SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAIRE DUPUIS

Mesure de Hausdorff de la trajectoire de certains processus à accroissements indépendants et stationnaires

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 8 (1974), p. 37-77

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__37_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UNIVERSITE LOUIS-PASTEUR

SEMINAIRE DE PROBABILITES

MESURE DE HAUSDORFF DE LA TRAJECTOIRE DE CERTAINS PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS ET STATIONNAIRES

par Claire DUPUIS

Le but du présent travail est de montrer que pour un très grand nombre de processus symétriques à accroissements indépendants et stationnaires qui ne sont pas de sauts purs, il existe de bonnes fonctions φ telles que la φ-mesure de Hausdorff de la trajectoire du processus jusqu'à l'instant s est presque sûrement égale à c.s., où c est une constante strictement positive.

Ce problème fut abordé pour la première fois par Paul Lévy en 1953 et a été résolu dans plusieurs cas particuliers. Ainsi, pour le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, où d est au moins égal à 3, Z. Ciesielskiet S.J. Taylor [3] ont montré que la bonne fonction est

$$\varphi(t) = t^2 \log\log\left(\frac{1}{t}\right) .$$

De même, dans le cas du mouvement brownien plan, D. Ray [9] et S.J. Taylor [12] ont obtenu ce même résultat pour

$$\varphi(t) = t^2 \log\left(\frac{1}{t}\right) \log\log\log\left(\frac{1}{t}\right) ;$$

dans le cas des processus stables transients d'index α, S.J. Taylor [13] a pû conclure avec $\varphi(t) = t^\alpha \log\log(\frac{1}{t})$ pour les processus de type A et $\varphi(t) = t^\alpha(\log\log(\frac{1}{t}))^{1-\alpha}$ pour les processus de type B ; puis, dans le cas des processus à composantes stables, le problème a été résolu par W.E. Pruitt et S.J. Taylor [8] pour une fonction semblable.

Dans tout ce travail, nous avons considéré un processus symétrique à accroissements indépendants et stationnaires qui n'est pas de sauts purs et sans partie brownienne. Nous nous sommes inspirés des méthodes utilisées par S.J. Taylor dans l'article : "Sample Path Properties of a Transient Stable Process". [13]

En fait, la stabilité y est une hypothèse artificielle qui ne sert qu'à établir plus rapidement le lemme clé(Lemmes 5 et 6 de [13])analogue à notre théorème 2.1. Les démonstrations de S.J. Taylor sont essentiellement basées sur le fait que, pour un processus stable d'index α , $\frac{X_t}{t^{1/\alpha}}$ est constant en distribution.

Dans ce travail nous mettrons en évidence l'existence d'une sorte de temps naturel du processus adapté à une taille a c'est-à-dire une fonction $t(a)$ telle que $\frac{Y_{t(a)}}{a}$ soit approximativement constant en loi.

Dans le cas stable, $t(a)$ sera égal à a^α . D'ailleurs la structure des démonstrations des théorèmes 3.1 et 4.1 est calquée sur celle des théorèmes correspondants de S.J. Taylor [13] et celle du théorème 5.2 sur la démonstration d'une majoration exponentielle par W.E. Pruitt et S.J. Taylor [8].

Après quelques rappels sur les processus à accroissements indépendants et stationnaires et sur la mesure de Hausdorff, nous définissons, dans le chapitre 1, nos notations et surtout notre temps naturel $t(a)$ comme l'inverse d'une fonction $\Gamma(a)$. Le chapitre 2 est consacré à la démonstration de l'encadrement exponentiel de la probabilité de l'événement : le processus est resté, en valeur absolue, inférieur à a jusqu'à l'instant $\lambda t(a)$. Cet encadrement ne dépend pas de a . Une conséquence immédiate en est que $t(a)$ est comparable à l'espérance de P_a , instant de première sortie de l'intervalle $[-a,+a]$. Dans le chapitre 3, nous étudions le comportement à l'origine de

$$\frac{P_a}{\varphi_1(a)} = \frac{P_a}{t(a)\log\log(1/_{t(a)})}$$

et montrons notamment que la limite supérieure de cette expression, quand a tend vers 0, est presque sûrement constante. Au chapitre 4, nous montrons que la φ_1- mesure de Hausdorff de la trajectoire du processus (Y_t) jusqu'à l'instant s est, presque sûrement, inférieure à $C_{40}.s$. où C_{40} est une constante strictement positive. Dans le chapitre 5, nous considérons comme temps naturel $v^s(a)$, espérance du temps de séjour jusqu'à l'instant s dans $[-a,+a]$; et, par un cheminement analogue à celui des chapitres 3 et 4, nous montrons qu'il existe une constante universelle C_{50} strictement positive et une fonction $\varphi_2(a) = v^1(a)\log\log(1/_{v^1(a)})$ telles que la φ_2- mesure de Hausdorff de la trajectoire dü processus jusqu'à l'instant s est presque sûrement supérieure à $C_{50}.s$, pour s inférieur à 1.

Les fonctions φ_1 et φ_2 sont toujours comparables ; nous verrons en effet, au chapitre 6, qu'il existe une constante C telle que $\varphi_2(a) \geq C.\varphi_1(a)$ au moins pour a assez petit. Mais cette inégalité ne nous donne pas d'encadrement pour la φ_1 ou φ_2 mesure de Hausdorff de la trajectoire. Nous donnerons une condition nécessaire $\mathcal{H}_\theta$ pour que ces deux fonctions soient équivalentes, ce qui permet alors de conclure. ($\mathcal{H}_\theta$ est automatiquement vérifiée pour les processus symétriques stables d'index $\alpha < 1$ étudiés par S.J. Taylor).

Cette condition, qui implique notamment que le processus est à variation bornée, est en fait suffisante, comme l'a démontré J. BRETAGNOLLE dans un article à paraître. Nous pouvons alors conclure que pour tout processus symétrique à accroissements indépendants et stationnaires qui n'est pas de sauts purs et qui vérifie la condition $\mathcal{H}_\theta$, la φ_1 et la φ_2 mesure de Hausdorff de la trajectoire sont presque sûrement égales à des fonctions linéaires de s.

PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS ET STATIONNAIRES

1. DEFINITION.- Soient $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé et $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ une famille de variables aléatoires réelles. Pour tout t appartenant à $\mathbb{R}^+$ on définit la tribu $\mathfrak{F}_t$ comme la tribu engendrée par les variables aléatoires X_s, pour s inférieur ou égal à t, et complétée par tous les ensembles négligeables de $\mathfrak{F}$.

On dira que la famille (X_t) est un processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAI) si

a) $X_0 = 0$ presque sûrement

b) $X_{t+s} - X_t$ est indépendant de $\mathfrak{F}_t$ et de même loi que X_s, pour s et t positifs

c) X_t est continu à droite et pourvu de limites à gauche.

2. DECOMPOSITION DE PAUL LEVY

NOTATION.- Soient a et b des nombres réels. On notera $a \wedge b = \inf(a,b)$ et $a \vee b = \sup(a,b)$

On notera de la même façon les bornes inférieures ou supérieures d'ensembles de nombres réels.

DEFINITION.- Un processus de Poisson est un PAI qui ne croît que par des sauts d'amplitude $+1$.

THEOREME DE DECOMPOSITION.- Soit X_t un PAI, alors

$$X_t = \sigma B_t + at + \int_{|x| \geq 1} x\, N_t(dx) + \int_{|x| < 1} x[N_t(dx) - t\, \mathfrak{L}(dx)]$$

où

B_t est le mouvement brownien à trajectoires continues presque sûrement.

at est la translation de vitesse uniforme a.

Les deux intégrales stochastiques existent, la première dans $\mathbb{L}^0$, la seconde dans $\mathbb{L}^2$.

$N_t(dx)$ représente une famille de processus de Poisson indépendants de B_t. Pour chaque ω, $N_t(dx)(\omega)$ définit une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ et donc $\mathcal{L}(dx) = E(N_1(dx))$ est également une mesure positive, σ-finie sur $\mathbb{R}-\{0\}$, appelée mesure de Lévy ; elle vérifie $\int(x^2 \wedge 1)\,\mathcal{L}(dx) < +\infty$, condition nécessaire et suffisante pour que les intégrales stochastiques existent. On notera $L(y) = \int_{|x|\geq y} \mathcal{L}(dx)$
Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0 dans son adhérence. $N_t(A)$ qui s'interprête comme le nombre des discontinuités d'amplitude appartenant à A entre 0 et t est de paramètre $t\ \mathcal{L}(A)$ et indépendant de $N_t(B)$ si B est un borélien de $\mathbb{R}$ tel que $A \cap B = \emptyset$.

FORMULE EN LOI

La seconde caractéristique $\psi(u)$ du processus (X_t) est définie par $E(e^{iuX_t}) = e^{-t\psi(u)}$, et le théorème de décomposition de X_t en intégrales stochastiques a pour conséquence la décomposition suivante de $\psi(u)$:

$$\psi(u) = \frac{\sigma^2 u^2}{2} - iau + \int_{|x|\geq 1}(1-e^{iux})\mathcal{L}(dx) + \int_{|x|<1}(1-e^{iux}+iux)\mathcal{L}(dx)$$

3. CAS PARTICULIERS IMPORTANTS.

a) si $\sigma = 0$ et si $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(dx) < +\infty$, posons $b = a - \int_{|x|<1} x\,\mathcal{L}(dx)$. Si, de surcroît, $b = 0$, on a affaire à un processus de Poisson généralisé : $X_t = \int x\, N_t(dx)$, appelé aussi processus de sauts purs.

b) si $\sigma = 0$, $a = 0$ mais $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(dx) = +\infty$ le processus X_t n'est pas de sauts purs. Si en outre, $\int_{\mathbb{R}} 1 \wedge |x|\,\mathcal{L}(dx) < +\infty$, X_t est alors un PAI à variation bornée.

φ - MESURE DE HAUSDORFF

On notera Λ^{φ} la φ-mesure de Hausdorff. Pour sa définition et ses propriétés, le lecteur pourra se reporter au livre de C.A. Rogers [10] (ou éventuellement celui de M.E. MUNROE [7]).

CHAPITRE 1

NOTATIONS ET PROPRIETES ELEMENTAIRES

Dans tout ce qui suit, (Y_t) sera un processus à accroissements indépendants et stationnaires, symétrique, qui n'est pas de sauts purs et sans partie brownienne. $\mathcal{L}(dx)$ sera la mesure de Lévy associée à Y_t et $L(x)$ la fonction définie par $L(x) = 2\int_x^{+\infty} \mathcal{L}(dt)$ pour tout x positif.

