PAUL-ANDRÉ MEYER

Noyaux multiplicatifs

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 8 (1974), p. 290-309
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__290_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1972/73

NOYAUX MULTIPLICATIFS

par P.A.Meyer

L'exposé qui suit est inspiré par un remarquable travail de J. JACOD, qui étudie la structure d'un processus de Markov de la forme (X_t,Y_t) à valeurs dans un espace produit $E\times F$, et dont la première composante (X_t) est déjà à elle seule un processus de Markov. Le résultat principal de JACOD peut se résumer ainsi : la structure du processus (X_t,Y_t) est décrite par un "noyau multiplicatif" , qui est une sorte de fonctionnelle multiplicative du processus (X_t), à valeurs dans l'ensemble des noyaux sur F . Conditionnellement au processus (X_t), le processus (Y_t) est une sorte de processus de Markov non homogène dans le temps, dont la fonction de transition est donnée par le noyau multiplicatif. Malheureusement, les ensembles exceptionnels de mesure nulle sont placés de façon désagréable, de telle façon que nous avons dû, par deux fois,utiliser l'expression "une sorte de" dans la phrase précédente.

Une comparaison éclairera un peu la situation : la théorie de JACOD contient comme cas particulier (nous le verrons au § 3) la vieille théorie des semi-groupes subordonnés à un semi-groupe (P_t). Elle est alors assez bonne pour redonner l'existence de la fonctionnelle multiplicative correspondante, ainsi que sa propriété de Markov forte, mais non l'existence d'une version parfaite de la fonctionnelle.

Nous nous proposons ici d'exposer les résultats de JACOD dans une situation un peu plus générale (à peine : simplement nous remplaçons le produit $E\times F$ par un espace quelconque "au dessus" de E , mais les deux situations se ramènent l'une à l'autre). Nous essayons de construire la meilleure version possible du noyau multiplicatif, et cela nous entraîne dans des détails techniques pénibles. L'exposé est donc plus fatigant que celui de JACOD, dont la lecture est vivement recommandée.

I. LA THEORIE GENERALE : CAS DES PROCESSUS DE RAY

Nous considérons deux espaces <u>métriques compacts</u> E et $\bar{E}$, et une application <u>continue</u> p de E dans $\bar{E}$. Comme d'habitude en théorie des processus de Markov, nous distinguons dans les espaces d'états des points notés respectivement ∂ et $\bar{\partial}$, et nous faisons ici l'hypothèse que $p(\partial)=\bar{\partial}$.

Nous désignons par (P_t) et $(\overline{P}_t)$ deux semi-groupes de RAY markoviens sur E et $\overline{E}$ respectivement, admettant ∂ et $\overline{\partial}$ comme points absorbants. Nous supposons que (P_t) est "au dessus" de $(\overline{P}_t)$ au sens suivant

(1) Pour toute f sur $\overline{E}$, tout $x\in E$, $P_t(x,f\circ p)=\overline{P}_t(p(x),f)$.

L'hypothèse de RAY ne joue qu'un petit rôle : elle intervient surtout pour des questions de mesurabilité. Mais par ailleurs elle ne restreint pratiquement pas la généralité (cf. § 2).

Nous réalisons maintenant les deux semi-groupes sur deux espaces d' applications continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans E et $\overline{E}$ respectivement, à durée de vie. Avec les notations usuelles,

$$\Omega,\underline{\underline{F}}^o,X_t,\underline{\underline{F}}^o_t,\zeta,P^\bullet\ldots\ldots \qquad ; \qquad \overline{\Omega},\overline{\underline{\underline{F}}}^o,\overline{X}_t,\overline{\underline{\underline{F}}}^o_t,\overline{\zeta},\overline{P}^\bullet\ldots\ldots$$

sur lesquels nous faisons les hypothèses suivantes

- $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$ et $(\overline{\Omega},\overline{\underline{\underline{F}}}^o)$ sont des espaces lusiniens[1],
- pour tout $\omega\in\Omega$, l'application $p(\omega)$: $t\longmapsto p\circ X_t(\omega)$ appartient à $\overline{\Omega}$,
- $\Omega,\overline{\Omega}$ sont stables par les opérateurs de translation et de meurtre

(nous noterons ceux-ci θ_t,k_t sur les deux espaces).

