

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

XAVIER FERNIQUE

## **Une démonstration simple du théorème de R.M. Dudley et M. Kanter sur les lois 0-1 pour les mesures stables**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 8 (1974), p. 78-79

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1974\\_\\_8\\_\\_78\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__78_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE DÉMONSTRATION SIMPLE DU THÉORÈME DE  
R. M. DUDLEY ET MAREK KANTER SUR LES LOIS  
ZÉRO-UN POUR LES MESURES STABLES

par X. Fernique

0. Rappels et notations :

Soit  $E$  un espace vectoriel mesurable c'est-à-dire  $([2])$  muni d'une tribu  $\mathcal{B}$  compatible avec sa structure vectorielle ; soit  $X$  un vecteur aléatoire à valeurs dans  $(E, \mathcal{B})$ . On sait que si sa loi est stable, alors pour tout entier positif  $n$  et tout couple  $(Y, Z)$  de réalisations indépendantes de  $X$ , il existe un nombre réel  $c_n$  et un élément  $x_n$  de  $E$  tels que  $c_n(X - x_n)$  ait même loi que  $Y + nZ$ .

Théorème ([1]) : Soit  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$  appartenant à  $\mathcal{B}$ , alors  $P\{X \in F\}$  vaut zéro ou un.

1. Démonstration :

Nous supposons que  $P\{X \in F\}$  est strictement positive, nous devons donc prouver qu'elle vaut alors 1.

a) Supposons d'abord que  $x_n$  est nul pour tout  $n$  (loi strictement stable).

Pour tout entier  $n$ , posons :

$$A_n = \{Y + nZ \in F\},$$

$$B_n = \{Z \notin F\} \cap A_n.$$

Puisque la loi de  $X$  est strictement stable,  $A_n$  a même probabilité que  $\{X \in F\}$ . On en déduit :

$$P\{B_n\} = P\{X \in F\} - P[\{Y + nZ \in F\} \cap \{Z \in F\}],$$

$$P\{B_n\} = P\{X \in F\} - P\{X \in F\}^2.$$

Par ailleurs si  $n$  et  $m$  sont différents, et si  $Y + nZ$  et  $Y + mZ$  appartiennent à  $F$ ,  $Z$  appartient aussi à  $F$ , si bien que les  $B_n$  sont à la fois disjoints et équiprobables ; comme leur cardinal n'est pas fini, leur probabilité est nulle, c'est-à-dire :

$$P\{X \in F\} > 0, \quad P\{X \in F\} - P\{X \in F\}^2 = 0,$$

on en déduit donc le résultat dans ce premier cas.

- b) Le résultat général s'en déduit par symétrisation comme dans la preuve de Dudley et Kanter ; je la rappelle :  $U = Y - Z$  a une loi strictement stable et  $P\{U \in F\}$  est supérieure à  $P\{X \in F\}^2$  donc strictement positive ; elle vaut 1 . Ceci s'écrit :

$$P\{Z | P\{Y - Z \in F\} = 1\} = 1 .$$

Comme  $P\{Z \in F\}$  est positive, on en déduit qu'il existe  $z \in F$  tel que  $P\{Y - z \in F\} = 1$  et donc le résultat général.

[1] R. M. DUDLEY et Marek KANTER ,

Zero-one laws for stable measures, preprint.

[2] X. FERNIQUE,

Certaines propriétés des éléments aléatoires gaussiens .  
Istituto Nazionale di Alta Matematica, Symposia Matematica,  
IX, 1972.