrée dans le temps propre est donné par $P^\rho_\sigma f = f * \mu_\sigma$ où $f$ appartient à $C_o(\mathcal{U})$ et tel que $\xi = +\infty$ p.s.

**Démonstration.**

Soit $(\hat{X}_t, \hat{\dot{X}}_t)$ un processus de Markov relativiste homogène sur $M\times\mathcal{U}$ issu de $(x,v)$. En utilisant la proposition (3.2) on voit que l'application $f \mapsto E_\rho^{(x,v)}[\int_o^\infty e^{-\lambda\sigma} f(W_\sigma)d\sigma]$ définit pour tout $\lambda>0$ un opérateur borné positif $\Gamma^\rho_{\lambda,x}$ sur $C_o(\mathcal{U})$. La famille $(\Gamma^\rho_{\lambda,x})_{\lambda>0}$ est d'ailleurs une famille résolvante d'opérateurs bornés positifs de $C_o(\mathcal{U})$. Comme le sous-groupe de $\mathcal{L}$ constitué par les translations de $R^4$ opère sur $R^4\times\mathcal{U}$ par $g(x,v) = (gx,v)$ la famille résolvante définie plus haut est indépendante de $x\in R^4$. Enfin elle est faiblement continue comme cela résulte aisément des définitions données au § 2.

Par suite, il existe un semi-groupe d'opérateurs sous markoviens $(P^\rho_\sigma)_{\sigma\in R_+}$ sur $C_o(\mathcal{U})$ faiblement continu qui possède en outre la propriété suivante :

$$(P^\rho_\sigma . \tau_g f)(v) = \tau_g . (P^\rho_\sigma f)(v) \quad \text{pour tout } \sigma\in R_+,\ \text{tout } f\in C_o(\mathcal{U})$$
$$\text{tout } g\in\mathcal{L}_h \text{ et tout } v\in\mathcal{U}$$

il existe un semi-groupe $(\mu_\sigma)_{\sigma\in R_+}$ de mesures de $\mathcal{M}^1_+(K \mid \mathcal{L}_h \mid K)$ tel que

$$\mu_\sigma * f = P^\rho_\sigma f \quad \text{pour } f\in C_o(\mathcal{U}) \text{ et } \sigma\in R_+.$$

De plus $\lim\limits_{\substack{\sigma\to 0\\ \sigma>0}} \mu_\sigma * f = f$ et comme $K$ laisse $\mathcal{U}$ invariant ceci montre que $\mu_\sigma$ converge faiblement lorsque $\sigma$ tend vers $0$ vers la mesure de Haar de $K$, soit $m_K$. ($K$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathcal{L}_n$).

La réciproque provient du fait que le processus $(\hat{X}_t, \hat{\dot{X}}_t)$ admettant $\epsilon_{x,v}$ comme loi initiale est déterminé trajectoire par trajectoire quand on connaît la trajectoire de la 4-vitesse à droite mesurée dans le temps propre. (Relation (9) § 1).

# II$^e$ PARTIE

## PRINCIPE COMPLET DU MAXIMUM ET LAPLACIENS GENERALISES SUR LES ESPACES RIEMANNIENS SYMETRIQUES DE TYPE NON COMPACT

Le but de ce travail est d'établir une bijection entre les distributions appelées "Laplaciens généralisés", sur un espace riemannien symétrique de type non compact et les noyaux de Hunt invariants sur cet espace. Nous donnons en outre une représentation intégrale des Laplaciens généralisés qui étend la formule de Lévy Khintchine et qui prend une forme particulièrement simple dans le cas d'un espace riemannien symétrique de type non compact <u>irréductible</u>.

### § 1 . FORMULE DE LEVY KHINTCHINE POUR LES LAPLACIENS GENERALISES.

a) <u>Définitions et Notations</u>.

Soit $X$ un espace riemannien symétrique de type non compact : il est bien connu (Helgason [1] p. 173-174) que $X$ est un espace homogène $G/K$ où $(G,K)$ est une paire riemannienne symétrique. Soit $(\mathcal{D}_A, A)$ un opérateur sur $X$ possédant les propriétés suivantes :

1) <u>Le domaine</u> $\mathcal{D}_A$ <u>de l'opérateur</u> $A$ <u>contient l'espace</u> $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$, <u>espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables sur</u> $X$ <u>à support compact</u>.

2) <u>L'opérateur</u> $(\mathcal{D}_A, A)$ <u>vérifie le principe du maximum positif : si</u> $f$ <u>est un élément de</u> $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ <u>et si la fonction</u> $f$ <u>atteint son maximum</u> (<u>nécessairement positif ou nul</u>) <u>au point</u> $x_o$ <u>de</u> $X$ <u>alors</u> $Af(x_o)$ <u>est négatif ou nul</u>.

3) <u>L'opérateur</u> $(\mathcal{D}_A, A)$ <u>est invariant par l'action de</u> $G$ : soit $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $X$ ; pour tout élément $g$ de $G$

on note $\tau_g$ l'endomorphisme de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X)$ définie par $\tau_g f(x) = f(g^{-1}x)$ pour tout $f$ élément de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X)$ et tout point $x$ de $X$. La condition d'invariance de l'opérateur $(\mathcal{D}_A, A)$ par l'action de $G$ se traduit de la façon suivante :

Pour tout $g \in G$, le domaine $\mathcal{D}_A$ de l'opérateur $A$ est stable par l'endomorphisme $\tau_g$ de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X)$ et pour tout élément $f$ de $\mathcal{D}_A$ on a : $A\tau_g f = \tau_g A f$.

Soit $(D_A, A)$ un opérateur sur $X$ vérifiant les propriétés précédentes ; dans ces conditions, il existe sur $X$ une distribution $T$ vérifiant les propriétés suivantes :

1) Pour toute fonction $\varphi$ élément de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ $A\varphi = \varphi * T$ (On considère ici la fonction $\varphi$ comme fonction sur $G$, invariante à droite par l'action de $K$, de même que la distribution $T$ est envisagée comme distribution sur $G$ biinvariante par l'action de $K$).

2) Soit $O$ l'image de l'élément neutre $e$ de $G$ par l'application canonique $\pi : G \mapsto G/K$.

Alors si $\varphi$ est une fonction de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ atteignant son maximum au point $O$, le nombre $< T, \varphi >$ est négatif ou nul.

Ceci nous conduit à poser les définitions suivantes :

DEFINITION 1.1. Soient $X$ une variété différentielle de dimension réelle $n$, non compacte et $\omega$ un point de $X$. On appellera $C_\omega$ le cône convexe saillant de sommet $O$ des fonctions de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ qui atteignent leur maximum au point $\omega$.

DEFINITION 2.2.- Soient $X$ une variété différentiable de dimension réelle $n$, non compacte, et $T$ une distribution réelle sur $X$. On dira que $T$ est un laplacien généralisé par rapport à un point $\omega$ de $X$ si le nombre $< T, \varphi >$ est négatif ou nul pour toute fonction $\varphi$ du cône $C_\omega$.

b) Représentation intégrale des Laplaciens généralisés.

Dans la suite, $X$ désigne jusqu'à nouvel ordre une variété différentiable de dimension réelle $n$, non compacte.

PROPOSITION 1.1.- Soit $T$ un Laplacien généralisé sur $X$ par rapport à un point $\omega$

de $X$ . Alor la restriction de $T$ au complémentaire de $\{\omega\}$ est une mesure de Radon positive bornée au voisinage de l'infini notée, $\mu$ .

Démonstration : Soit $\varphi$ une fonction de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$, positive et nulle sur un voisinage de $\omega$ . Alors $\varphi$ appartient à $(-C_{\omega})$ et par définition de $T$ , $< T,\varphi \geq 0$ ce qui montre que la restriction de $T$ au complémentaire de $\{\omega\}$ se prolonge en une mesure de Radon positive qu'on appellera $\mu$ . Pour voir que $\mu$ est bornée au voisinage de l'infini sur $X$ choisissons une fonction $g$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ telle que $g(\omega)=1, 0\leq g\leq 1$ et dont le support soit contenu dans $V_{\omega}$ où $V_{\omega}$ est un voisinage de $\omega$ relativement compact dans $X$ . Soit $f$ une fonction de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$, positive, dont le support soit disjoint de celui de $g$ . Posons $M = \sup_{\zeta\in X} f(\zeta)$ et appelons $h$ la fonction de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ définie par

$$h = Mg + f .$$

Alors on a :

$$h(\zeta)\leq M = h(\omega) \text{ pour tout } \zeta\in X$$

Par suite, la fonction $h$ appartient à $C_{\omega}$ et il en résulte :

$$< T,h > \leq 0 .$$

Comme on a

$$<T,h> = M<T,g> + <T,f>$$

on voit que

$$<T,f> \leq <T,-g>. \sup_{\zeta\in X} f(\zeta)$$

et ceci achève la proposition.