Le processus Y_t peut être considéré comme la somme du processus de ses grands sauts et de celui de ses petits sauts. Cette décomposition correspond à un partage de la mesure de Lévy $\mathcal{L}(dx)$ en deux mesures à supports disjoints ; ainsi, à $\mathcal{L}(dx)1_{|x|\leq a}$, on associe le processus $\underline{Y_t^a}$ qui comprend tous les sauts du processus dont l'amplitude appartient à $[-a,+a]$; d'autre part $\overline{Y_t^a}$ sera le processus associé à $\mathcal{L}(dx)1_{|x|>a}$ et comprendra les sauts du processus Y_t dont l'amplitude dépasse a en valeur absolue. $\overline{Y_t^a}$ est un processus de sauts purs et reste nul un temps strictement positif presque sûrement. Pour tout a strictement positif on pourra donc écrire :

$$Y_t = \underline{Y_t^a} + \overline{Y_t^a} \quad .$$

PROPRIETES.

(1.1) Les processus $\underline{Y_t^a}$ et $\overline{Y_t^a}$ sont des PAI symétriques.

(1.2) $\underline{Y_t^a}$ et $\overline{Y_t^a}$ sont indépendants.

(1.3) Le nombre de sauts d'amplitude absolue supérieure à a dans l'intervalle de temps $[0,t]$ étant la variable de Poisson $N_t(]-\infty,-a[\cup]a,+\infty[)$ de paramètre $t\,L(a)$,

$$P\{\overline{Y_t^a} = 0\} \geq P\{N_t(]-\infty,-a[\cup]a,+\infty[) = 0\}$$
$$= e^{-t\,L(a)} \quad .$$

PROCESSUS ANNEXES

Nous aurons en outre besoin de plusieurs processus définis à partir de Y_t .

I. LE PROCESSUS DU SUP

DEFINITION.- $Y^*_{s,t} = \sup_{s \leq u < t} |Y_u - Y_s|$.

(Dans le cas où $s = 0$, on notera Y^*_t la quantité $Y^*_{0,t}$.)

II. LE TEMPS D'ENTREE DANS UN ENSEMBLE A .

DEFINITION.- $\mathcal{T}(A) = \inf\{t > 0 | Y_t \in A\}$.

$\mathcal{T}(A)$ est un temps d'arrêt.

III. LE TEMPS DE PREMIERE SORTIE D'UN ENSEMBLE A .

DEFINITION.- $P_A = \inf\{t > 0 | Y_t \notin A\}$.

C'est un cas particulier de temps d'entrée et un temps d'arrêt, puisqu'il s'agit du temps d'entrée dans le complémentaire de A . Pour simplifier les notations dans le cas où A est l'intervalle $[-a,+a]$ avec a strictement positif, on notera P_a la quantité $P_{[-a,+a]}$. Il est évident que P_a et Y^*_t sont liés par :

(1.4) $$\{P_a \geq t\} = \{Y^*_t \leq a\} .$$

On s'intéressera aussi au temps de première sortie d'un ensemble A après un temps d'arrêt S .

DEFINITION.- $P_A(S) = \inf\{t > 0 | Y_{S+t} \notin A\}$.

Il est évident que cette définition n'est intéressante que si Y_S est dans A .

IV . LE TEMPS DE SEJOUR, JUSQU'A L'INSTANT t , DANS UN ENSEMBLE A .

DEFINITION.-

$$T_A^t = \int_0^t 1_A(Y_s)ds$$

et on notera son espérance $E(T_A^t) = V^t(A)$.

Dans le cas où A est l'intervalle $[-a,+a], (a>0)$ on notera T_a^t la quantité $T^t_{[-a,+a]}$ et $v^t(a)$ l'espérance $E(T_a^t)$.

T_a^t et P_a sont liés par $T_a^t \geq P_a \wedge t$.

On s'intéressera aussi au temps de séjour dans un ensemble A après un temps d'arrêt S , noté $T_A^t(S)$.

DEFINITION.-

$$T_A^t(S) = \int_0^t 1_A(Y_{S+s})ds = \int_S^{S+t} 1_A(Y_s)ds \quad .$$

DEFINITION DE LA FONCTION Γ

La fonction Γ dont l'inverse nous servira de mesure de temps, est définie pour tout a positif, par

$$\Gamma(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 \wedge \frac{x^2}{a^2}\right) \mathcal{L}(dx)$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} \left(1 \wedge \frac{x^2}{a^2}\right) \mathcal{L}(dx).$$

On pose $t(a) = \frac{1}{\Gamma(a)}$.

PROPRIETES DE LA FONCTION Γ .

$$\Gamma(a) = 2 \int_0^a \frac{x^2}{a^2} \mathcal{L}(dx) + L(a) = \frac{1}{a^2} \operatorname{Var}(\underline{Y_1^a}) + L(a)$$

(1.5) $\qquad \Gamma(a) \geq L(a)$

(1.6) $\qquad \Gamma(a) \geq \frac{\operatorname{Var}(Y_1^a)}{a^2}$

En intégrant par parties $\int_0^a \frac{x^{2'}}{a^2} \mathcal{L}(dx)$ on obtient $\Gamma(a) = \frac{2}{a^2} \int_0^a x\, L(x)dx$. Il en résulte que

(1.7) $\qquad a^2\Gamma(a)$ est une fonction croissante de a .

D'autre part :

$$\Gamma'(a) = -\frac{2}{a^3} \left[\int_0^a x\, L(x)dx - \frac{a^2}{2} L(a)\right] \leq 0$$

(1.8) $\qquad \Gamma(a)$ est une fonction décroissante.

(1.9) $\qquad \lim\limits_{a \to 0^+} \Gamma(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(dx) = +\infty$ puisque (Y_t) n'est pas de sauts purs.

Les propriétés (1.5) à (1.9) impliquent, pour $t(a) = \frac{1}{\Gamma(a)}$.

(1.10) $t(a)L(a) \leq 1$

(1.11) $\frac{t(a)}{a^2} \int_0^a x^2 \mathcal{L}(dx) \leq 1$

(1.12) $t(a)$ est une fonction croissante de a et $\frac{a^2}{t(a)}$ aussi.

On peut notamment en déduire une relation qui sera souvent utilisée.

(1.13) $t(a) \leq t(2a) \leq 4t(a)$ pour tout $a > 0$.

(1.14) $\lim_{a \to 0^+} t(a) = 0$.

COMPARAISON DES FONCTIONS $\Gamma(a)$ et $v^1(a)$.

1.15 LEMME.- Il existe un nombre réel a_0 strictement positif tel que, pour tout a inférieur à a_0

$$P\{Y^*_{t(a)} \leq a\} \leq \frac{v^1(a)}{t(a)}$$

(d'après la formule (1.4).)

COMPARAISON DES FONCTIONS Γ et Ψ .

Soit $\Psi(u)$ la seconde caractéristique du processus (Y_t). Comme (Y_t) est un PAI symétrique, $\Psi(u)$ peut s'écrire

$$\Psi(u) = 2 \int_0^{+\infty} [1-\cos(ux)] \quad \mathcal{L}(dx)$$

1.16 LEMME.-

$$\Psi(u) \leq 2\Gamma(\tfrac{1}{u}) \quad \text{pour tout } u \text{ positif}$$

(car $(1-\cos(ux)) \leq 2(1 \wedge u^2x^2)$).

1.17 LEMME.- Il existe une constante C_{11} strictement positive telle que l'on ait :

$$\int_0^{1/a} \Psi(u)du \geq C_{11} \frac{\Gamma(a)}{a} \geq C_{11} \int_0^{1/a} \Gamma(\tfrac{1}{u})\, du$$

(La constante C_{11} est telle que $1 - \frac{\sin y}{y} \geq C_{11}.1 \wedge y^2$ pour y positif.)

CHAPITRE 2

MAJORATION ET MINORATION EXPONENTIELLES DE LA PROBABILITE DE L'EVENEMENT $\{Y^*_{\lambda t(a)} \leq a\}$.

On se propose même d'établir le théorème suivant :

2.1. THEOREME.- Il existe des nombres réels strictement positifs α, A, β, B universels, tels que

$$\alpha e^{-A\lambda} \leq P\{Y^*_{\lambda t(a)} \leq a\} = P\{P_a \geq \lambda t(a)\} \leq \beta e^{-B\lambda}$$

où λ et a sont des nombres réels strictement positifs.

COROLLAIRE.- Pour tout a strictement positif

$$\frac{\alpha}{A} t(a) \leq E(P_a) \leq \frac{\beta}{B} t(a)$$

où α, A, β, B sont les constantes définies au théorème 2.1.

Démonstration du corollaire :

$$E\left(\frac{P_a}{t(a)}\right) = \int_0^{+\infty} P\{P_a \geq xt(a)\}dx$$

La démonstration du théorème 2.1. se subdivise en plusieurs lemmes. Pour obtenir la minoration on se servira des lemmes suivants :

2.2. LEMME (Inégalité de Paul Lévy).-

$$P\{Y^*_t > L\} \leq 2\ P\{|Y_t| > L\}$$ pour tout nombre réel L strictement positif.

2.3. LEMME.- <u>On peut trouver des constantes</u> ϵ, M <u>et</u> C_{21} <u>strictement positives et universelles telles que</u>

$$P\{Y^*_{n\epsilon t(a)} \leq 2\ Ma\} \geq [\tfrac{1}{2}\ P\ \{Y^*_{\epsilon t(a)} \leq Ma\}]^n \geq \left(\frac{C_{21}}{2}\right)^n > 0$$

<u>pour</u> a <u>strictement positif et</u> n <u>dans</u> $\mathbb{N}$.

Pour la majoration on démontrera que

2.4. LEMME. - <u>Quelles que soient les constantes</u> ϵ <u>et</u> M <u>strictement positives</u>, <u>il existe</u> <u>une constante</u> C_{22} <u>ne dépendant que</u> d'ϵ <u>et de</u> M <u>et telle que</u> :

$$P\{Y^*_{n\epsilon t(a)} \leq \frac{Ma}{2}\} \leq [P\{|Y_{\epsilon t(a)}| \leq Ma\}]^n \leq (1 - C_{22})^n$$

On pourra alors montrer que

2.5. LEMME. - <u>Il existe des constantes</u> C_{23} <u>et</u> C_{24} <u>dans</u> $]0,1[$ <u>telles que</u>

$$C_{23}^m \leq P\{Y^*_{mt(a)} \leq a\} \leq C_{24}^m$$

pour m dans $\mathbb{N}$

2.6. <u>DEMONSTRATIONS</u>.