Nous utiliserons systématiquement les notations suivantes : chaque fois que l'on rencontre dans une formule un point de E et un point de $\overline{E}$ désignés par une même lettre : x et $\overline{x}$ par exemple, il est entendu que $\overline{x} = p(x)$. De même pour les mesures , μ et $\overline{\mu}$ dans une formule sous-entendent que $\overline{\mu}$ est l'image $p(\mu)$ de μ . De même pour ω et $\overline{\omega}$ dans Ω et $\overline{\Omega}$. Si f est une fonction sur $\overline{E}$ (resp. $\overline{\Omega}$) nous notons aussi f (sauf danger de confusion) la fonction $f\circ p$ sur E (resp. Ω). En particulier, nous avons sur Ω des v.a. $\overline{X}_t\circ p$ notées $\overline{X}_t$, qui engendrent des tribus naturelles notées aussi $\overline{\underline{\underline{F}}}^o_t$, contenues dans les $\underline{\underline{F}}^o_t$: cela sera très commode[2].
Avec ces notations, la formule (1) s'écrit $\overline{P}_t(\overline{x},f)=P_t(x,f)$, ou simplement"$P_tf=\overline{P}_tf$ sur E" , mais cette dernière manière est vraiment trop concise.
Soulignons que les réalisations sont continues à droite, y compris en 0 : si x est un point de branchement, la loi de X_0 pour P^x est ε_xP_0. Noter que si x appartient à $\underline{\underline{D}}$, l'ensemble des points de non branchement de E, on a $\overline{x}\in\overline{\underline{\underline{D}}}$
On déduit immédiatement de l'hypothèse (1) la propriété plus forte

(2) Pour tout $x\in E$, l'image par p de P^x est $\overline{P}^{\overline{x}}$.

---

1. Il semble que la bonne hypothèse serait que ce soient des complémentaires d'analytiques, mais je n'ai pas eu le courage d'écrire les détails.
2. Dans des notations comme $\overline{P}^{\overline{\mu}}$, nous écrivons simplement $\overline{P}^{\mu}$ (mais $\overline{P}^\bullet$, $\overline{E}^\bullet$).

CONSTRUCTION D'UNE DESINTEGRATION BRUTE

L'espace $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$ étant supposé lusinien, il peut se plonger comme sous-ensemble borélien dans un espace métrique compact $\check{\Omega}$. En fait, nous utiliserons un peu plus loin un espace compact bien défini, que nous allons décrire à présent.

Soit $\underline{\underline{C}}_0(E)$ l'ensemble des fonctions f continues sur E, nulles au point ∂ , et soit $\underline{\underline{H}}$ l'ensemble des fonctions de la forme

(3) $$I_{f,s,t}(\omega) = \int_s^t f\circ X_u(\omega)du \qquad f\in\underline{\underline{C}}_0(E),\ s\leq t$$

Cet ensemble est séparable pour la convergence uniforme, stable par les opérateurs de translation ($I_{f,s,t}\circ\theta_r = I_{f,s+r,t+r}$) et de meurtre ($I_{f,s,t}\circ k_r = I_{f,s\wedge r,t\wedge r}$) . Nous noterons $\underline{\underline{U}}_0$ l'algèbre engendrée par $\underline{\underline{H}}$,et $\underline{\underline{U}}$ l'algèbre à unité $\mathbb{R}.1+\underline{\underline{U}}_0$. Leurs fermetures pour la convergence uniforme sont notées $\underline{\underline{U}}_0$,$\underline{\underline{U}}^-$. Noter les propriétés suivantes

- $\underline{\underline{U}}_0$,$\underline{\underline{U}}$... sont séparables pour la convergence uniforme, séparent Ω, sont stables pour les opérateurs de translation et de meurtre
- Si $g\in\underline{\underline{U}}^-$, les applications $t\mapsto g\circ\theta_t$, $t\mapsto g\circ k_t$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ pour la convergence uniforme, et convergent vers g uniformément lorsque $t\to 0$ et $t\to\infty$ respectivement.

Nous notons $\check{\Omega}$ le compactifié de Ω relativement à $\underline{\underline{U}}$. D'après le théorème de STONE, la trace de $\underline{\underline{C}}(\check{\Omega})$ sur Ω est $\underline{\underline{U}}^-$. La tribu induite sur Ω par $\underline{\underline{B}}(\check{\Omega})$ est $\underline{\underline{F}}^\circ_V$, et le caractère lusinien de Ω entraîne que Ω est borélien dans Ω .
La théorie de la désintégration des mesures nous donne directement le résultat suivant:

PROPOSITION 1. Pour tout couple $(x,\overline{w})$, on peut choisir une mesure $M^x(\overline{w},.)$ sur Ω, de telle sorte que les propriétés suivantes soient satisfaites