LEMME 1.1.- Soit $E_{\omega}$ l'espace vectoriel réel engendré par le cône $C_{\omega}$ . Alors

$$E_{\omega} = \{f\in\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X) \mid d_{\omega}f = 0\}$$

Démonstration : Appelons $F_{\omega}$ l'espace vectoriel réel $\{f\in\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X) \mid d_{\omega}f = 0\}$ . Il est clair que l'espace vectoriel $E_{\omega}$ est un sous-espace de $F_{\omega}$ .

Soit $f$ un élément de $F_{\omega}$ . Soit $(U,\theta)$ une carte locale autour de $\omega$ . Il existe un voisinage compact $V_{\omega}$ de $\omega$ une fonction $\beta$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ telle que $\beta(\zeta) = 1$ si $\zeta$ appartient à $V_{\omega}$ , dont le support soit contenu dans l'ouvert $U$ et une fonction $\gamma$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ strictement positive sur $\operatorname{supp} f\setminus\mathring{V}_{\omega}$ , telle que, de plus

$$\gamma(\theta^{-1}(x)) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \text{pour tout point } x \text{ de } \theta(V_\omega).$$

Alors la fonction $\frac{f - \beta f(\omega)}{\gamma}$ est bornée et à support compact.

En effet, cette fonction est continue dans le complémentaire de $\omega$ et et si $\zeta$ est un point de $V_\omega$ alors

$$|f(\zeta)-\beta(\zeta).f(\omega)| \leq \Gamma_{\omega,f} \cdot \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2(\zeta) \text{ où } \Gamma_{\omega,f}$$

est un nombre positif ou nul ne dépendant que de $\omega$ et de $f$ comme cela résulte de l'appartenance de la fonction $f$ à $F_\omega$ et de la formule de Taylor.

Le fait que le support de $\frac{f-\beta.f(\omega)}{\gamma}$ soit compact résulte de sa définition. En conséquence, il existe un nombre réel $M_{\omega,f}$ positif ou nul ne dépendant que de $\omega$ et de $f$ tel que :

$$f - \beta\, f(\omega) - M_{\omega,f} \cdot \gamma \leq 0 \, .$$

Posons $\varphi_1 = f - \beta f(\omega) - M_{\omega,f} \cdot \gamma$.

Il est clair que la fonction $\varphi_1$ appartient à $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ et comme $\varphi_1(\omega) = 0$, il en résulte que $\varphi_1$ appartient à $C_\omega$.

Si on pose $\varphi_2 = \beta.f(\omega) + M_{\omega,f} \cdot \gamma$, il résulte des définitions de $\beta$ et $\gamma$ que $\varphi_2$ appartient à $C_\omega - C_\omega$ et par suite, la fonction $f$ appartient à $E_\omega$ car $f = \varphi_1 + \varphi_2$. Le lemme est démontré.

Soit $\varphi$ une fonction de $C_\omega$. Définissons la distribution réelle $T_\varphi$ sur $X$ par la formule :

$$T_\varphi = (\varphi - \varphi(\omega)).T \, .$$

Alors, si $f$ est une fonction de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ et si $f$ est positive on a :

$$< T_\varphi, f > = < T, (\varphi - \varphi(\omega)).f > \leq 0$$

car la fonction $(\varphi-\varphi(\omega)).f$ appartient clairement à $C_\omega$.

Par conséquent la distribution $-T\varphi$ se prolonge à $C_{\mathcal{K}}(X)$ en une mesure de Radon positive appelée $\mu_\varphi$.

A la proposition 1.1, on a démontré que la restriction de $T$ au complémentaire de $\omega$ est une mesure positive $\mu$. Ce qui précède et la définition de $\mu_\varphi$ montrent que, pour toute fonction $\varphi$ appartenant à $C_\omega$, il existe un nombre réel négatif ou nul noté $G(\varphi)$ tel que l'on puisse écrire :

$$\mu_\varphi = -G(\varphi)\delta_{\{\omega\}} + (\varphi(\omega) - \varphi).\mu \ .$$

Propriétés élémentaires de l'application $G$ de $C_\omega$ dans $\mathbb{R}_-$ : $\varphi \mapsto G(\varphi)$ .

La définition de l'application $G$ de $C_\omega$ dans $\mathbb{R}_-$ montre aussitôt qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

1) Pour tout nombre réel positif $\lambda$ et pour toute fonction $\varphi$ de $C_\omega$ on a :

$$G(\lambda\varphi) = \lambda G(\varphi)$$

2) Pour tout couple $\varphi_1, \varphi_2$ de fonctions de $C_\omega$ on a

$$G(\varphi_1 + \varphi_2) = G(\varphi_1) + G(\varphi_2).$$

L'application $G$ se prolonge donc à $E_\omega$ en une forme linéaire notée encore $G$ .

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2.- La forme linéaire $G$ sur $E_\omega$ se prolonge à $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ en un Laplacien généralisé par rapport à $\omega$ .

Démonstration : Soient $(U,\theta)$ une carte locale au point $\omega$ et $(\varphi_j)_{1\leq j\leq n}$ une suite de $n$ fonctions de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ telles que si $x$ est un point de $\theta(U)$ on ait

$$\varphi_j(\theta^{-1}(x)) = x_j \quad \text{pour} \quad j = 1,\ldots,n \ .$$

Soit $f$ un élément de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ et définissons la fonction $g_f$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ par la formule

$$f = \sum_{j=1}^{n} X_j f(\omega).\varphi_j + g_f \ ,$$

dans laquelle les applications $f \mapsto X_j f(\omega)$ $(j = 1,\ldots,n)$ définissent une base de l'espace tangent à $X$ au point $\omega$ .

On voit aussitôt que $g_f$ appartient à l'espace vectoriel $E_\omega$ (Lemme 1.1)

Posons $\tilde{G}(f) = G(g_f)$ . La définition de $\tilde{G}$ entraîne aussitôt que cette application est une forme linéaire sur $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ qui coïncide avec $G$ sur $E_\omega$

D'autre part, la Proposition 1.1 permet d'affirmer que la mesure de Radon $\mu_\varphi$ est, pour toute fonction $\varphi$ élément de $C_\omega$ , une mesure bornée sur $X$ et par suite le nombre $< T,1 >$ est bien défini.

On peut écrire pour toute fonction $\varphi$ de $C_\omega$ :

$$<\mu_\varphi, 1> = <(\varphi(\omega)-\varphi).T, 1> = \varphi(\omega)<T,1> - <T,\varphi>.$$

Donc

$$<\mu_\varphi, 1> = -G(\varphi) + \int_{X\setminus\{\omega\}} [\varphi(\omega) - \varphi(\zeta)]d\mu(\zeta)$$

Donc

$$<T,\varphi> = \varphi(\omega)<T,1> + G(\varphi) + \int_{X\setminus\{\omega\}} [\varphi(\zeta) - \varphi(\omega)]d\mu(\zeta).$$

Par suite, si $f$ est une fonction de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$,

$$<T,g_f> = g_f(\omega)<T,1> + G(g_f) + \int_{X\setminus\{\omega\}} [g_f(\zeta) - g_f(\omega)]d\mu(\zeta).$$

D'après la définition du prolongement $\tilde{G}$ de $G$ à $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$, on peut écrire que si $f \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$,

$$<T,g_f> = f(\omega)<T,1> + \tilde{G}(f) + \int_{X\ \{\omega\}} [f(\zeta) - f(\omega) - \sum_{j=1}^{n} X_j f(\omega)\varphi_j(\zeta)]d\mu(\zeta)$$

Posons alors

$$<T,\varphi_j> = \mu_j \quad \text{pour} \quad j=1,\dots,n \; ; \; <T,1> = \mu_o .$$

Si on appelle $T^\mu$ l'application de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ dans $\mathbb{R}$ suivante :

$$f \mapsto \int_{X\setminus\{\omega\}} [f(\zeta) - f(\omega) - \sum_{j=1}^{n} X_j f(\omega)\varphi_j(\zeta)]d\mu(\zeta) ,$$

le fait que $\int_{X\setminus\{\omega\}} \gamma(\zeta)d\mu(\zeta) < +\infty$ (où $\gamma$ est l'application introduite dans la démonstration du Lemme 1.1) entraîne que $T^\mu$ est une distribution.