Le théorème 2.1. se déduit facilement du lemme 2.5. en prenant :

$$\alpha = C_{23} \qquad \beta = C_{24}^{-1} \qquad e^{-A} = C_{23} \qquad e^{-B} = C_{24}$$

On pourra trouver les inégalités de Paul Lévy dans M. LOEVE, Probability theory (page 247) [6].

<u>Démonstration du lemme</u> 2.3.

. Montrons tout d'abord qu'il existe ϵ, M et C_{21} tels que

$$P\{Y^*_{\epsilon t(a)} \leq Ma\} \geq C_{21}$$

En effet l'Inégalité de Paul Lévy implique

$$P\{Y^*_{\varepsilon t(a)} \leq Ma\} \geq 1 - 2\, P\{|Y_{\varepsilon t(a)}| > Ma\}$$

et l'événement $\{|Y_{\varepsilon t(a)}| \leq Ma\}$ est impliqué par

$$\{\overline{Y^a_{\varepsilon t(a)}} = 0 \;,\; |\underline{Y^a_{\varepsilon t}}(a)| \leq Ma\}$$

En utilisant les propriétés 1.2 , 1.3 , 1.10 et 1.11 , on montre que :

$$P\{Y^*_{\varepsilon t(a)} \leq Ma\} \geq 2\, e^{-\varepsilon}[1-\frac{\varepsilon}{M^2}] - 1$$

et en prenant, par exemple, $\varepsilon = \frac{1}{4}$ on pourra toujours trouver un M ne dépendant que d'ε tel que

$$C_{21} = 2e^{-\frac{1}{4}}[1-\frac{1}{4M^2}] - 1 > 0$$

Ceci termine le premier point de la démonstration du lemme 2.3.

•• Soit $I = [-b \;,\; +b]$ un intervalle $(b > o)$

On note $I^+ = [o,b]$, $I^- = [-b,o]$. Alors

$$\{Y^*_{n\varepsilon t(a)} \leq 2b\} \supset \bigcap_{k=0}^{n-1} A_k$$

pour $A_k = \{Y^*_{k\varepsilon t(a),(k+1)\varepsilon\, t(a)} \leq b \;,\; Y_{(k+1)\varepsilon t(a)} - Y_{k\varepsilon t(a)} \in I^{-\mathrm{sgn}\, Y_{k\varepsilon t(a)}}\}$

où $- \mathrm{sgn}\, Y_{k\varepsilon t(a)} = +$ si $Y_{k\varepsilon t(a)} < 0$

$-$ si $Y_{k\varepsilon t(a)} \geq 0$

Les évènements A_k sont indépendants et $P(A_k) \geq \frac{1}{2}\, P\{Y^*_{\varepsilon t(a)} \leq b\}$.

Le lemme 2.3 est ainsi démontré pour $b = Ma$ et C_{21} défini au premier point.

Démonstration du lemme 2.4.

• Montrons, par l'absurde, que quels que soient ε et M on peut trouver C_{22} tel que :

$$P\{|Y_{\varepsilon t(a)}| \leq Ma\} \leq 1-C_{22} < 1$$

Supposons qu'il existe une suite de processus symétriques $Y^{(n)}$ de mesures de Lévy $\mathcal{L}^{(n)}$ et une suite de réels a_n tels que

$$P\{|Y^{(n)}_{\varepsilon t^{(n)}(a_n)}| \le Ma_n\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et posons

$$Z_n = \frac{Y^{(n)}_{\varepsilon t^{(n)}(a_n)}}{a_n} .$$

(Z_n) est une famille relativement compacte en loi. Donc il existe une sous suite de (Z_n) qui tend, en loi, vers une variable aléatoire Z_∞ telle que

$$P\{|Z_\infty| \le M\} = 1$$

D'autre part Z_∞ est indéfiniment divisible car elle est la limite en loi de variables aléatoires indéfiniment divisibles.

Donc Z_∞ est constante car les seules variables aléatoires à support compact indéfiniment divisibles sont les constantes ([4] , page 174).

Z_∞ étant constante et symétrique, il en résulte que $Z_\infty = 0$ et que la seconde caractéristique Ψ_n de Z_n tend vers 0 uniformément sur $[0,1]$. Or

$$\int_0^1 \Psi_n(u)du = 2\varepsilon t^{(n)}(a_n) \int_{\mathbb{R}^+} 1 - \frac{\sin(x/a_n)}{x/a_n} \mathcal{L}^{(n)}(dx)$$

$$\int_0^1 \Psi_n(u)\, du \ \ge 2\, C_{11}.\varepsilon.t^{(n)}(a_n) . \int_{R_+} 1 \wedge \frac{x^2}{a_n^2} \mathcal{L}^{(n)}(dx) = C_{11}\ \varepsilon > 0$$

Ceci achève la démonstration par l'absurde du premier point.

.. L'événement $\{Y^*_{n\varepsilon t(a)} \le \frac{b}{2}\}$ implique tous les événements

$$B_k = \{|Y_{(k+1)\varepsilon t(a)} - Y_{k\varepsilon t(a)}| \le b\}$$

pour $0 \le k \le n-1$.

Les événements B_k sont indépendants et ont la même probabilité que $\{|Y_{\varepsilon t(a)}| \le b\}$.

Il en résulte que

$$P\{Y^*_{n\varepsilon t(a)} \le \frac{b}{2}\} \le (P\{|Y_{\varepsilon t(a)}| \le b\})^n$$

et le lemme 2.4 est démontré (poser $b = Ma$).

Démonstration du lemme 2.5.

Remarquons que $\dfrac{t(2a)}{4} \le t(a) \le 4t(a/2)$. On utilisera les inégalités des lemmes 2.3 (pour $M = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $b = 2a$, $m = \frac{n\varepsilon}{4}$) et 2.4 ($M = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $b = \frac{a}{2}$, $m = 4n\varepsilon$) et on définira les constantes C_{23} et C_{24} par

$$C_{23} = \left(\frac{C_{21}}{2}\right)^{\frac{4}{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad C_{24} = (1 - C_{22})^{\frac{1}{4\varepsilon}} .$$

CHAPITRE 3

COMPORTEMENT A L'ORIGINE DE $\dfrac{P_a}{t(a) \log \log(1/t(a))}$

log désigne le logarithme népérien et l'on notera désormais $\log_2 (y) = \log \log (y)$.

Le but de ce chapitre est de démontrer les deux théorèmes suivants.

3.1. - THEOREME. Il existe des constantes strictement positives ξ et γ_o telles que, dès que γ est dans $]0,\gamma_o[$ et que δ vérifie $4[t(\delta)]^4 \geq t(\gamma)$, on a :

$$P\{\bigvee_{\gamma \leq a \leq \delta} \frac{P_a}{t(a) \log_2 (1/t(a))} < \xi\} \leq \epsilon(\gamma)$$

où $\epsilon(\gamma) = e^{-[\frac{1}{4}\log(1/t(\frac{\gamma}{2}))]^{1/8}}$

3.2. - THEOREME. Il existe une constante strictement positive C_{30} telle que

$$\limsup_{a \to 0^+} \frac{P_a}{t(a) \log_2 (1/t(a))} = C_{30} \text{ p.s.}$$

COROLLAIRE.- Il existe une constante C_{31} strictement positive telle que :

$$\liminf_{a \to 0^+} \frac{Y^*_{t(a)\log_2(1/t(a))}}{a} = C_{31} \text{ p.s.}$$

Le théorème 3.2 et son corollaire sont équivalents en vertu de la relation (1.4).

Le théorème 3.1. nous permettra, dans le chapitre 4, de majorer la φ_1-mesure de Hausdorff de la trajectoire du processus (Y_t) jusqu'à l'instant s pour $\varphi_1(a) = t(a)\log_2(1/t(a))$.

3.3. - <u>Démonstration du théorème 3.2.</u>

Par un argument de tout ou rien, on montre que la variable aléatoire $\limsup_{a \to 0^+} \frac{P_a}{t(a)\log_2(1/t(a))}$ est presque sûrement égale à un nombre de $\bar{\mathbb{R}}$. Ce nombre est supérieur à ξ en vertu du théorème 3.1. En appliquant le théorème 2.1. et le lemme de Borel-Cantelli aux évènements $C_k = \{P_{a_k} \geq \frac{2}{B}\, t(a_k)\log_2(1/t(a_k))\}$, où a_k est une suite de réels définis par $t(a_k) = e^{-k}$, on montre que ce nombre est inférieur à $\frac{2e}{B}$ (B est la constante universelle du théorème 2.1.).

3.4. - <u>Démonstration du théorème 3.1.</u>

Ecrivons, sans démonstration, les deux lemmes suivants :

3.5. LEMME.-

<u>Soit</u> Y_t <u>un PAI symétrique qui n'est pas de sauts purs. Pour tous</u> a <u>et</u> λ <u>réels, strictement positifs, on a</u>

$$P\{Y^*_{\lambda t(a)} > a\} \leq 10\lambda .$$

On le démontre en utilisant l'Inégalité de Paul Lévy et la décomposition de $Y_t = \underline{Y}^a_t + \overline{Y}^a_t$ comme somme du processus de ses petits sauts et de celui de ses grands sauts.

3.6. LEMME.-

<u>Il existe une constante</u> C_{32} <u>strictement positive telle que, pour tout entier</u> k <u>au moins égal à</u> 2

$$\sum_{j \geq 1} \frac{\log(k+j)}{\log(k)}\, e^{-j^2} \leq C_{32} .$$

On définit une constante C_{33} et des suites $a_k, \lambda_k, t_k, \sigma_k$ de la manière suivante : $2\, AC_{33} = \frac{2}{3}$, $t(a_k) = e^{-k^2}$, $\lambda_k = C_{33}\log_2(1/t(a_k)) = 2\, C_{33}\log(k)$, $t_k = \lambda_k t(a_k)$ et $\sigma_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} t_i$. Considérons les évènements G_k, H_k et D_k suivants :

$$G_k = \{Y^*_{\sigma_k, \sigma_{k-1}} > a_k\} \ , \ H_k = \{Y^*_{\sigma_k} > a_k\} \ , \ D_k = \{Y^*_{\sigma_{k-1}} > 2a_k\} \ .$$

$P(G_k)$ et $P(H_k)$ peuvent être majorés de la façon suivante :

$$P(G_k) = P\{Y^*_{t_k} > a_k\} \le 1 - \alpha e^{-A\lambda_k} \le e^{-\alpha . k^{-2/3}}$$

en vertu du théorème 2.1. ; d'autre part, on montre grâce aux lemmes 3.5. et 3.6. que

$$P(H_k) \le 10 \frac{\sigma_k}{t_k} \lambda_k \le 10.C_{32} e^{-2k}.2\, C_{33}\log(k) = C_{34} e^{-2k}\log(k)$$

en posant $C_{34} = 20\, C_{32}\, C_{33}$.