1) $M^x(\overline{w},.)$ est une loi de probabilité, ou $M^x(\overline{w},.) = 0$. Pour tout $\overline{w}$ elle est portée par $\{\ \omega\ :\ \overline{\omega}=\overline{w}\ \}$.
2) L'application $(x,\overline{w})\mapsto M^x(\overline{w},f)$ est $\underline{\underline{B}}(E)\times\overline{\underline{\underline{F}}}^\circ$-mesurable pour toute f $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable positive.
3) On a pour tout x

(4) $$P^x(d\omega) = \int_{\overline{\Omega}} M^x(\overline{w},d\omega)\overline{P}^x(d\overline{w})$$

En fait, nous ne travaillerons guère sur $\overline{\Omega}$, mais plutôt sur Ω . Aussi poserons nous pour $\omega\in\Omega$, conformément à nos notations

(5) $$M^x(\omega,.) = M^x(\overline{\omega},\ .)$$

La fonction $(x,\omega)\longmapsto M^x(\omega,.)$ est $\underline{\underline{B}}(E)\times\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable sur Ω. Dans tous les cas, les espérances par rapport à $M^x(\omega,.),M^x(\overline{\omega},.)$ seront notées $M^x_\omega[\ldots]$, $M^x_{\overline{\omega}}[\ldots]$.

Une autre notation :

(6) $$N(\omega,d\omega') = M^{X_0(\omega)}(\omega,d\omega')$$

C'est un noyau de $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ_0\vee\overline{\underline{\underline{F}}}^\circ)$ dans $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$. Pour tout ω, la mesure $N(\omega,.)$ est portée par $\{ w : \overline{w}=\overline{\omega} \}$. Enfin, pour toute loi initiale μ et toute f $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable positive

(7) $$E^\mu[f|\underline{\underline{F}}^\circ_0\vee\overline{\underline{\underline{F}}}^\circ] = N(.,f) \quad P^\mu\text{-p.s.}$$

La proposition suivante contient les deux propriétés fondamentales de la désintégration.

PROPOSITION 2. a) <u>Si</u> c <u>est</u> $\underline{\underline{F}}^\circ_t$<u>-mesurable positive</u>, <u>on a pour toute loi initiale</u> μ

(8) $$E^\mu[c|\underline{\underline{F}}^\circ_0\vee\overline{\underline{\underline{F}}}^\circ_t] = N(.,c) \quad P^\mu\text{-}\underline{\text{p.s.}}$$

<u>autrement dit</u>, $N(.,c)$ <u>est</u> P^μ-<u>p.s. égale à une fonction</u> $\underline{\underline{F}}^\circ_0\vee\overline{\underline{\underline{F}}}^\circ_t$<u>-mesurable</u>.

b) <u>Si</u> c <u>est</u> $\underline{\underline{F}}^\circ$<u>-mesurable positive</u>, <u>et</u> T <u>est un temps d'arrêt de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^\circ_{t+})$, <u>on a</u> P^μ-<u>p.s. sur</u> $\{T<\infty\}$

(9) $$E^\mu[c\circ\Theta_T|\underline{\underline{F}}^\circ_{T+}\vee\overline{\underline{\underline{F}}}^\circ] = N(\Theta_T.,c) \quad P^\mu\text{-}\underline{\text{p.s}}.$$

[la propriété b) est plus importante que a)].

DEMONSTRATION. Il nous suffit de démontrer (8) lorsque μ est de la forme ε_x, où x n'est pas un point de branchement : (8) s'écrit alors, $\underline{\underline{F}}^\circ_0$ étant dégénérée

(10) $$E^x[c|\overline{\underline{\underline{F}}}^\circ_t] = E^x[c|\overline{\underline{\underline{F}}}^\circ] \quad P^x\text{-p.s.}$$

Notons m le premier membre : il s'agit de vérifier que pour toute fonction h $\overline{\underline{\underline{F}}}^\circ$-mesurable positive on a $E^x[ch]=E^x[mh]$. Par classes monotones on se ramène au cas où h est de la forme $a.b\circ\Theta_t$, où a est $\overline{\underline{\underline{F}}}^\circ_t$-mesurable et b est $\overline{\underline{\underline{F}}}^\circ$-mesurable. Soit B la fonction $\overline{E}^\bullet[b]$ sur $\overline{E}$, ou sur E suivant nos conventions de notations. L'hypothèse fondamentale sous la forme (2) entraîne que

$$\text{sur } \Omega \quad E[b\circ\Theta_t|\underline{\underline{F}}^\circ_t]=E^{X_t}[b]=\overline{E}^{\overline{X}_t}[b]= B\circ\overline{X}_t, \text{ fonction } \overline{\underline{\underline{F}}}^\circ_t\text{-mesurable}$$