D'autre part, il est clair que

$$T = \mu_o\, \delta_{\{\omega\}} + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \frac{\partial \delta_{\{\omega\}}}{\partial x_j} + \tilde{G} + T^\mu$$ et par suite $\tilde{G}$ est une distribution sur $X$. Comme $\tilde{G}(\varphi) = G(\varphi) \leq 0$ pour toute fonction $\varphi$ appartenant à $C_\omega$, on voit que la distribution $\tilde{G}$ est un Laplacien généralisé sur $X$ par rapport à $\omega$ ce qui achève la démonstration .

On va étudier de façon plus précise la distribution $\tilde{G}$ . Notons d'abord que si $\varphi$ est une fonction de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ , $\tilde{G}(\varphi)$ ne dépend que du germe de $\varphi$ au point $\omega$ .

En effet, si $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont deux éléments de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ qui coïncident sur un voisinage de $\omega$ et si $f$ est un élément de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ à support contenu dans ce voisinage il est clair que $\langle T,(\varphi_1-\varphi_2).f\rangle = \langle \mu,(\varphi_1-\varphi_2)f\rangle = 0$ d'après la Proposition 1.1.

Comme $(\varphi_1-\varphi_2)$ est une fonction de $E_\omega$ on peut écrire

$\langle (\varphi_1-\varphi_2)T,f\rangle = f(\omega)G(\varphi_2-\varphi_1)+\langle (\varphi_1-\varphi_2)\mu,f\rangle$ en utilisant la définition de $G$ sur $E_\omega$ et il en résulte que $\widetilde{G}(\varphi_1) = \widetilde{G}(\varphi_2)$.

Par conséquent le support de la distribution $\widetilde{G}$ est réduit au point $\{\omega\}$. On va montrer maintenant que la distribution $\widetilde{G}$ est une distribution d'ordre deux sur $X$.

Appelons $H(X)$ l'espace de Banach des fonctions $f$ deux fois continûment différentiables sur $X$ telles que

$$f\in C_o(X),\ X_jf\in C_o(X)\ (j=1,\dots,n),\ X_iX_jf\in C_o(X)\ (i,j=1,\dots,n),$$

muni de la norme :

$$\|f\| = \sup_X |f| + \sum_{j=1}^{n} \sup|X_jf| + \sum_{i,j=1}^{n} \sup|X_iX_jf|.$$

On a alors la

PROPOSITION 1.3.- <u>Soit</u> $T$ <u>un Laplacien généralisé sur</u> $X$ <u>par rapport à</u> $\omega$. <u>Alors</u> $T$ <u>se prolonge en une forme linéaire continue sur</u> $H(X)$.

<u>Démonstration</u> : Soient $(U,\theta)$ une carte locale au point $\omega$ et $u$ une fonction de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ telle que $u(\zeta) = \dfrac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\theta_i^2(\zeta)}$ pour tout point $\zeta$ appartenant à un voisinage compact $V_\omega$ de $\omega$ contenu dans l'ouvert $U$, telle que de plus on ait : $0\leq u(\zeta)<1$ pour tout point $\zeta$ appartenant au complémentaire de $\{\omega\}$ dans $X$.

Soit $f$ un élément de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ ; alors, avec les notations de la proposition 1.-2, définissons la fonction $k_f$ appartenant à $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ par la formule :

$$f = f(\omega).u+\sum_{j=1}^{n} X_jf(\omega)\varphi_ju + k_f.$$

Alors on voit que

$$k_f(\omega) = 0 \text{ et } X_jk_f(\omega) = 0 \quad\text{pour}\quad j=1,\dots,n.$$

Posons
$$\lambda(f) = \sup_X \frac{|k_f|}{1-u}$$

A l'aide d'un développement de Taylor au voisinage de $\omega$ de $k_f$ on voit que l'application $\lambda$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ dans $\mathbb{R}_+$ est une semi-norme continue sur $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ pour la topologie induite par la norme de $H(X)$.

Pour toute fonction $f$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$, définissons la fonction $h_f$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ par la formule $h_f = \lambda(f).u + \epsilon.k_f$ où $\epsilon = \operatorname{sgn} < T,k_f >$.

Alors

$$|h_f(\zeta)| \leq \lambda(f)u(\zeta)+\lambda(f)(1-u(\zeta))=\lambda(f)=h_f(\omega) .$$

Par conséquent $h_f$ appartient à $C_\omega$ et par conséquent on peut écrire

$$< T,h_f > \leq 0$$

Ceci implique, compte tenu de la définition de la fonction $h_f$, l'inégalité suivante :

$$\lambda(f) < T,u > + \ | < T,k_f > | \leq 0$$

Par suite, dans les mêmes conditions :

$$| < T,k_f > | \leq \lambda(f) < T,-u > .$$

Mais de la définition de la fonction $k_f$ et de la continuité de la semi-norme $\lambda$ sur $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ muni de la topologie induite par la norme de $H(X)$, on déduit qu'il existe un nombre réel positif ou nul, $\sigma$, tel que :

$$| < T,f > | \leq \sigma.\|f\| \text{ pour toute fonction } f \text{ de } \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X) .$$

Ceci achève notre démonstration.

Il résulte de tout ceci que la distribution $\tilde{G}$ étant un Laplacien généralisé sur $X$ par rapport à $\omega$, c'est en fait une distribution d'ordre $2$ sur $X$ dont le support est réduit au point $\{\omega\}$ comme on l'a vu plus haut.

Par suite on peut écrire l'expression suivante du Laplacien généralisé $\tilde{G}$ :

$$\tilde{G} = c\ \delta_{\{\omega\}} + \sum_{j=1}^{n} b_j\ \tilde{X}_j\ \delta_{\{\omega\}} + \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\ \tilde{X}_i\tilde{X}_j\ \delta_{\{\omega\}}$$

où les coefficients $c$, $(b_j)_{1\leq j\leq n}$, $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ sont réels, où les applications $f \mapsto X_j f(\omega)$ définies sur $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ à valeurs réelles, $(j = 1,\ldots,n)$, constituent une base de l'espace tangent à $X$ au point $\omega$ et enfin, où on a posé

$<\tilde{X}_j\, \delta_{\{\omega\}}, f> = X_j f(\omega)$ pour tout $f$ élément de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ et tout $j = 1,\dots,n$.

Remarquons d'ailleurs que dans l'expression précédente, la matrice $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ peut être prise symétrique car les crochets $[X_i, X_j] = X_iX_j - X_jX_i$ sont des combinaisons linéaires des $(X_i)_{1\le i\le n}$ et peuvent être intégrés dans le terme linéaire du développement du Laplacien généralisé $\tilde{G}$ que l'on vient d'écrire. Voici alors le principal résultat de ce paragraphe :

THEOREME 1.1.- Soit $T$ un Laplacien généralisé sur $X$ par rapport au point $\omega$ de $X$. Soient $(U,\theta)$ une carte locale au point $\omega$ et $\gamma$ une fonction de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ telle que $\gamma(\theta^{-1}(x)) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ si $x \in \theta(V_\omega)$ où $V_\omega$ est un voisinage relativement compact de $\omega$ contenu dans $U$.