Soit $A_m = \bigcap_{m \le k \le 2m} D_k$. Comme $D_k \subset G_k \cup H_k$ pour tout k, on a

$$A_m \subset \Big(\bigcap_{m \le k \le 2m} G_k \Big) \cup \Big(\bigcup_{m \le k \le 2m} H_k \Big) .$$

Les évènements G_k étant indépendants

$$P(A_m) \le e^{-\alpha . 2^{-2/3} . m^{1/3}} + C_{35} e^{-2m}\log(m)$$

où $C_{35} = C_{34} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-2j}\log(j)$.

On montre facilement qu'il existe un entier m_o tel que $P(A_m) \le e^{-m^{1/4}}$ dès que m est supérieur à m_o.

On a donc

$$P\Big\{ \bigvee_{a_{2m} \le a_k \le a_m} \frac{P_{2a_k}}{t_k} < 1 \Big\} \le P(A_m) \le e^{-m^{1/4}} .$$

En se servant de l'encadrement $t(a) \leq t(2a) \leq 4\,t(a)$, on montre finalement que

$$P\left\{\bigvee_{2a_{2m} \leq a \leq 2a_m} \frac{P_a}{t(a)\log_2(1/t(a))} < \xi\right\} \leq e^{-m^{1/4}}$$

où $\xi = \dfrac{C_{33}}{4}$.

Les relations liant a_{2m} , a_m et m sont telles que, si γ est assez petit et si δ est choisi tel que $t(\gamma) \leq 4(t(\delta))^4$, on a $\gamma \leq 2a_{2m} \leq 2a_m \leq \delta$ si on prend pour m la partie entière de $[\frac{1}{4}\log(1/t(\frac{\gamma}{2}))]^{1/8}$. Le théorème 3.1. est ainsi démontré.

CHAPITRE 4

φ_1 - MESURE DE HAUSDORFF DE LA TRAJECTOIRE DU PROCESSUS SYMETRIQUE A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS ET STATIONNAIRES (Y_t) JUSQU'A L'INSTANT s POUR $\varphi_1(a)=t(a)\log\log(1/t(a))$

On appellera trajectoire du processus jusqu'à l'instant s , noté $R(s)$, l'ensemble aléatoire des points x de $\mathbb{R}$ tels qu'il existe un t compris entre 0 et s vérifiant : $x = Y_t$.

Le but de ce chapitre est d'obtenir le théorème suivant :

4.1. THEOREME.- <u>Il existe une constante strictement positive</u> C_{40} <u>telle que</u>

$$\Lambda^{\varphi_1}(R(s)) \leq C_{40} . s \qquad \text{p.s.}$$

<u>Démonstration du théorème</u> 4.1. : On notera $I(x,a) = [x-a, x+a]$ l'intervalle fermé de centre x et de rayon a .

Soient ξ et γ_0 les constantes définies par le théorème 3.1. On choisit un γ_1 dans $]0,\gamma_0[$ et un δ_1 associé à γ_1 par le théorème 3.1. tels que, en outre :

$$(4.2) \qquad \left(\frac{\delta_1}{\gamma_1}\right) t(\gamma_1) \log_2(1/t(\gamma_1)) \leq \frac{s}{\xi}$$

Ceci est possible car le premier membre de l'inégalité (4.2) est une fonction décroissante de γ_1 .

γ_1 et δ_1 étant ainsi fixés, on définit une partition de $\mathbb{R}$ en intervalles semi-ouverts de rayon γ_1 telle que l'un de ces intervalles ait pour centre 0.

Soit $(x_k)_{k\geq 0}$ la suite formée des centres de ces intervalles. Pour recouvrir $R(s)$, trajectoire du processus (Y_t) jusqu'à l'instant s, on ne s'intéresse qu'à des intervalles "touchés" par le processus avant l'instant s . On note ρ_{γ_1}

la famille des intervalles fermés $I(x_k, \gamma_1)$ tels que $S_k = \mathcal{T}(I(x_k, \gamma_1)) < s$; dans $\mathcal{P}_{\gamma_1}$, on distingue les bons et les mauvais éléments suivant le temps de séjour après l'instant d'entrée. Les mauvais éléments seront ceux dont le processus ressort avant l'instant s après y être entré et tels qu'en outre le temps de séjour, jusqu'à l'instant s après y être entré, soit majoré. C'est pour majorer la probabilité pour un élément d'être mauvais que nous avons démontré le théorème précis 3.1.

DEFINITION.- <u>Un élément</u> $I(x_k, \gamma_1)$ <u>de</u> $\mathcal{P}_{\gamma_1}$ <u>est un mauvais élément si</u>

a) <u>Pour tout</u> a <u>appartenant à</u> $]\gamma_1, \delta_1[$ <u>on a</u> :

$$P_{I(Y_{S_k}, a)}(S_k) = \inf\{t > 0 \mid Y_{S_k + t} \notin [Y_{S_k} - a, Y_{S_k} + a]\} < s$$

b) <u>Pour tout</u> a <u>appartenant à</u> $]\gamma_1, \delta_1[$, <u>on a</u> :

$$T^s_{I(Y_{S_k}, a)}(S_k) = \int_0^s 1_{I(Y_{S_k}, a)}(Y_{S_k + t}(\omega))dt < \xi\, \varphi_1(a).$$

DEFINITION.- <u>Un élément</u> $I(x_k, \gamma_1)$ <u>de</u> $\mathcal{P}_{\gamma_1}$ <u>est un bon élément si</u>

c) <u>il existe un nombre</u> a_k <u>appartenant à</u> $]\gamma_1, \delta_1[$ <u>tel que</u>

$$T^s_{I(Y_{S_k}, a_k)}(S_k) = \int_0^s 1_{I(Y_{S_k}, a_k)}(Y_{S_k + t}(\omega))dt \geq \xi\, \varphi_1(a_k)$$

Remarquons qu'un élément qui n'est pas mauvais est bon.

<u>CONTRIBUTION DES MAUVAIS ELEMENTS A</u> $\Lambda^{\varphi_1}(R(s))$.

Soit F_k l'événement : l'intervalle $I(x_k, \gamma_1)$ est un mauvais élément. L'événement F_k implique $\{S_k < s\}$ et, pour tout a appartenant à $]\gamma_1, \delta_1[$, $\{T^s_{I(Y_{S_k}, a)}(S_k) < \xi\, \varphi_1(a)\}$.

Or $$T^s_{I(Y_{S_k}, a)}(S_k) = \int_0^s 1_{I(Y_{S_k}, a)}(Y_{S_k + t})dt$$

$$= \int_0^{s} 1_{I(0, a)}(Y_{S_k + t} - Y_{S_k})dt \ .$$

On peut appliquer la propriété de Markov forte : sur $\{S_k < +\infty\}$, $Y_{S_k+t} - Y_{S_k}$ est un PAI de même loi que Y_t et indépendant de $\mathcal{F}_{S_k}$.

L'événement $\{T^s_{I(Y_{S_k},a)}(S_k) < \xi\,\varphi(a)\}$ est donc indépendant de $\{S_k < s\}$ pour tout a appartenant à $]\gamma_1, \delta_1[$.

La définition des mauvais éléments implique

$$P\{\bigvee_{\gamma_1 \leq a \leq \delta_1} \frac{T^s_{I(Y_{S_k},a)}(S_k)}{t(a)\log_2(1/t(a))} < \xi\} \leq P\{\bigvee_{\gamma_1 \leq a \leq \delta_1} \frac{P_{I(Y_{S_k},a)}(S_k)}{t(a)\log_2(1/t(a))} < \xi\}$$

et la propriété de Markov forte implique :

$$P\{\bigvee_{\gamma_1 \leq a \leq \delta_1} \frac{P_{I(Y_{S_k},a)}(S_k)}{t(a)\log_2(1/t(a))} < \xi\} = P\{\bigvee_{\gamma_1 \leq a \leq \delta_1} \frac{P_a}{t(a)\log_2(1/t(a))} < \xi\} \leq \epsilon(\gamma_1)$$

cette dernière inégalité étant évidemment le théorème 3.1. La probabilité de F_k peut donc être majorée :

$$P(F_k) \leq P\{S_k < s\}\ \epsilon(\gamma_1) \ .$$

Cherchons à majorer $P\{S_k < s\}$: S_k étant le temps d'entrée dans $[x_k - \gamma_1 \quad x_k + \gamma_1]$ et $v^s(\gamma_1)$ l'espérance du temps de séjour, jusqu'à l'instant s dans $[-\gamma_1, +\gamma_1]$, en appliquant à nouveau la propriété de Markov forte, on peut en déduire

$$P\{S_k < s\}.v^s(\gamma_1) \leq E(T^{2s}_{I(x_k, 2\gamma_1)})$$

Les intervalles $[x_k - \gamma_1,\ x_k + \gamma_1[$ formant une partition de $\mathbb{R}$, chaque point appartient au plus à 3 intervalles fermés $I(x_k, 2\gamma_1)$ et, en sommant sur k l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$v^s(\gamma_1) \sum_{k=0}^{\infty} P\{S_k < s\} \leq 3\ E(T^{2s}_{\mathbb{R}}) = 6s$$

Soit N_{γ_1} le nombre de mauvais éléments de $\mathcal{P}_{\gamma_1}$

$$E(N_{\gamma_1}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} P(F_k) \leq 6\ \frac{\epsilon(\gamma_1)}{v^s(\gamma_1)} \cdot s$$

L'espérance de la contribution Z_{γ_1} des mauvais éléments au recouvrement est majorée par :

$$E(Z_{\gamma_1}) \leq E(N_{\gamma_1})\ \varphi_1(\gamma_1) \leq \frac{6t(\gamma_1)}{v^s(\gamma_1)} \cdot \varepsilon(\gamma_1)\log_2(1/t(\gamma_1))\ s$$

$E(Z_{\gamma_1})$ tend donc vers 0 avec γ_1 et la contribution des mauvais éléments à la φ_1-mesure de Hausdorff de la trajectoire est presque sûrement nulle.