Alors la vérification de (10) s'écrit

$$\begin{aligned} E^x[ch]&=E^x[c.a.b\circ\Theta_t]=E^x[c.a.E^{X_t}[b]] && \text{puisque ac est } \underline{\underline{F}}^\circ_t\text{-mesurable} \\ &=E^x[a.B\circ\overline{X}_t.c]=E^x[a.B\circ\overline{X}_t.m] && \text{puisque } a.B\circ\overline{X}_t \text{ est } \overline{\underline{\underline{F}}}^\circ_t\text{-mesurable} \\ &=E^x[a.m.B\circ\overline{X}_t]=E^x[a.m.b\circ\Theta_t] && \text{puisque am est } \underline{\underline{F}}^\circ_t\text{-mesurable} \\ &= E^x[mh] \text{ (cqfd).} \end{aligned}$$

Passons à (b). Notons $\underline{\underline{H}}$ la tribu $\underline{\underline{F}}^o_{T+}\vee\Theta_T^{-1}(\overline{\underline{\underline{F}}}^o)$; je dis qu'elle contient $\underline{\underline{F}}^o_{T+}\vee\overline{\underline{\underline{F}}}^o$. Comme elle contient $\underline{\underline{F}}^o_{T+}$ il suffit de voir que les v.a. $\overline{X}_t$ sur Ω sont $\underline{\underline{H}}$-mesurables. Or $\overline{X}_{T+t}$ est $\underline{\underline{H}}$-mesurable pour tout t. Par continuité à droite, on en déduit le même résultat pour $\overline{X}_{T+U}$, où U est $\underline{\underline{H}}$-mesurable positive. Comme T est $\underline{\underline{F}}^o_{T+}$-mesurable, c'est vrai pour $\overline{X}_{T\vee t}$, tandis que $\overline{X}_{T\wedge t}$ est $\underline{\underline{F}}^o_{T+}$-mes., donc $\underline{\underline{H}}$-mes. Finalement, $\overline{X}_t$ est $\underline{\underline{H}}$-mesurable. D'autre part, $\overline{X}_t\circ\Theta_T=\overline{X}_{T+t}$ est mesurable p.r. à $\underline{\underline{F}}^o_{T+}\vee\overline{\underline{\underline{F}}}^o$, d'où l'inclusion inverse : les deux tribus sont donc identiques.

N(.,c) est $\underline{\underline{F}}^o_0\vee\overline{\underline{\underline{F}}}^o$-mesurable, donc $N(\Theta_T\circ,c)$ est $\underline{\underline{H}}$-mesurable. Il reste à vérifier que si h est $\underline{\underline{H}}$-mesurable positive, on a (en posant N(.,c)=n

(11) $\quad E^\mu[c\circ\Theta_T.h] = E^\mu[n\circ\Theta_T.h]$

Par classes monotones on se ramène au cas où h est de la forme $a.b\circ\Theta_T$ où a est $\underline{\underline{F}}^o_{T+}$-mesurable, b $\overline{\underline{\underline{F}}}^o$-mesurable. Mais alors, en conditionnant par rapport à $\underline{\underline{F}}^o_{T+}$ grâce à la propriété de Markov forte de (X_t), la vérification de (11) se réduit à

(12) $\quad E^\bullet[bc] = E^\bullet[bn]$

Comme b est $\overline{\underline{\underline{F}}}^o$-mesurable, cela résulte de (7).

NOYAUX MULTIPLICATIFS

Indiquons rapidement comment la proposition 2 permet de retrouver (à de légers raffinements près) l'existence des noyaux multiplicatifs selon JACOD . Pour toute fonction f borélienne bornée sur E, posons

(13) $\quad q^x_t(\overline{\omega},f) = M^x(\overline{\omega},f\circ X_t) \qquad (\overline{\omega}\in\overline{\Omega})$

Nous avons alors les propriétés suivantes

a) $(x,\overline{\omega}) \longmapsto q^x_t(\overline{\omega},f)$ est $\underline{\underline{B}}(E)\times\overline{\underline{\underline{F}}}^o$-mesurable,
l'application $t\longmapsto q^x_t(\overline{\omega},.)$ est étroitement continue à droite.

b) Pour toute mesure P^x , $q^x_t(\overline{\omega},f) = E^x[f\circ X_t|\overline{\underline{\underline{F}}}^o] = E^x[f\circ X_t|\overline{\underline{\underline{F}}}^o_t]$ P^x-p.s.
Pour toute mesure P^μ , $q^{X_0(\omega)}_t(\overline{\omega},f) = E^\mu[f\circ X_t|\overline{\underline{\underline{F}}}^o\vee\underline{\underline{F}}^o_0]$
$= E^\mu[f\circ X_t|\overline{\underline{\underline{F}}}^o_t\vee\underline{\underline{F}}^o_0]$ P^μ-p.s.