Alors il existe :

a) Une mesure de Radon positive sur $X\setminus\{\omega\}$ soit $\mu$ telle que $\int_{X\setminus\{\omega\}} \gamma(\zeta)d\mu(\zeta) < \infty$ et qui est bornée au voisinage de l'infini sur $X$.

b) Un nombre réel négatif ou nul $\alpha$, et une suite $(\gamma_j)_{1\le j\le n}$ de $n$ nombres réels

c) Une matrice réelle d'ordre $n$ symétrique semi définie positive notée $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, tels que pour toute fonction $\varphi$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ on puisse écrire :

$$<T,\varphi> = \alpha\, \varphi(\omega) + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_j}(0) + \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x_i \partial x_j}(0)$$

$$+ \int_{X\setminus\{\omega\}} \{\varphi(\zeta) - [\varphi(\omega) + \sum_{j=1}^{n} X_j\varphi(\omega)\varphi_j(\zeta)]\} d\mu(\zeta),$$

pour tout système $\theta = (x_j)_{1\le j\le n}$ de coordonnées locales au point $\omega$. On a posé $\varphi^* = \varphi \circ \theta^{-1}$. Les fonctions $\varphi_j$ $(1\le j\le n)$ ont été définies au cours du § 1.

Démonstration : Il s'agit essentiellement de prouver, compte tenu de l'étude menée antérieurement, que le nombre $\alpha$ est négatif ou nul et que la matrice $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ est semi définie positive. Nous savons que le nombre $<T,1> = \alpha$ ; mais par ailleurs il existe une suite croissante de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ telle que

1) la fonction $\varphi_n$ appartienne à $C_\omega$ pour tout entier $n$.

2) pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un voisinage $V_n(\omega)$ de $\omega$ tel que pour

tout point $\zeta$ appartenant à $V_n(\omega)$ on ait $\varphi_n(\zeta) = 1$ .

3) pour tout entier n, $0\leq\varphi_n\leq 1$ sur X et $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\zeta)= 1$ pour tout point $\zeta$ de X . Alors $< T,1> = < T,\varphi_n> + < T,1-\varphi_n> + \int_{X\setminus\{\omega\}} (1-\varphi_n(\zeta))d\mu(\zeta)$.

Mais le nombre $< T,\varphi_n>$ est négatif ou nul pour tout entier n et par application du Théorème de Lebesgue : on peut écrire $\lim_{n\to\infty} < T,1-\varphi_n> = 0$.

Donc $\alpha = \lim_{n\to\infty} < T,\varphi_n>$ et par conséquent le nombre réel $\alpha$ est négatif ou nul. D'autre part, soit $\Psi$ une fonction de classe $C^2$ sur X , contenu dans $H(X)$, telle que de plus on ait

$$\Psi(\omega) = X_i\Psi(\omega) = 0 \quad (i = 1,\dots,n)$$
$$X_iX_i\Psi(\omega) = 2 \quad (i = 1,\dots,n) \text{ et } X_iX_j\Psi(\omega)= 0$$

si $i\neq j$ $1\leq i,j\leq n$ et que $\Psi$ soit strictement positive sur X $\{\omega\}$ .

Donnons une suite $(\lambda_j)_{1\leq j\leq n}$ de nombres réels et soit $f$ une fonction de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ valant $\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i)^2$ sur une carte locale $(U,\theta)$ au point $\omega$ et qui de plus est positive sur X . Alors la fonction $(-f)$ appartient à $C_\omega$ et il en est de même des fonctions $f_n$ définies par :

$$f_n= (-f) \exp(-n\,\Psi) \text{ pour tout entier } n\in\mathbb{N}$$

Alors, comme $\widetilde{G}$ est un Laplacien généralisé, on a

$$< \widetilde{G},f_n > \leq 0 \text{ pour tout entier } n .$$

Mais $\lim_{p\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \frac{\partial f_p^*}{\partial x_j}(0) = 0$ et $\lim_{p\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_p^*}{\partial x_i\partial x_j}(0) = - \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j$

Comme $\lim_{p\to\infty} f_p(\omega) = 0$ il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} < \widetilde{G},f_n > = - \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j \leq 0 \quad \text{et}$$

Ceci achève de démontrer le théorème.

COROLLAIRE 1.1. <u>Soit</u> X <u>un espace riemannien symétrique de dimension réelle</u> n <u>(strictement supérieur à</u> 1) <u>irréductible de type non compact et soit</u> T <u>un Laplacien généralisé sur</u> X <u>par rapport à</u> $0=\pi(e)$, <u>invariant par rapport à l'action à gauche de</u> $\mathfrak{X}$ <u>sur</u> X .

<u>Alors si</u> $f$ <u>est une fonction de</u> $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ <u>on peut écrire</u> :

$$< T,f > = \alpha \, \Delta \, f(0) - \beta f(0) + \int_{A\setminus\{0\}} [f^{\natural}(a) - f(0)] d\mu(a)$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux nombres réels positifs ou nuls, $\Delta$ est le Laplacien de $X$ et où $\mu$ est une mesure de Radon positive sur $A\{0\}$ invariante par $W$ (groupe de Weyl de $G$) et telle que

$$\int_{A\setminus\{0\}} \frac{|a|^2}{1+|a|^2} d\mu(a) < +\infty$$

expression dans laquelle on a noté $|.|$ la métrique sur $G$ associée à la forme de Killing $B$ de $\mathfrak{G}$ (algèbre de Lie de $G$).

Si $KAN$ désigne la décomposition d'Iwasawa de $b$, on a noté $f$ la fonction définie sur $A$ par l'expression

$f^{\natural}(a) = \int_{K \times K} f(kak')dk\,dk'$ où $dk$ désigne la mesure de Haar normalisée du sous-groupe compact $K$ de $G$) .

Démonstration : Montrons d'abord que, dans le cas où $X$ est un espace riemannien symétrique de type non compact irréductible la matrice $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est définie positive si elle n'est pas nulle. Soit $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie de $G$ sur $\mathbb{R}$. Soit $(\mathfrak{k}_0,\mathfrak{p}_0)$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{G}$ (Helgason [1]) et soit $F$ la forme quadratique définie sur $\mathfrak{p}_0 \times \mathfrak{p}_0$.

$F(X,X) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j$ où les $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ désignent une base de $\mathfrak{p}_0$ (qu'on peut identifier en tant qu'espace vectoriel à l'espace tangent à $X$ au point $0 = \pi(e)$).

Le noyau de la forme quadratique $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{p}_0$ invariant par l'action de $Ad_G(K)$ et comme l'espace $X$ est irréductible deux cas seulement sont possibles : $F$ est identiquement nulle où $Ker\, F = \{0\}$ . Le seul cas qui nous intéresse est celui où $Ker\, F = \{0\}$. La matrice $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est alors définie positive et définit un opérateur elliptique d'ordre $2$ sur $X$ . Cet opérateur est de la forme $D_Q$ avec les notations de Helgason ([1], p. 395) où $Q$ est une forme quadratique sur $\mathfrak{m}$ invariante par l'action de $Ad_G(K)$ (p. 307), et comme l'espace $X$ est irréductible, $Q$ est proportionnelle à la restriction de la forme de Killing de $\mathfrak{G}$ à $\mathfrak{m}$ . L'opérateur $D_Q$ est donc proportionnel au Laplacien - Beltrami de l'espace $X$ .

D'autre part on va montrer que si la fonction $f^{\natural}$ appartient à $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ alors $d_o(f^{\natural}) = 0$ .

Sinon il existerait un opérateur différentiel linéaire du premier ordre non nul sur $X$ invariant par l'action de $K$ et toujours d'après Helgason ([1] p. 395) il serait de la forme $D_L$ où $L$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{m}$ invariante par $Ad_G(K)$ . Comme $X$ est irréductible il en résulte que $L$ est identiquement nulle (si dim $\mathfrak{m} > 1$ ce qu'on a supposé).