CONTRIBUTION DES BONS ELEMENTS.

Remarquons que les bons éléments sont en nombre fini puisqu'en particulier ils sont touchés par le processus avant l'instant s.

A tout bon élément $I(x_k,\gamma_1)$ on associe l'intervalle $I(x_k,2a_k)$, où a_k est associé à x_k par la définition, qui contient à la fois $I(x_k,\gamma_1)$ et $I(Y_{S_k},a_k)$. On suppose qu'on a une procédure de choix parmi tous les a_k vérifiant cette propriété. Ces intervalles étant en nombre fini on peut les classer par ordre décroissant et en commençant par le plus grand, éliminer ceux qui sont recouverts par un intervalle de taille plus grande. Par ce procédé, on retient des intervalles sélectionnés $I(x_k,2a_k)$ tels que aucun point de la trajectoire n'appartienne à plus de 2 intervalles sélectionnés. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des indices des intervalles sélectionnés

$$\sum_{k\in\mathcal{B}} \varphi_1(2a_k) \leq 4 \sum_{k\in\mathcal{B}} \varphi_1(a_k) \leq \frac{4}{\xi} \sum_{k\in\mathcal{B}} T^s_{I(Y_{S_k},a_k)}(S_k)\ .$$

On pose $C_{40} = \frac{16}{\xi}$. La contribution des bons éléments à la φ_1-mesure de Hausdorff de la trajectoire est majorée par $C_{40}.s$ presque sûrement.

CHAPITRE 5

φ_2 - MESURE DE HAUSDORFF DE LA TRAJECTOIRE DU PROCESSUS SYMETRIQUE A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS ET STATIONNAIRES (Y_t) JUSQU'A L'INSTANT s POUR $\varphi_2(a)=v^1(a)\log\log(1/v^1(a))$

Soit $\varphi_2^{(s)}(a) = v^s(a)\log_2(1/_{v^s(a)})$; $\varphi_2^{(1)} = \varphi_2$.

Le but de ce chapitre est d'obtenir le théorème suivant :

5.1. THEOREME.- <u>Il existe une constante strictement positive</u> C_{50} <u>ne dépendant que de la dimension de l'espace et telle que , pour tout</u> s <u>strictement positif</u>

(i) $\Lambda^{\varphi_2^{(s)}}(R(s)) \geq C_{50}\,.s.$ p.s.

(ii) $\Lambda^{\varphi_2}(R(s)) \geq C_{50}\,.s.$ p.s. <u>pour</u> s <u>inférieur à</u> 1 .

La démarche suivie, pour démontrer le théorème 5.1, sera analogue à celle qui a mené à la démonstration du théorème 4.1. C'est ainsi que l'on démontrera successivement une majoration exponentielle :

5.2 THEOREME.-

$$P\{T_a^s \geq \lambda\, v^s(a)\} \leq 2\, e^{-\frac{\lambda}{6}}$$

<u>où</u> a <u>et</u> λ <u>sont des nombres réels strictement positifs</u>

et une majoration d'une limite supérieure :

5.3. - THEOREME . Il existe une constante strictement positive C_{51} et universelle telle que

$$\limsup_{a \to 0^+} \frac{T_a^s}{v^s(a) \log_2 (1/v^s(a))} \leq C_{51} \quad \text{p.s.}$$

La démonstration du théorème 5.2. nécessite deux lemmes 5.4 et 5.5.

Les théorèmes 5.2 et 5.3 ainsi que les lemmes 5.4 et 5.5 seront démontrés avec 1 à la place de s , ce qui n'est aucunement une restriction.

5.4. - LEMME .

$$E((T_a^1)^n) \leq n! \, [E(T_{2a}^1)]^n$$

(Pour la démonstration, le lecteur pourra se reporter à [8] , page 271.)

5.5. - LEMME .

$$v^1(2I) \leq 3 \, v^1 \, (I) \quad \text{où} \quad I = [-a, +a]$$

5.6. - Démonstration du théorème 5.2.

Il résulte des lemmes 5.4 et 5.5 que :

$$\frac{E((T_a{}^1)^n)}{n!} \leq [E(T_{2a}{}^1)]^n \leq 3^n \, [E(T_a{}^1)]^n = 3^n \, (v^1(a))^n$$

Posons $S = \dfrac{T_a{}^1}{v^1(a)}$;

L'inégalité de Markov : $P\{\xi \geq \mu\} \leq \dfrac{E(\xi)}{\mu}$ appliquée à $\xi = e^{tS}$ et $\mu = e^{t\lambda}$, où t et λ sont des nombres positifs montre que :

$$P\{S \geq \lambda\} \leq \frac{E(e^{tS})}{e^{t\lambda}}$$

D'autre part $\frac{E(S^n)}{n!} \leq 3^n$ implique $E(e^{tS}) \leq \frac{1}{1-3t}$

En faisant $t = \frac{1}{6}$ on obtient ainsi le résultat cherché :

$$P\{S \geq \lambda\} = P\{T_a^{\ 1} \geq \lambda\ v^1(a)\} \leq 2\ e^{-\frac{\lambda}{6}}$$

5.7. - Démonstration du théorème 5.3.

On utilise le théorème 5.2 et le lemme de Borel-Cantelli appliqués aux évènements $E_k = \{T^1_{a_k} \geq 7\ v^1(a_k)\log_2(1/v^1(a_k))\}$ où a_k est une suite de réels définis par $v^1(a_k) = e^{-k}$; et on montre ainsi que $C_{51} = 7.e.$

5.8. - Démonstration du théorème 5.1.

i) On utilisera un lemme démontré par C.A. Rogers et S.J. Taylor [11] adapté pour la circonstance :

LEMME . Soit f une fonction additive d'ensemble, positive et finie sur les boréliens d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

Soit g une fonction continue positive croissante telle que $g(0) = 0$. Pour tout entier naturel p , on note $\mathcal{M}_p$ la partition de $\mathbb{R}$ en intervalles semi-ouverts de longueur 2^{-p} , l'un d'entre eux étant centré en 0 ; soit $I_p(x)$ l'intervalle de $\mathcal{M}_p$ contenant un point x donné .

Pour k réel positif strictement on définit :

$$J_k = \{x \in \mathbb{R} : \limsup_{p \to +\infty} \frac{f(I_p(x))}{g(2^{-p})} > k\}$$

Alors il existe une constante C_{52} strictement positive, ne dépendant que de la dimension de l'espace et telle que quelque soit le borélien B vérifiant $B \cap E_k = \emptyset$, on ait

$$f(B) \leq k.C_{52}.\Lambda^g(B) .$$

On utilise ce lemme en prenant $g(a) = \varphi_2^s(a) = v^s(a) \log_2 (1/v^s(a))$ et comme fonction f l'image de la mesure de Lebesgue μ_L sur $R(s)$ par (Y_t). Autrement dit pour $A \subset R(s)$ $f(A) = \mu_L \{t \in [0,s] : Y_t \in A\} = T_A^s$ donc $f(R(s)) = s$.

Le théorème 5.3 implique que l'ensemble $R(s)$ est disjoint d'un J_{k_0} pour k_0 supérieur à C_{51}. Le lemme 5.8 montre donc que $\Lambda^{\varphi_2^s}(R(s)) \geq \frac{s}{k_0 C_{52}}$ et le théorème 5.1 i) est ainsi démontré pour une constante strictement positive C_{50} inférieure ou égale à $\frac{1}{k_0 C_{52}}$.

ii) C'est une conséquence évidente de i).

CHAPITRE 6

COMPARAISON DE LA φ_1 ET DE LA φ_2-MESURE DE HAUSDORFF DE LA TRAJECTOIRE DU PROCESSUS SYMETRIQUE A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS ET STATIONNAIRES (Y_t) JUSQU'A L'INSTANT s.

Au chapitre 4 nous avons montré qu'il existe une constante strictement positive C_{40} telle que, presque sûrement, $\Lambda^{\varphi_1}(R(s)) \leq C_{40}\, s$ pour $\varphi_1(a) = t(a)\log_2(1/t(a))$. Au chapitre 5 nous avons montré qu'il existe une constante strictement positive C_{50} telle que, presque sûrement, $\Lambda^{\varphi_2}(R(s)) \geq C_{50}\, s$ pour $\varphi_2(a) = v^1(a)\log_2(1/v^1(a))$.

Naturellement, ces deux inégalités ne sont pas contradictoires ; nous avons vu en effet au chapitre 1 que $\frac{v^1(a)}{t(a)}$ était, au moins pour a assez petit, minoré par αe^{-A} (en vertu du théorème 2.1). Il existe donc une constante C_{60} strictement positive telle que

$$\Lambda^{\varphi_2}(R(s)) \geq C_{60}\, \Lambda^{\varphi_1}(R(s))$$

Le seul cas où nous pourrons conclure qu'il existe une constante strictement positive C_{61} telle que $\Lambda^{\varphi_2}(R(s)) \leq C_{61}\, \Lambda^{\varphi_1}(R(s))$ et donc que, presque sûrement $C_{50}\, s \leq \Lambda^{\varphi_2}(R(s)) \leq C_{61}\, \Lambda^{\varphi_1}(R(s)) \leq C_{61}.C_{40}s$ est celui où φ_2 est, à une constante multiplicative près, inférieure à φ_1. Ceci revient à chercher une condition sous laquelle v^1 est $O(t)$ c'est-à-dire qu'il existe une constante C_{62} strictement positive telle que $v^1(a) \leq C_{62} t(a)$. Nous démontrerons successivement un lemme et son corollaire, puis une proposition donnant une condition nécessaire. Enfin une remarque nous permettra de situer dans quel cadre cette condition, qui est en fait également suffisante, est vérifiée.

6.1. LEMME.- Il existe des constantes strictement positives C_{63} et C_{64} telles que

$$C_{63} \int_0^1 \frac{du}{1+\Psi(\frac{u}{a})} \leq v^1(a) \leq C_{64} \int_0^1 \frac{du}{1+\Psi(\frac{u}{a})}$$

où Ψ est la seconde caractéristique du processus.