Donc, pour toute fonction $f$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ on a $d_o(f^{\natural}) = 0$ . Alors, d'après le théorème 1.1 et ce qu'on vient de voir il existe deux nombres réels positifs $\alpha$ et $\beta$ et il existe une mesure de Radon positive $\mu_1$ sur $X\{0\}$ tels que

$$< T,f >= \alpha \Delta f\ (0) - \beta\ f\ (0) + \int_{X\setminus\{0\}} [f\ (x) - f\ (0)] d\mu_1(x)$$

pour toute fonction $f$ appartenant à $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ car si le Laplacien généralisé $T$ est invariant à gauche par l'action de $K$, il est clair que $< T,f > = < T,f^{\natural} >$ pour toute fonction $f$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$. De plus, la mesure $\mu$ vérifie les propriétés énoncées au théorème 1.1. Comme il y a un isomorphisme entre l'espace des fonctions continues à support compact sur $X$ invariantes par l'action à gauche de $K$ sur $G$ et l'espace des fonctions continues et à support compact sur $G$ invariantes par $W$, il existe une unique mesure positive $\mu$ sur $A\setminus\{0\}$ invariante par $W$ telle que pour toute fonction $f$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ on ait :

$$< T,f > = \alpha \Delta f(0) - \beta f(0) + \int_{A\setminus\{0\}} [f^{\natural}\ (a) - f\ (0)] d\mu(a).$$

La mesure $\mu$ possède en outre les propriétés héritées de $\mu_1$ . Si $|.|$ désigne la distance sur $G$ associée à la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ alors

$$\int_{A\setminus\{0\}} \frac{|a|^2}{1+|a|^2} d\mu(a) < +\infty$$

## § 2 . Intégrabilité du semi-groupe de Feller invariant associé à un Laplacien généralisé sur un espace riemannien symétrique de type non compact.

Soit $X$ un espace riemannien symétrique de type non compact. D'après un Théorème de Hunt ([1] Th. 5.1.), on sait que, étant donné un opérateur $(\mathcal{D}_A, A)$ commutant à l'action de G sur X, associé à un Laplacien généralisé par rapport à 0 sur X dans les conditions définies au § 1 a) de la II$^e$ Partie, il existe un semi groupe de Feller $\{P_\sigma\}_{\sigma\geq 0}$ sur $X$ admettant $(\mathcal{D}_A, A)$ comme générateur infinitésimal. De plus, chaque opérateur $P_\sigma$ du semi groupe commute à l'action de $G$ sur $X$ et par conséquent il existe une mesure de Radon positive $\mu_\sigma$ sur $G$, de masse totale au plus égale à 1, invariante à gauche par l'action de $K$ telle que pour tout point $x$ de $X$, et toute fonction $f$ de $C_0(X)$, $P_\sigma f(x) = f * \mu_\sigma(x)$ pour toute fonction $f$ de $C_0(X)$. Par ailleurs, il est clair que la famille $\{\mu_\sigma\}_{\sigma\geq 0}$ de mesures sur $G$, biinvariantes par l'action de $K$, ainsi définie est un semi-groupe de convolution.

On a alors le

THEOREME 2.1.- Soit $X = G/K$ un espace riemannien symétrique de type non compact Soit $\{\mu_\sigma\}_{\sigma\geq 0}$ un semi groupe de convolution de mesures de Radon positives sur $G$ et de masse total au plus égale à 1, biinvariantes par l'action de $K$ sur $G$. Alors si $\{\mu_\sigma\}_{\sigma\geq 0}$ n'est pas le semi groupe trivial, le semi groupe $\{P_\sigma\}_{\sigma\geq 0}$ d'opérateurs sur $C_0(X)$ défini par $P_\sigma f = f * \mu_\sigma$ est intégrable. (C'est-à-dire que la fonction $Vf$ définie par $Vf = \int_0^\infty P_\sigma f \, d\sigma$ appartient à $C_0(X)$ pour toute fonction $f$ de $C_K(X)$). En outre le noyau $V$ ainsi défini satisfait au principe complet du maximum.

Démonstration : On dégage d'abord le lemme suivant :

LEMME 2.1.- Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $G$ biinvariante par $K$ telle que $\mu \neq m_K$ (mesure de Haar normalisée de $K$). Si $Pf = f * \mu$ pour toute fonction $f$ de $L^2(X)$, l'opérateur $P$ est un opérateur borné de $L^2(X)$ tel que $\|P\| < 1$.

Démonstration : Rappelons que, d'après Helgason ([2], p. 15, on peut définir la transformée de Fourier $\tilde{f}$ d'une fonction $f$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(X)$ par la formule

$$\tilde{f}(\lambda, b) = \int_X f(x) \exp(-i\lambda + \rho)(A(x,b))dx .$$

D'autre part, si $\mu$ est une mesure de Radon bornée, sur $G$, biinvariante par l'action de $K$, la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ de la mesure $\mu$ est la fonction continue bornée sur $\Lambda_0$ définie par $\hat{\mu}(\lambda) = \int_X \varphi_\lambda(x) d\mu(x)$.

De plus, l'application $f \mapsto \tilde{f}$ se prolonge en une isométrie de $L^2(X)$

sur $L^2(\mathfrak{a}_+^* \times B, |W|^{-\frac{1}{2}}|c(\lambda)|^2 d\lambda\, db)$. Dans ces conditions, considérons une fonction $f$ de $L^2(X)$. On peut écrire les inégalités suivantes :

$$\|Pf\|_2^2 = \|f * \mu\|_2^2 = \|\tilde{f}.\hat{\mu}\|_2^2 \le \|\tilde{f}\|_2^2 \cdot \|\hat{\mu}\|_\infty^2 = \|f\|_2^2 \|\hat{\mu}\|_\infty^2$$

Donc $\|P\|_{(L^2(X),L^2(X))} \le \|\hat{\mu}\|_\infty$. D'autre part, d'après le résultat d'Harish-Chandra sur les fonctions sphériques cité dans Helgason ([1], p. 428) on peut écrire pour tout point $\lambda$ de $\Lambda_0$ $\varphi_\lambda(x) = \int_K \exp(i\lambda - \rho)(H(xh))dk$. Pour tout point $\lambda$ de $\Lambda_0$, on a donc, dans les conditions du Lemme

$$|\hat{\mu}(\lambda) \le \int_X \int_K \exp(-\rho)(H(xk))dk\, d\mu(x) = \int_X \varphi_0(x)d\mu(x) = \hat{\mu}(0)$$

Par suite

$$\|\hat{\mu}\|_\infty = \hat{\mu}(0)\ .$$

Mais l'ensemble $H = \{x \in X | \varphi_0(X) = 1\}$ est un sous-groupe d'après l'équation fonctionnelle des fonctions sphériques sur $X$ et un sous-groupe est compact car les fonctions sphériques tendent vers $0$ à l'infini d'après un résultat d'Harish Chandra ([1] ; Théorème 2, p. 585). Par conséquent, comme $\varphi_0(0) = 1$ et comme $K$ est un sous-groupe compact maximal de $G$, $H = \{0\}$ et $\hat{\mu}(0) < 1$. Le lemme est démontré.

Si $\{\mu_\sigma\}_{\sigma \ge 0}$ est un semi-groupe de convolution de mesures de Radon positives, de masse totale au plus égale à $1$, biinvariantes par $K$ et si on pose $P_\sigma f = f * \mu_\sigma$ pour toute fonction $f$ de $L^2(X)$ et si la famille $\{P_\sigma\}_{\sigma \ge 0}$ n'est pas le semi-groupe trivial il existe un nombre réel strictement positif $\sigma_0$ tel que $P_{\sigma_0} \ne I$ $(\mu_{\sigma_0} \ne m_K)$ ; alors d'après le Lemme 2.1 on a $\|P_{\sigma_0}\| < 1$ et il existe un nombre strictement positif $\alpha$ tel que $\hat{\mu}_{\sigma_0}(0) = e^{-\alpha\sigma_0}$ avec $\|P_{\sigma_0}\| \le e^{-\alpha\sigma_0}$.

Alors

$$\|P_\sigma\| \le \hat{\mu}_\sigma(0) = (\hat{\mu}_{\sigma_0}(0))^{\sigma/\sigma_0} = e^{-\alpha\sigma}$$

et par suite $\int_0^\infty |(P_\sigma f,f)|d\sigma \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_2^2$ pour toute fonction de $L^2(X)$.

Mais $(P_\sigma f,f) = \mu_\sigma((f*\tilde{f}))$. Donc

$$\int_0^\infty |\mu_\sigma(f*\tilde{f})| \, d\sigma < \infty \quad \text{pour} \quad f \in L^2(X)$$

Mais si $f$ est une fonction de $C(X)$, $f$ est majorée en module par une fonction de la forme $g*\tilde{g}$ où $g$ appartient à $L^2(X)$ et il en résulte que

$$\int_0^\infty |\mu_\sigma(f)|d\sigma \leq \int_0^\infty |\mu_\sigma(g*\tilde{g})|d\sigma < \infty .$$

Par conséquent, il existe une mesure de Radon positive $\varkappa$ sur $G$ biinvariante par $K$, intégrale vague de la famille $\{\mu_\sigma\}_{\sigma \geq 0}$.

Donc $\varkappa = \int_0^\infty \mu_\sigma \, d\sigma$.

Or si $f$ est une fonction de $C_K(X)$, la fonction $f*\varkappa$ est continue sur $X$ et comme la fonction $f$ est majorée en module par une fonction de la forme $f_1*f_2$ où $f_1$ et $f_2$ sont des éléments de $L^2(X)$, la fonction $f*\varkappa$ est majorée en module par la fonction $f_1*f_2*\varkappa$ qui appartient à $C_o(X)$ comme produit de convolution de deux éléments ($f_1$ et $f_2*\varkappa$) de $L^2(X)$.

Par suite la fonction $f*\varkappa$ est dans $C_o(X)$ et la fonction $Vf$ qui n'est autre que $f*\varkappa$ appartient à $C_o(X)$ pour toute fonction $f$ de $C_K(X)$.

Le noyau $V$ vérifie le principe complet du maximum car il achève une résolvante sous markovienne d'opérateurs de $C_o(X)$. (Meyer [1] p.235, chap. 9).

COROLLAIRE 2.1.- <u>Soit</u> $X$ <u>un espace riemannien symétrique de type non compact</u>.

<u>Soit</u> $(\mathcal{D}_A, A)$ <u>un opérateur non nul sur</u> $X$ <u>satisfaisant aux conditions du</u> § 1.a).

<u>Alors il existe un unique semi-groupe de Feller non trivial</u> $\{P_\sigma\}_{\sigma \geq 0}$ <u>sur</u> $C_o(X)$ <u>invariant par l'action de</u> $G$ <u>et intégrable, admettant</u> $(\mathcal{D}_A, A)$ <u>comme générateur infinitésimal</u>.

<u>Démonstration</u> : L'existence et l'unicité d'un semi-groupe de Feller non trivial invariant par l'action de $G$, $\{P_\sigma\}_{\sigma \geq 0}$, sur $C_o(X)$ admettant $(\mathcal{D}_A, A)$ pour générateur infinitésimal sont assurées par les résultats de Hunt [1] et le fait que, $\mathcal{D}_A, A)$

est supposé non nul. Le Corollaire résulte alors de l'application du Théorème 2.1.

## § 3 . Noyaux de Hunt invariants et Laplaciens généralisés sur un espace riemannien symétrique de type non compact.

Soit $X$ un espace riemannien symétrique de type non compact.

Soit $V$ un noyau invariant par l'action de $G$ tel que de plus l'image par $V$ de $C_{\mathcal{K}}(X)$ soit contenue dans $C_o(X)$ et que $V$ satisfasse au principe complet du maximum (Voir Meyer [1] p. 250).

Supposons que $V$ soit distinct de $0$ . Existe-t-il un opérateur $(\mathcal{D}_A, A)$ sur $X$ vérifiant les hypothèses du § 1 a) qui soit générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller $\{P_\sigma\}_{\sigma\geq 0}$ tel que $V = \int_0^\infty P_\sigma d\sigma$ ?

La réponse à cette question fait l'objet du

THEOREME 3.1.- <u>Soit</u> $X$ <u>un espace riemannien symétrique de type non compact. Soit</u> $V$ <u>un noyau non nul invariant par l'action de</u> $G$ <u>possédant les propriétés suivantes</u> :

a) <u>Pour toute fonction</u> $f$ <u>de</u> $C_{\mathcal{K}}(X)$ , <u>la fonction</u> $Vf$ <u>appartient</u> <u>à</u> $C_o(X)$.

b) <u>Le noyau</u> $V$ <u>satisfait au principe complet du maximum. Alors il existe un unique semi-groupe de Feller</u> $\{P_\sigma\}$ <u>non trivial, invariant par l'action de</u> $G$ <u>et intégrable sur</u> $X$ <u>tel que</u> $V = \int_0^\infty P_\sigma \, d\sigma$ .

<u>Démonstration</u> : Soit $V$ un noyau non nul sur $X$ satisfaisant aux conditions du Théorème 3.1.

D'après le Théorème 11 p. 257 [Meyer [1]], il existe une unique résolvante sous markovienne $(V^\lambda)_{\lambda>0}$ sur $X$ telle que $\lim_{\lambda\to 0} V^\lambda f = Vf$ pour toute fonction $f$ de $C_{\mathcal{K}}(X)$ et constituée par des noyaux continus tendant vers $0$ à l'infini. Les opérateurs $V^\lambda$ sont invariants par l'action de $G$ par construction et par conséquent il existe une mesure de Radon positive $\mu$ sur $X$ et une famille résolvante $\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ de mesures de Radon positives sur $X$ telles que l'on ait :

Pour toute fonction $f$ de $C_{\mathcal{K}}(X)$ ,

$$Vf = f*\mu \quad \text{et} \quad V^\lambda f = f*\mu_\lambda$$

$$\left\lfloor \; \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \mu_\lambda = \mu \quad \text{(au sens de la topologie } \sigma \;(\mathcal{M}_+^b(X), C_{\mathcal{K}}(X))\right.$$

et

$$\int_X \lambda d\mu_\lambda(x) \le 1 \quad \text{pour tout nombre } \lambda \text{ de } \mathbb{R}_+^* .$$

La dernière condition montre que l'ensemble $\{\lambda\, \mu_\lambda\}_{\lambda > 0}$ est borné dans $\mathcal{M}_+^b(X)$ pour la topologie $\sigma(\mathcal{M}_+^b(X), C_o(X))$ et il existe donc une suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs, telle que $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_k = +\infty$ et une mesure de Radon positive bornée $\theta$ sur $X$ telles que $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_k\, \mu_{\lambda_k} = \theta$ (au sens de la topologie $\sigma(\mathcal{M}_+^b(X), C_{\mathcal{K}}(X))$ et que $\int_X d\theta(x) \le 1$ .

Soit $\lambda$ un réel strictement positif.

L'équation résolvante permet d'écrire :

$$\mu_{\lambda_k + \lambda} - \mu_{\lambda_k} = -\lambda\, \mu_{\lambda_k + \lambda} * \mu_{\lambda_k}$$

pour tout entier $k$ . Donc

$$\lambda_k(\mu_{\lambda_k} - \mu_{(\lambda_k + \lambda)}) = \lambda\lambda_k\, \mu_{\lambda_k} * \mu_{\lambda_k + \lambda} \quad .$$

Soit $f$ une fonction de $C_{\mathcal{K}}(X)$

Alors $\lambda_k(f * \mu_{\lambda_k} - f * \mu_{(\lambda_k + \lambda)}) = \lambda_k \lambda\, f * \mu_{\lambda_k} * \mu_{(\lambda_k + \lambda)}$

Mais la fonction $f * \mu_{\lambda_k}$ est dans $C_o(X)$ pour tout entier $k$ et comme $\int_X (\lambda_k + \lambda) d\mu_{(\lambda_k + \lambda)}(x) \le 1$ , il en résulte que

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k(f * \mu_{\lambda_k}) = \lim_{k \to \infty} \lambda_k\, f * \mu_{(\lambda_k + \lambda)}$$

Donc

$$f * \theta = \lim_{k \to \infty} f * \lambda_k \mu_{(\lambda_k + \lambda)} = \lim_{k \to \infty} f * (\lambda_k + \lambda)\, \mu_{\lambda_k + \lambda} \quad .$$

Car

$$\lim_{k \to \infty} f * \lambda\, \mu_{(\lambda_k + \lambda)} = 0 \; .$$

Par conséquent $\theta(f) = \lim\limits_{k \to \infty} (\lambda_k + \lambda) \mu_{\lambda_k + \lambda}(f)$ pour toute fonction de $C_{\mathcal{K}}(X)$ et ceci prouve que $\theta = \lim\limits_{k \to \infty} (\lambda_k + \lambda) \mu_{(\lambda_k + \lambda)}$ au sens de la convergence vague des mesures sur $X$ , quel que soit le nombre réel strictement positif $\lambda$ .