6.2. COROLLAIRE.- Il existe une constante strictement positive C_{65} telle que

$$C_{65} \int_0^1 \frac{du}{1+\Gamma(\frac{a}{u})} \leq v^1(a)$$

6.3. PROPOSITION.- Soit $\mathcal{H}_\theta$ l'hypothèse : il existe un nombre θ appartenant à $]0,1[$ des nombres D, $\epsilon_0 \geq 1$, $T_0 > 1$ tels que

$$\Gamma(Ta) \geq D\, T^{-\theta}\, \Gamma(a) ,$$

dès que T est supérieur à T_0 et $Ta \leq \epsilon_0$

(i) si l'hypothèse $\mathcal{H}_\theta$ est vérifiée, on peut trouver une constante C_{66} strictement positive et un nombre $a_0 > 0$ tels que

$$\int_0^1 \frac{du}{1+\Gamma(\frac{a}{u})} \leq C_{66}\, t(a) \quad \text{dès que} \quad a \leq a_0$$

(ii) si l'hypothèse $\mathcal{H}_\theta$ n'est pas vérifiée, $v^1(a)$ ne peut pas être un $O(t(a))$ c'est-à-dire que l'on ne peut pas trouver de constante strictement positive C telle que $v^1(a) \leq C\, t(a)$ quand a tend vers 0, autrement dit

$$\limsup_{a \to 0^+} \frac{v^1(a)}{t(a)} = +\infty$$

6.4. Remarque.

Un PAI symétrique qui n'est pas de sauts purs et qui vérifie la condition $\mathcal{H}_\theta$ est à variation bornée ; malheureusement, la réciproque n'est pas vraie et il existe des PAI à variation bornée ne vérifiant pas $\mathcal{H}_\theta$, par exemple celui qui est associé à la mesure de Lévy $\mathcal{L}(dx) = \dfrac{dx}{x^2(1+\log^2(\frac{1}{|x|}))}\, 1_{|x| < 1}$.

D'autre part, J. BRETAGNOLLE a montré que l'hypothèse $\mathcal{H}_\theta$ est suffisante pour que $v^1(a) = O(t(a))$ (article à paraître).

6.5. Démonstration du lemme 6.1.

Nous allons utiliser des arguments de transformées de Fourier. On notera $\mathcal{F}(\mu)$ la transformée de la mesure μ, $\mathcal{F}(f)$ la transformée d'une fonction f. Rappelons la formule suivante : soit μ une mesure définie sur $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathbb{L}^1$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}(\mu)(x)dx .$$

Par définition

$$v^1(a) = E\int_0^1 1_{[-a,+a]}(Y_t)dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} 1_{[-a,+a]}(x)\int_0^1 P_t(dx)dt$$

où $P_t(dx)$ est la mesure image de Y_t.

Par définition de la fonction caractéristique, $\mathcal{F}(P_t)(x) = e^{-t\Psi(x)}$; et la transformée de Fourier de la mesure $\mu(dx) = \int_0^1 P_t(dx)dt$ vaut $\mathcal{F}(\mu)(x) = \frac{1-e^{-\Psi(x)}}{\Psi(x)}$.

Considérons la fonction indicatrice $1_{[-a,+a]}(x)$. Il existe une constante strictement positive C_{67} telle que

$$[1-\frac{|x|}{a}]1_{[-a,+a]}(x) \le 1_{[-a,+a]}(x) \le C_{67}\left[\frac{\sin x/a}{x/a}\right]^2 .$$

Les fonctions encadrant cette indicatrice peuvent être considérées comme des transformées de Fourier. Ainsi, si nous posons $f_a(x) = \frac{a}{2}[1-\frac{a}{2}|x|]1_{[-\frac{2}{a},+\frac{2}{a}]}(x)$ et $h_a(x) = a\left[\frac{\sin(\frac{a}{2}x)}{\frac{a}{2}x}\right]^2$, on montre facilement que

$\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(h_a)(x) \le 1_{[-a,+a]}(x) \le C_{67}\,\mathcal{F}(f_a)(x)$ et que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} h_a(x).\frac{1-e^{-\Psi(x)}}{\Psi(x)}dx \le v^1(a) \le C_{67}\int_{\mathbb{R}} f_a(x)\,\frac{1-e^{-\Psi(x)}}{\Psi(x)}dx .$$

Or $h_a(x) \geq a.1_{[-\frac{1}{a},+\frac{1}{a}]}(x)$ et $f_a(x) \leq \frac{a}{2}.1_{[-\frac{1}{a},+\frac{1}{a}]}(x)$.

On peut donc encadrer $v^1(a)$ par

$$\frac{1}{2\pi}\cdot a\int_0^{1/a}\frac{1-e^{-\Psi(x)}}{\Psi(x)}dx \leq v^1(a)\leq\frac{C_{67}}{2}\cdot a\int_0^{1/a}\frac{1-e^{-\Psi(x)}}{\Psi(x)}dx$$

En considérant le développement en série entière de $\frac{1-e^{-y}}{y}$, on constate que cette fonction est multiplicativement équivalente à $\frac{1}{1+y}$, c'est-à-dire qu'il existe des constantes strictement positives C_{68} et C_{69} telles que

$$C_{68}\frac{1}{1+\Psi(x)} \leq \frac{1-e^{-\Psi(x)}}{\Psi(x)} \leq C_{69}\frac{1}{1+\Psi(x)}$$

et le lemme 6.1 est ainsi démontré pour

$$C_{63} = \frac{C_{68}}{2\pi} \quad \text{et} \quad C_{64} = \frac{1}{2}\, C_{67}.C_{69}$$

6.6. <u>Démonstration du corollaire</u> 6.2.

Elle est évidente si on se rappelle que $\Psi(u) \leq 2\Gamma(\frac{1}{u})$.

6.7 . <u>Démonstration de la proposition</u> 6. 3 i).

Nous nous plaçons dans le cas où l'hypothèse H_θ est vérifiée et choisissons un nombre réel T supérieur à T_0 et tel que $DT^{1-\theta} > 1$.

Pourvu que a soit inférieur à a_0 assez petit, on peut imposer de plus que T, pour un entier k_0 dépendant de a vérifie $T^{k_0+1}a = 1$.

$$\int_0^1\frac{du}{1+\Gamma(\frac{a}{u})} = \int_0^a\frac{du}{1+\Gamma(\frac{a}{u})} + \int_a^1\frac{du}{1+\Gamma(\frac{a}{u})} = I_1 + I_2$$

L'intégrale I_1 est évidemment majorée par a et les conditions imposées entraînent que $a\Gamma(a) \leq \Gamma(1)(DT^{1-\theta})^{-(k_0+1)}$ et donc que $a = O(t(a))$.

$$I_2 = \sum_{k=0}^{k_0}\int_{T^{-k-1}}^{T^{-k}}\frac{du}{1+\Gamma(\frac{a}{u})} \leq \sum_{k=0}^{k_0} T^{-k}(1-\frac{1}{T})\frac{1}{\Gamma(T^{k+1}a)}$$

L'hypothèse $\mathcal{H}_\theta$ appliquée k+1 fois, implique

$$\Gamma(T^{k+1}a) \geq D^{k+1}\; T^{-(k+1)\theta}\Gamma(a)$$

$$I_2 \leq \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{k_0} T^{-k}(1-\frac{1}{T})D^{-(k+1)}T^{-(k+1)\theta}$$

$$\leq t(a).\; D^{-1}T^{\theta}(1-\frac{1}{T}) \;.\; \sum_{k\geq 0} \quad (DT^{1-\theta})^{-k}$$

Cette dernière série étant convergente, l'intégrale I_2 est également un $O(t(a))$ et la proposition 6.3 i) est ainsi démontrée.

6.8. Démonstration de la proposition 6.3 ii).

Montrons que la condition $\mathcal{H}_\theta$ est nécessaire pour que $v^1(a)$ soit un $O(t(a))$. Considérons l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ suivante

$$M = \lim_{\substack{T_0 \to +\infty \\ \epsilon_0 \to 0^+}} \quad \inf_{\substack{T\geq T_0 \\ Tx\leq \epsilon_0}} \frac{T\Gamma(Tx)}{\Gamma(x)} < +\infty \qquad (\mathcal{H}_0)$$

L'hypothèse $\mathcal{H}_0$ est le contraire de l'hypothèse $\mathcal{H}_\theta$.

Posons

$$\mathcal{J}(T_0,\epsilon_0) = \inf_{\substack{T\geq T_0 \\ Tx\leq \epsilon_0}} \frac{T\Gamma(Tx)}{\Gamma(x)}$$

Lorsque $\mathcal{H}_\theta$ est vérifiée, on obtient non $\mathcal{H}_0$, le contrairë de l'hypothèse $\mathcal{H}_0$.
En effet, $\mathcal{J}(T_0,\epsilon_0)$ est supérieur à $DT_0^{1-\theta}$ qui tend vers plus l'infini avec T_0.

Supposons que l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ n'est pas vérifiée et montrons qu'alors l'hypothèse $\mathcal{H}_\theta$ est vérifiée. En effet, pour tout M', il existe des nombres T_1 et ϵ_1 tels que pour tout T et tout x vérifiant $T\geq T_1$ et $Tx\leq\epsilon_1$ on a

$$\frac{T\Gamma(Tx)}{\Gamma(x)} \geq M'$$

On choisit $M' = 2$ et on peut imposer à T_1 d'être strictement supérieur à 2 puisque $\mathcal{J}(T_0, \epsilon_0)$ est une fonction croissante de T_0 ; de sorte qu'il existe un nombre α appartenant à $]0,1[$ tel que $M' = 2 = T_1^{\alpha}$. La relation ci-dessus implique que pour tout x tel que $T_1 x \leq \epsilon_1$

$$\frac{T_1 \Gamma(T_1 x)}{\Gamma(x)} \geq T_1^{\alpha}$$

autrement dit, dès que $T_1 x \leq \epsilon_1$

$$\Gamma(T_1 x) \geq T_1^{-(1-\alpha)} \Gamma(x) \quad . \tag{6.9}$$

Soit donc $T \geq T_1$ et x tel que $Tx \leq \epsilon_2 = \frac{\epsilon_1}{T_1}$. Il existe un entier k tel que $T_1^k < T \leq T_1^{k+1}$; comme $Tx \leq \frac{\epsilon_1}{T_1}$, $T_1^{k+1} x$ est inférieur à ϵ_1 et on peut appliquer la relation 6.9 successivement

$$\begin{aligned} \Gamma(Tx) &\geq \Gamma(T_1^{k+1} x) \geq T_1^{-(k+1)(1-\alpha)} \Gamma(x) \\ &\geq T_1^{-(1-\alpha)}\, T^{-(1-\alpha)}\, \Gamma(x) \,. \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu l'hypothèse $\mathcal{H}_\theta$ pour $\theta = 1 - \alpha$ et $D = T_1^{-(1-\alpha)}$.