Reprenons l'équation résolvante :

$$\mu_\lambda - \mu_{(\lambda_k+\lambda)} = \lambda_k\, \mu_\lambda * \mu_{(\lambda_k+\lambda)}$$

Donc

$$\mu_\lambda - \mu_{(\lambda_k+\lambda)} = (\lambda_k+\lambda)\mu_\lambda * \mu_{\lambda_k+\lambda} - \lambda\mu_\lambda * \mu_{(\lambda_k+\lambda)}$$

En passant à la limite quand $k$ tend vers l'infini on a pour tout nombre réel strictement positif $\lambda$

$$\mu_\lambda = \mu_\lambda * \theta$$

On remarque alors qu'on vient de démontrer le fait suivant : pour tout point adhérent $\nu$ de l'ensemble $\{\lambda\, \mu_\lambda\}_{\lambda>0}$ quand $\lambda$ tend vers l'infini pour la topologie de la convergence vague des mesures sur $X$ et pour tout nombre réel strictement positif $\lambda$ on peut écrire :

$$\mu_\lambda = \mu_\lambda * \nu \quad .$$

Donc en utilisant ces égalités et en passant à la limite suivant des suites de réels strictement positifs convenablement choisies :

$$\nu = \nu * \nu \; .$$

Mais le théorème [Parthasarathy [1], théorème 3.1 p. 62] permet d'affirmer que, considérée comme mesure sur G, la mesure $\nu$ a pour support un sous-groupe compact de G. Comme les mesures $\mu_\lambda$ sont, comme mesures sur $G$ , biinvariantes par l'action de $K$ , il en est de même de $\nu$ . Mais $K$ est un sous groupe compact maximal de $G$ et par suite $\nu$ est ou bien la mesure de Haar de $K$ $(\int_X d\nu(x) \leq 1)$ ou bien la mesure $0$ . Mais ce dernier cas est exclu car les égalités précédentes entraîneraient que $V = 0$ .

Par suite, l'ensemble $\{\lambda\, \mu_\lambda\}_{\lambda>0}$ possède un unique point adhérent quand $\lambda$ tend vers l'infini pour la topologie de la convergence vague des mesures sur $X$ à savoir la mesure de Haar de $K$ , $m_K$ .

On vient donc de prouver que

$$\lim \lambda\, V^\lambda f(x) = f(x) \text{ pour toute fonction } f \text{ de } C\ (X)$$

et tout point $x$ de $X$ .

Le Théorème de Hille-Yoshida montre alors qu'il existe un unique semi-groupe de Feller $\{P_\sigma\}_{\sigma\geq 0}$ d'opérateurs sur $C_o(X)$ tel que $V^\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda\sigma} P_\sigma\, d\sigma$ pour tout nombre $\lambda$ strictement positif. Les opérateurs de ce semi-groupe sont évidemment invariants par l'action de $G$ et comme $\{P_\sigma\}_{\sigma\geq 0}$ n'est pas le semi-groupe trivial il résulte du Théorème 2.2 que $V = \int_0^\infty P_\sigma\, d\sigma$. Le Théorème est ainsi complètement démontré.

En conclusion, les résultats des paragraphes 2 et 3 montrent qu'il existe une bijection entre d'une part les opérateurs $(\mathcal{D}_A, A)$ sur $X$ satisfaisant aux conditions du Corollaire 2.1 et les noyaux $V$ sur $X$ satisfaisant aux conditions du Théorème 1.

Enfin, on remarque que la situation d'un espace riemannien symétrique de type non compact est essentiellement différente de celle des espaces euclidiens. En effet pour tout $n$ entier il existe sur l'espace euclidien de dimension $n$ des semi-groupes de Feller invariants par le groupe des déplacements qui ne sont pas intégrables. En particulier pour $n = 1$, le semi-groupe de la translation n'est pas intégrable, pour $n = 2$, le semi-groupe de Gauss n'est pas intégrable.

# APPENDICE

On rassemble ici quelques résultats élémentaires de géométrie qui interviennent dans le développement qui précède :

## A. Les groupes $O(1,n)$ et $SO(1,n)$

Soit $n$ un entier $\geq 1$ et $Q$ la forme quadratique non dégénérée sur $R^{n+1}$ de signature $(1,n)$ telle que la base canonique $B = (e_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $R^{n+1}$ soit réduite par rapport à $Q$ .

DEFINITION 0.1. - On appelle $O(1,n)$ le groupe des endomorphismes réguliers de $R^{n+1}$ laissant invariante la forme quadratique $Q$ .

On appelle $SO(1,n)$ le sous-groupe des éléments de $O(1,n)$ dont le déterminant est égal à $+1$ .

THEOREME 0. - 1 [ ] Soit $G$ un groupe topologique localement compact à base dénombrable et $X$ un $G$-espace homogène localement compact à base dénombrable. Alors si $K$ est un sous-groupe d'isotropie d'un point $x \in X$ dans $G$, l'application canonique $\alpha : G/K \to X$ est un homéomorphisme.

PROPOSITION 0.1. - Soit $SO_o(1,n)$ le sous-groupe de $O(1,n)$ constitué des endomorphismes $A$ de $O(1,n)$ tels que $\det A = +1$ et que $a_{oo} \geq 1$ (par rapport à la base canonique de $R^{n+1}$). Alors $SO_o(1,n)$ est la composante neutre de $O(1,n)$.

Démonstration.

Soit $\mathcal{U}$ le sous-espace de $R^{n+1}$ défini par

$$\{ x = (x_o,\dots,x_n) \in R^{n+1} \mid x_o > 0 \,,\ x_o^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 = 1\}$$

Montrons $\mathcal{U}$ est connexe :

Soit $x \in \mathcal{U}$ ; il existe $t \in R$ tel que $x_o = \mathrm{ch}\, t$ et alors $\sum_1^n x_i^2 = \mathrm{sh}^2 t$. Donc si $t \neq 0$ le point $\left(\frac{x_i}{\mathrm{sh}\, t}\right)_{1 \leq i \leq n} \in S^{n-1}$. Soit alors $\varphi$ l'application de $R \times S^{n-1}$ dans $\mathcal{H}$ définie par

$$\varphi(t,y) = (\mathrm{ch}\, t \,,\ \mathrm{sh}\, t\, y)\,.$$

La remarque qui précède montre que $\varphi$ est surjective. Comme elle est continue, il en résulte que $\mathcal{H}$ est connexe.

D'autre part le groupe d'isotropie du vecteur $e_o \in \mathcal{H}$ dans $SO_o(1,n)$ est le sous-groupe des endomorphismes $H$ de $R^{n+1}$ qui s'écrivent dans la base canonique $B$ de $R^{n+1}$ sous la forme

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix}$$

où $B \in SO(n)$ (groupe spécial orthogonal) et d'après le théorème 0.1, le groupe $SO_o(1,n)/SO(n)$ est connexe car homéomorphe à $\mathcal{H}$.
Comme le groupe $SO(n)$ est connexe on en déduit la connexité de $SO_o(1,n)$.

Soit $G_o(n)$ la composante neutre de $O(1,n)$. L'image de $G_o(n)$ par l'application $\gamma : O(1,n) \to \{-1,1\} \times (]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[)$ où $\gamma(A) = (\mathrm{dét}\, A, a_{oo})$ est connexe et contient le point $(1,1)$. Par suite $G_o(n)$ est contenu dans $SO_o(1,n)$ et ceci montre que $SO_o(1,n)$ est la composante neutre de $O(1,n)$.

B. <u>Décomposition de</u> $SO_o(1,n)$ <u>en éléments simples</u>.

DEFINITION 0.2. - Soient $E$ un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 2$,

$Q$ une forme quadratique non dégénérée de signature $(p,q)$ et $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de $E$ réduite relativement à $Q$.

On dira qu'un endomorphisme $V$ de $E$ est une rotation euclidienne élémentaire relativement à $B$ si $V$ est une rotation et s'il existe deux éléments distincts $i$ et $j$ de l'intervalle $[1,p]$ ou de l'intervalle $[p+1,n]$ tels que pour tout élément $k\in[1,n]$ différents de $i$ et $j$ on ait $U(e_k)=e_k$.