6.10 LEMME.- <u>Soit</u> α_0 <u>défini par</u> $\Gamma(\alpha_0) = 1$ <u>et</u> C <u>par</u> $4C = C_{65}$. <u>Supposons qu'il existe deux nombres réels</u> S <u>et</u> a <u>tels que</u> $Sa \leq \alpha_0$ <u>et pour tout</u> s <u>appartenant à l'intervalle</u> $[1,S]$, $\frac{\Gamma(sa)}{\Gamma(a)} \leq \frac{2}{s}$.

<u>Alors</u>

$$\frac{v^1(a)}{t(a)} \geq C \log S$$

<u>Démonstration du lemme</u>.

On remarque que $v^1(a) \geq C_{65} \int_1^S \frac{dt}{t^2(1+\Gamma(at))}$ et que $\Gamma(at)$ est une fonction décroissante de t .

6.11. Pour démontrer 6.3. ii) compte tenu du lemme 6.10 , il suffit de montrer que sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0$, il existe deux suites $s^{(k)}$, $a^{(k)}$ telles que :

1°) $\forall s \in [1, s^{(k)}]$ $\dfrac{\Gamma(sa^{(k)})}{\Gamma(a^{(k)})} \leq \dfrac{2}{s}$

2°) la suite $s^{(k)}$ tend vers plus l'infini avec k

3°) la suite $s^{(k)}a^{(k)}$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

En effet, la condition 3°) garantit que $s^{(k)}a^{(k)}$ est inférieur à α_0 à partir d'un certain rang et 2°) garantit que $\dfrac{v^1(a^{(k)})}{t(a^{(k)})}$ tend vers plus infini avec k , et comme $a^{(k)}$ tend vers 0 on a bien

$$\limsup_{a \to 0^+} \frac{v^1(a)}{t(a)} = +\infty$$

Construisons nos suites $s^{(k)}$ et $a^{(k)}$.

Pour k assez grand, si $\epsilon_0 \leq k^{-2}$ et $T_0 \geq e^k$

$$\inf_{\substack{T \geq T_0 \\ Tx \leq \epsilon_0}} \frac{T\Gamma(Tx)}{\Gamma(x)} \leq 2M$$

où M est défini par l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ au paragraphe 6.8. Il existe alors un couple T, a (ne lui mettons pas l'indice k pour alléger l'écriture) qui satisfait $Ta \leq k^{-2}$ (et donc $kTa \leq k^{-1}$) , $T \geq e^k$ et $\dfrac{\Gamma(Ta)}{\Gamma(a)} \leq \dfrac{3M}{T}$. Définissons par récurrence la suite suivante : $a_0 = a$, si $a_m < +\infty$, $a_{m+1} = \inf\{b \geq a_m \mid \dfrac{\Gamma(b)}{\Gamma(a_m)} > 2\dfrac{a_m}{b}\}$. Comme

$\dfrac{a_{m+1}}{a_m} \geq 2$, à cause de la décroissance de Γ, l'entier n défini comme le premier indice m tel que $a_m \geq Ta$ est fini. Nous distinguerons deux cas.

$\boxed{1^{er}\ \text{cas}}$: Supposons que $a_n > kTa$ (ce cas contient celui où l'un des a_m est infini).

Prenons $a^{(k)} = a_{n-1}$ et $S^{(k)}a^{(k)} = kTa$. On a

$$S^{(k)} = \frac{S^{(k)}a^{(k)}}{a^{(k)}} = \frac{kTa}{a_{n-1}} \geq \frac{kTa}{Ta} = k$$

qui tend vers l'infini avec k et $S^{(k)}a^{(k)} = kTa \leq k^{-1}$ qui tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini. La condition 1°) est réalisée par construction.

$\boxed{2^{ème}\ \text{cas}}$: Supposons que $a_n \leq kTa$. Montrons que $2^n \leq 3kM$. En effet

$$2^n \frac{a}{a_n} = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{\Gamma(a_{m+1})}{\Gamma(a_m)} = \frac{\Gamma(a_n)}{\Gamma(a)} \leq \frac{\Gamma(Ta)}{\Gamma(a)} \leq \frac{3M}{T}$$

la première inégalité résultant de la monotonie de Γ puisque $a_n \geq Ta$. De $a_n \leq kTa$, on tire bien $2^n \leq 3kM$. D'autre part

$$\sum_{m=0}^{n-1} \log(\frac{a_{m+1}}{a_m}) = \log(\frac{a_n}{a}) \geq \log T$$

puisque $a_n \geq Ta$, soit encore $\sup\limits_{0 \leq m \leq n-1} \log(\frac{a_{m+1}}{a_m}) \geq \frac{\log T}{n}$ ce qui, compte tenu de la précédente, donne

$$\sup_{0 \leq m \leq n-1} \log(\frac{a_{m+1}}{a_m}) \geq \frac{\log T \log 2}{\log(3kM)}$$

Choisissons comme $a^{(k)}$ et $S^{(k)}a^{(k)}$ les extrémités de l'intervalle qui réalise ce sup.

On a bien

$$\log(S^{(k)}) \geq \frac{\log T \log 2}{\log(3kM)} \geq \frac{k.\log 2}{\log(3kM)}$$

et donc $S^{(k)}$ tend vers plus l'infini avec k tandis que $S^{(k)}a^{(k)} \leq a_n \leq kTa \leq k^{-1}$ tend vers 0. La condition 1°) est réalisée par construction. La démonstration est terminée.

CHAPITRE 7

CONCLUSION

7.1. THEOREME.- Considérons un processus symétrique à accroissements indépendants et stationnaires qui n'est pas de sauts purs. Lorsque $v^1(a)$ est un $O(t(a))$, il existe des constantes strictement positives C_{70}, C_{71}, C_{72} telles que, presque sûrement

$$\Lambda^{\varphi_2}(R(s)) = C_{70}\, s \leq C_{72}\, \Lambda^{\varphi_1}(R(s)) = C_{72}.C_{71}\, s$$

7.2 Montrons tout d'abord que, sous ces conditions, il existe une constante C_{71}, d'ailleurs inférieure à C_{40}, et telle que presque sûrement $\Lambda^{\varphi_1}(R(s))=C_{71}.s$.

Nous n'avons pû trouver dans la littérature de démonstration du fait que, sous certaines hypothèses, $\Lambda^{\varphi}(R(s)) = c.s$. Pourtant ce résultat est souvent employé. Pour être complets, nous le démontrons dans le cas qui nous intéresse.

Définissons $R(a,b)$ pour tout a et tout b vérifiant $0<a<b$ comme l'image de l'intervalle $[a,b[$ par $t\to Y_t$. Il nous suffit de montrer que, pour tous t_0 et s_0 strictement positifs, $\Lambda^{\varphi_1}(R(0,t_0)\cap R(t_0,t_0+s_0)) = 0$. En effet ceci implique que

$$\begin{aligned}\Lambda^{\varphi_1}(R(0,t_0+ s_0)) &= \Lambda^{\varphi_1}(R(0,t_0)\cup R(t_0,t_0+ s_0))\\ &= \Lambda^{\varphi_1}(R(0,t_0))+\Lambda^{\varphi_1}(R(t_0,t_0+ s_0)).\end{aligned}$$

Le processus Y_t étant à accroissements indépendants et stationnaires $\Lambda^{\varphi_1}(R(t_0,t_0+ s_0)) = \Lambda^{\varphi_1}(R(0,s_0))$; nous aurons ainsi montré que

$\Lambda^{\varphi_1}(R(t_0+s_0)) = \Lambda^{\varphi_1}(R(t_0)) + \Lambda^{\varphi_1}(R(s_0))$ pour tous t_0 et s_0 strictement positifs. Alors $Z_t = \Lambda^{\varphi_1}(R(t))$, qui est un processus croissant, vérifie $Z_{t+s} - Z_t$ indépendant de Z_t et de même loi que Z_s. C'est donc un P.A.I. croissant. D'autre part $Z_t \le C_{40} t$. Donc Z_t est une translation.

Plaçons nous à un instant t_0 fixé et considérons le processus retourné $Y'_h = Y_{t_0-h}$ pour $0 < h \le t_0$. C'est un PAI qui n'est plus régularisé du bon côté puisqu'il est continu à gauche et pourvu de limites à droite. Mais ceci n'a pas d'importance pour le recouvrement de sa trajectoire et ne modifie en rien la mesure de Hausdorff de cette dernière. Soit Y''_s le processus $Y''_s = Y_{t_0+s}$ défini pour $s \ge 0$. Les processus Y'_h et Y''_s sont de même loi, celle de Y_t, et à accroissements indépendants, indépendants l'un de l'autre. Nous considérons $R(0,t_0)$ comme l'image de $]0,t_0]$ par $h \to Y'_h$ et $R(t_0+s_0)$ comme l'image de $[0,s_0[$ par le processus Y''_s. Pour simplifier les notations, posons $E = R(t_0, t_0+s_0)$ et $F = R(0,t_0)$. Pour montrer que $\Lambda^{\varphi_1}(E \cap F)$ est presque sûrement nulle, nous utiliserons une méthode analogue à celle de la démonstration du théorème 4.1.

Considérons E et le processus Y''_s. E peut être recouvert par des intervalles fermés $I_k = I(x_k, \gamma_1)$ tels que $x_0 = Y''_0 = Y_{t_0}$ et les intervalles semi-ouverts $[x_k - \gamma_1, x_k + \gamma_1[$ forment une partition de $\mathbb{R}$. Soit C_{γ_1} l'ensemble des indices des intervalles I_k touchés par le processus Y''_s avant l'instant s_0.

Parmi eux, on distingue (définitions page 21) les bons et les mauvais éléments. On sait que la contribution des mauvais éléments à la mesure de Hausdorff de E est presque sûrement nulle. A chaque bon élément I_k, on associe un intervalle $I(x_k, 2a_k)$ où a_k est associé à x_k par la définition des bons éléments. Comme au chapitre 4, on sélectionne des intervalles $I(x_k, 2a_k)$ recouvrant E et tels qu'aucun point n'appartienne à plus de 2 intervalles sélectionnés. Soit C'_{γ_1} l'ensemble des indices des intervalles ainsi sélectionnés. On sait qu'il existe une constante strictement positive C_{73} telle que

$$\sum_{k \in C'_{\gamma_1}} \varphi_1(2a_k) \le C_{73}\, s_0 .$$

Soit K_α le compact défini comme l'ensemble des points x tels que $|Y_{t_0} - x| \leq \alpha$.

$$\Lambda^{\varphi_1}(E \cap F) \leq \Lambda^{\varphi_1}(E \cap F \cap K_\alpha) + \Lambda^{\varphi_1}(E \cap F \cap K_\alpha^c)$$

Parmi les intervalles $I(x_k, 2a_k)$, où k appartient à $C'^{*}_{\gamma_1}$, retenons seulement ceux qui peuvent être nécessaires au recouvrement de $E \cap K_\alpha^c$ c'est-à-dire ceux dont le centre x_k vérifie $|Y_{t_0} - x_k| > \alpha - 2\delta_1$. (La quantité $\alpha - 2\delta_1$ est positive dès que δ_1 est assez petit, ce qui est le cas qui nous intéresse). Soit C''_{γ_1} l'ensemble de leurs indices ; ces intervalles recouvrent certainement $E \cap F \cap K_\alpha^c$. On appellera C'''_{γ_1} l'ensemble des indices k de C''_{γ_1} des intervalles touchés par le processus Y'_h avant l'instant t_0 . Soit J_k l'événement : "le temps d'entrée du processus Y'_h dans $I(x_k, 2a_k)$ $(k \in C''_{\gamma_1})$ est inférieur à t_0 ". Si nous notons $\Omega'(\omega' \in \Omega')$, respectivement $\Omega''(\omega'' \in \Omega'')$, l'espace probabilisé sur lequel est défini Y', respectivement Y'' , nous pouvons écrire

$$\sum_{k \in C'''_{\gamma_1}} \varphi_1(2a_k)(\omega', \omega'') = \sum_{k \in C''_{\gamma_1}} \varphi_1(2a_k)(\omega') 1_{J_k}(\omega', \omega'')$$

en prenant l'espérance des deux membres sur $\Omega' \times \Omega''$

$$E\Big(\sum_{k \in C'''_{\gamma_1}} \varphi_1(2a_k)(\omega, \omega')\Big) \leq C_{73}\, s_0 \sup_{k \in C''_{\gamma_1}} P(J_k)$$

Nous allons montrer que l'expression $\sup_{k \in C''_{\gamma_1}} P(J_k)$ qui dépend de δ_1 , par l'intermédiaire de γ_1 , et de α , tend vers 0 avec δ_1 quel que soit α . On pourra alors choisir une suite $\delta_1(j)$ décroissant vers 0 et telle que $\sum_{k \in C'''_{\gamma_1(j)}} \varphi_1(2a_k)$ tende vers 0 presque sûrement lorsque $\delta_1(j)$ tend vers 0 . Il est évident qu'alors $\Lambda_{\delta_1}^{\varphi_1}(E \cap F \cap K_\alpha^c)$, qui est l'inf de toutes les sommes de ce type, tend presque sûrement vers 0 avec δ_1 .

7.3. LEMME.- Soit I un intervalle symétrique, $\mathcal{J}(x+I)$ le temps d'entrée dans $x+I$ d'un processus symétrique à accroissements indépendants et stationnaires et à variation bornée.

Quels que soient les nombres réels α et t_0 strictement positifs

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\substack{|x| > \alpha - \delta \\ d(I) \le \delta}} P\{\mathcal{J}(x+I) \le t_0\} = 0$$

Nous sommes bien dans les conditions d'application du lemme puisque nous avons supposé que v^1 est un $O(t)$ ce qui implique que la condition $\mathcal{H}_\theta$ est vérifiée et que le processus Y_t est à variation bornée.

Démonstration du lemme 7.3.

Supposons qu'il existe un réel ρ strictement positif, des suites x_k et δ_k de nombres réels et une suite I_k d'intervalles symétriques vérifiant $|x_k| > \alpha - \delta_k$ et $d(I_k) \le \delta_k$ où δ_k décroît vers 0 lorsque k tend vers l'infini, et tels que $P\{\mathcal{J}(x_k + I_k) \le t_0\} \ge \rho > 0$ pour tout k. Or, il est évident que $P\{\mathcal{J}([-a,+a]^c) \le t_0\}$ tend vers 0 lorsque a tend vers l'infini. Il existe donc un nombre réel positif a_0 tel que $P\{\mathcal{J}([-a_0,+a_0]^c) \le t_0\} < \rho$. A partir d'un certain rang (tel que $\delta_k \le 2a_0$), les x_k appartiennent donc au compact $[-2a_0, 2a_0]$ et on peut extraire une sous-suite x'_k convergeant vers un point x du compact. On définit pour tout k l'intervalle symétrique I'_k comme le plus petit intervalle tel que $x+I'_k$ contienne $x'_k + I_k$. On peut imposer, quitte à se limiter à une sous-suite de x'_k, que le diamètre de I'_k tende vers 0 lorsque k tend vers l'infini. Le temps d'entrée $\mathcal{J}(x+I'_k)$ tend alors vers $\mathcal{J}(\{x\})$, temps d'entrée du point x. D'autre part, $\mathcal{J}(x'_k + I_k)$ est au moins égal à $\mathcal{J}(x+I'_k)$. Il en résulte que

$$\lim_{k \to +\infty} P\{\mathcal{J}(x+I'_k) \le t_0\} \ge \lim_{k \to +\infty} P\{\mathcal{J}(x'_k + I_k) \le t_0\} \ge \rho > 0$$

Or $P\{\mathcal{J}(\{x\}) \leq t_0\} \geq \lim_{k \to +\infty} P\{\mathcal{J}(x + I'_k) \leq t_0\}$. La probabilité de toucher le point $\{x\}$ avant l'instant t_0 est donc strictement positive, ce qui est impossible pour un processus symétrique à accroissements indépendants et stationnaires et à variation bornée [2]. Ceci termine la démonstration du lemme 7.3.

7.4. <u>Démonstration du théorème</u> 7.1.

Il résulte du lemme 7.3. que $\Lambda^{\varphi_1}(E \cap F \cap K_\alpha^c)$ est presque sûrement nul quel que soit α strictement positif.

Maintenant $\Lambda^{\varphi_1}(E \cap F \cap K_\alpha)$ est certainement majorée par $\Lambda^{\varphi_1}(E \cap K_\alpha)$. Or sur toute trajectoire $E \cap K_\alpha$ tend vers $\{Y_{t_0}\}$ lorsque α tend vers 0 . Donc, pour presque tout ω' (ceux pour lesquels $\Lambda^{\varphi_1}(E) < +\infty$), $\Lambda^{\varphi_1}(E \cap K_\alpha)$ tend vers $\Lambda^{\varphi_1}(\{Y_{t_0}\}) = 0$. Nous avons ainsi démontré que $\Lambda^{\varphi_1}(E \cap F)$ est presque sûrement égal à 0 et qu'il existe une constante C_{71} telle que $\Lambda^{\varphi_1}(R(s)) = C_{71} s$ presque sûrement.

Sous les hypothèses du théorème 7.1. il existe une constante strictement positive C_{72} telle que $\Lambda^{\varphi_2}(R(s)) \leq C_{72}\, \Lambda^{\varphi_1}(R(s))$. La constante C_{71} vérifie donc $C_{40} \geq C_{71} \geq C_{72} . C_{50} > 0$.

Toujours sous ces mêmes hypothèses, il existe une constante C_{70} telle que, presque sûrement $\Lambda^{\varphi_2}(R(s)) = C_{70} s$. En effet, soient

$E = R(t, t+s)$ et $F = R(0,t)$. $\Lambda^{\varphi_2}(E \cup F) = \Lambda^{\varphi_2}(E) + \Lambda^{\varphi_2}(F) - \Lambda^{\varphi_2}(E \cap F)$.

$\Lambda^{\varphi_2}(E \cap F)$ étant multiplicativement équivalent à $\Lambda^{\varphi_1}(E \cap F)$ qui est nul, est nul aussi. $\Lambda^{\varphi_2}(R(s))$ est donc aussi une fonction linéaire de s et la constante C_{70} vérifie $0 < C_{50} \leq C_{70} \leq C_{71} . C_{72}$. Ceci prouve, en passant, que $\Lambda^{\varphi_2}(R(s)) \geq C_{50} s$ pour tout s . Le théorème 7.1 est démontré.

REFERENCES

[1] J. BRETAGNOLLE — Processus à accroissements indépendants.
Lecture Notes in Math. 307 Springer Verlag, 1973.

[2] J. BRETAGNOLLE — Résultats de Kesten sur les processus à accroissements indépendants.
Lecture Notes in Math. 191 Springer Verlag, 1971.

[3] Z. CIESIELSKI and S.J. TAYLOR — First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path.
Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962), pp. 434-450.

[4] W. FELLER — An introduction to probability theory and its applications.
J. Wiley and Sons 1968 (3rd edition).

[5] Paul LEVY — La mesure de Hausdorff de la courbe du mouvement brownien.
Giorn. Ist. Ital. Attuari 16 (1953), pp. 1-37.

[6] M. LOEVE — Probability theory.
Van Nostrand Company edition 1963.

[7] M.E. MUNROE — Measure and Integration.
Addison-Wesley Publishing Company, 1971 (2nd edition).

[8] W.E. PRUITT and S.J. TAYLOR — Sample path properties of processes with stable components.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 12 (1969), pp. 267-289.

[9] D. RAY — Sojourn times and the exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion.
Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), pp. 436-444.

[10] C.A. ROGERS — Hausdorff Measures.
Cambridge University Press, 1970.

[11] C.A. ROGERS and S.J. TAYLOR — Functions continuous and singular with respect to a Hausdorff measure.
Mathematika 8 (1961), pp. 1-31.

[12] S.J. TAYLOR — The exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion.
Proc. Cambridge Phil. Soc. 60 (1964), pp. 253-258.

[13] S.J. TAYLOR — Sample path properties of a transient stable process.
J. Math. Mech. 16 (1967), pp. 1229-1246.