Lorsque $0<p<n$, on dira qu'un endomorphisme $V$ de $E$ est une rotation lorentzienne élémentaire relativement à $B$ si $V$ est une rotation orthochrone et s'il existe un élément $i$ de $[1,p]$ et un élément $j$ de $[p+1,n]$ tels que, pour tout élément $k$ de $[1,n]$ distincts de $i$ et $j$, $V(e_k)=e_k$.

PROPOSITION 0.2. - 1) _Si_ $V$ _est une rotation euclidienne élémentaire relativement à_ $B$ _il existe des entiers distincts_ $i,j$ _de_ $[1,p]$ _ou de_ $[p+1,n]$ _et un nombre réel_ $\theta$ _tels que_ $V$ _soit égal à l'endomorphisme_ $R_{ij}(\theta)$ _défini par_ :

$$[R_{ij}(\theta)]\,(e_k) = e_k \quad \text{si} \quad k\neq i \quad \text{et} \quad k\neq j$$
$$[R_{ij}(\theta)]\,(e_i) = \cos\theta\, e_i + \sin\theta\, e_j$$
$$[R_{ij}(\theta)]\,(e_j) = \sin\theta\, e_i + \cos\theta\, e_j$$

2) _Si_ $V$ _est une rotation lorentizienne élémentaire relativement à_ $B$ $(0<p<n)$ _alors il existe des entiers distincts_ $i$ _et_ $j$ $(i\in[1,p],\ j\in[p+1,n])$ _et un nombre réel_ $\varphi$ _tels que_ $V$ _soit égal à l'endomorphisme_ $H_{ij}(\varphi)$ _défini par_ :

$$[H_{ij}(\varphi)]\,(e_k) = e_k \quad \text{si} \quad k\neq i \quad \text{et} \quad k\neq j$$
$$[H_{ij}(\varphi)]\,(e_i) = \mathrm{ch}\,\varphi\, e_i + \mathrm{sh}\,\varphi\, e_j$$
$$[H_{ij}(\varphi)]\,(e_j) = \mathrm{sh}\,\varphi\, e_i + \mathrm{ch}\,\varphi\, e_j\,.$$

3) <u>Tout élément de</u> $SO_o(1,n)$ <u>s'écrit comme produit d'au plus</u> $\frac{n(n+2)}{2}$ <u>rotations élémentaires dont au plus une rotation lorentzienne élémentaire.</u>

<u>Démonstration.</u>

1) Si $V$ est une rotation euclidienne élémentaire et si $\Phi$ est la forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$ associée à $Q$ alors :

$$\Phi(V(e_i),e_k) = \Phi[V(e_i),V(e_k)] = \Phi(e_i,e_k) = 0 \text{ si } k \neq i \text{ et } k \neq j$$

Ceci prouve que la restriction de $V$ du sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les vecteurs $e_i$ et $e_j$ est un endomorphisme de ce sous-espace et même une rotation euclidienne puisque $V$ est une rotation de $E$. On a alors aussitôt le résultat annoncé dans ce cas.

2) Pour des raisons analogues, si $V$ est une rotation lorentzienne élémentaire on a

$$V(e_i) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j \quad \text{où} \quad i \in [1,p] \quad \text{et} \quad j \in [p+1,n]$$
$$V(e_j) = \mu_i e_i + \mu_j e_j$$

Comme $V$ est une rotation orthochrone on a le résultat annoncé en considérant le système d'équations :

$$\begin{cases} \lambda_i^2 - \lambda_j^2 = 1 & \lambda_i\mu_j - \lambda_j\mu_i = 1 \quad \lambda_i > 0 \\ \mu_j^2 - \mu_i^2 = 1 & \lambda_i\mu_i = \lambda_j\mu_j \;. \end{cases}$$

3) On suppose maintenant que $p=1$. Soit $f$ un vecteur de $E$ tel que $Q(f)=1$ avec $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \quad \alpha_1 > 0$.

Alors comme $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 + 1$ il existe $\varphi \in R$ tels que $\alpha_1 = \operatorname{ch}\varphi$ et par récurrence sur l'entier $k$ on peut déterminer une suite

$\theta_2, \dots \theta_k, \dots, \theta_{n-1}$ de nombres réels tels que

$$\alpha_1 = \text{ch}\,\varphi$$

$$\alpha_2 = \text{sh}\,\varphi \cos\theta_2$$

$$\alpha_3 = \text{sh}\,\varphi \sin\theta_2 \cos\theta_3$$

$$\alpha_k = \text{sch}\,\varphi \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{k-1} \cos\theta_K$$

$$\alpha_n = \text{sh}\,\varphi \quad \sin\theta_2 \quad \sin\theta_{n-1} \,.$$

Soit $R_1$ l'endomorphisme de $E$ défini par

$$R_1 = H_{1,2}(\varphi) \quad R_{n-1,n}(\theta_{n-2}) \dots R_{2,3}(\theta_2).$$

Il est immédiat que $R_1 \in SO_o(1,n-1)$ et transforme le vecteur $e_1$ en le vecteur $f$.

Soit maintenant $S$ élément de $SO_o(1,n-1)$

Posons $S(e_1) = f_1$. Il est clair que $Q(f_2) = 1$ et que si, $f_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, e_j \alpha,$ est strictement positif.

L'endomorphisme $V$ de $E$ défini par $V = SO\,R_1^{-1}$ est dans $SO_o(1,n-1)$ et conserve le vecteur $f_2$ ($R_1$ est construit à partir de $f_1$ comme indiqué en début de ce paragraphe). On peut donc associer à $V$ de façon biunivoque un élément de $SO(n-1)$. De plus il existe un unique vecteur $f_2 \in E$ tel que $S(e_2) = V(f_2)$.

Or $\Phi(s(e_2), s(e_1)) = \Phi(e_2,e_1) = 0 = \Phi\,(s(e_2),f_2) =$

$$\Phi(V(f_2),\, V(f_1)) = \Phi(f_2,f_1)$$

et par suite si $f_2 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j s(e_j)$ alors $\beta_1 = 0$ et $\sum_{j=2} \beta_j^2 = 1$.

Procédant par récurrence on voit que $s$ s'écrit comme produit de $(n-1) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ rotations élémentaires dont au plus une rotation lorentzienne élémentaire ce qui achève la démonstration.

<u>Remarques</u>. - a) La proposition s'étend aus formes quadratiques de signature $(p(q)$ ; alors toute rotation se décomposera en au plus $\frac{n(n-1)}{2}$ rotations élémentaires dont au plus $p$ rotations lorentziennes élémentaires ; la démonstration suit la même démarche que ce qui précède.

b) On a établi dans la proposition précédente un résultat qui est utilisé dans la démonstration du lemme [ ] et qui a été démontré dans le cas de $SO_o(1,3)$ pour des arguments de cinématique.

----------

## BIBLIOGRAPHIE

R.M. DUDLEY [1] Lorentz-invariant Markov processes in relativitic phare space.
Arkiv för Mathematik. Band 6, n° 14 (1965-1967), pp. 241-267.

R. GANGOLLI [1] Isotropic infinite divisible measures on symmetric spaces.
Acta Mathematica 111 (1964), pp. 213-246.

HARISH-CHANDRA [1] Spherical functions on a semi-simple Lie group II.
American Journal of Mathematics 80 (1958), pp. 553-613.

S. HELGASON [1] Differential Geometry and symmetric spaces.
Academic Press.

[2] A duality fot symmetric spaces with application to group representations.
Advances in Mathematics. 5,1 (1970), pp. 1-154.

G.A. HUNT [1] Semi-groups of measures on Lie Groups
Transactions of the American Mathematical Society 81 (1956), pp. 264-293.

P.A. MEYER [1] Probabilités et Potentiel.
Hermann.

[2] Quelques applications des résolvantes de Ray.
Inventiones Mathematica 14 (1971), pp. 143-166.

PARTHASARATHY [1] Probability on Metric Spaces.
Academic Press.

J. WALSH [1] Quelques applications des Résolvants de Ray .
Inventiones Mathematica 14 (1971), pp. 143-166.

[2] Some topologies connected with Lebesgue measures.
Séminaire de Probabilités de Strasbourg V.
Lecture Notes in Mathematics, n° 191, pp. 1298-311.