c) Pour tout couple (t,x), toute f bornée sur E , $q^x_t(.,f)$ est égale $P^{\overline{x}}$-p.s. à une fonction $\overline{\underline{\underline{F}}}^o_t$-mesurable [C'est la première formule de b), c.à.d. la formule (10) : noter qu'elle ne se réduit pas tout à fait à la seconde formule, lorsque x est un point de branchement].

d) Pour tout couple (t,u) de nombres réels positifs, pour tout x, on a P^x-p.s. sur $\overline{\Omega}$

(14) $$q^x_{t+u}(\overline{\omega},dy) = \int_E q^x_t(\overline{\omega},dz)q^z_u(\Theta_t\overline{\omega},dy)$$

La formule peut être ainsi écrite en termes de mesures, du fait que $\underline{\underline{B}}(E)$ est une tribu séparable. L'ensemble de mesure nulle peut être rendu indépendant de u, grâce à la continuité à droite pour la convergence étroite sur E, mais il continuera à dépendre de t et x .

e) Dans la formule (14), t peut être remplacé par un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^{o}_{t+})$.

COMMENTAIRE. Nous consacrerons la suite de l'exposé à l'amélioration de ces résultats. Les noyaux multiplicatifs de JACOD satisfont à une propriété d'adaptation meilleure que c) : nous nous occuperons aussi de cela plus tard. Pour l'instant, il s'agit seulement de présenter rapidement cette notion.

REGULARISATION DE LA PROPRIETE MULTIPLICATIVE

LEMME 1. <u>Quel que soit</u> x, <u>on a pour</u> P^x-<u>presque tout</u> $\overline{\omega}$ <u>la propriété suivante</u> : <u>il existe un ensemble</u> $G(x,\overline{\omega}) \subset \mathbb{R}_+$ <u>portant la mesure de Lebesgue</u> dt, <u>tel que pour</u> $t\in G(x,\overline{\omega})$ <u>on ait</u>

(15) $$\forall g\in\underline{\underline{U}} \quad M^x_{\overline{\omega}}[g\circ\Theta_t|\underline{\underline{F}}^o_t] = M^{X_t(\cdot)}_{\Theta_t\overline{\omega}}[g]$$

DEMONSTRATION. $\underline{\underline{F}}^o_t$ est engendrée par l'algèbre des fonctions $f\circ a_t$, où f parcourt $\underline{\underline{U}}$ et a_t est l'opérateur d'arrêt. Comme $\underline{\underline{U}}$ est séparable pour la convergence uniforme, il suffit de démontrer que pour f,g fixes on a pour presque tout $\overline{\omega}$, p.p. sur $\mathbb{R}_+$

(16) $$M^x_{\overline{\omega}}[g\circ\Theta_t.f\circ a_t] = M^x_{\overline{\omega}}[N(\Theta_t.,g).f\circ a_t]$$

(en effet, $M^x_{\overline{\omega}}$ est portée par $\{ w : \overline{w}=\overline{\omega} \}$, et sur cet ensemble on a $M^{X_t(w)}(\Theta_t\overline{\omega},.)=N(\Theta_t w,.)$). Or soit H l'ensemble des $(t,\overline{\omega})$ tels que (16) n'ait pas lieu ; H est $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\overline{\underline{\underline{F}}}^o$- mesurable, et pour tout t sa coupe est P^x-négligeable : en effet, si l'on note $m^x(\overline{\omega},t)$ et $n^x(\overline{\omega},t)$ les deux membres de (16), la formule (9) nous dit que, pour toute fonction c $\overline{\underline{\underline{F}}}^o$-mesurable bornée, on a $E^x[m^x(.,t)c]=E^x[n^x(.,t)c]$. On applique maintenant le théorème de Fubini : pour P^x-presque tout $\overline{\omega}$, la coupe de H par $\overline{\omega}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue. C'est le résultat cherché.

LEMME 2. Soit Ω' l'ensemble des $w\in\Omega$ possédant la propriété suivante

(17) $\forall g\in\underline{\underline{U}}$, $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{s\downarrow\downarrow t} \text{ess } M^{X_s(w)}(\Theta_s \overline{w}, g)$ existe .

Alors Ω' est universellement mesurable (complémentaire d'analytique) et porte toutes les mesures P^μ. En particulier

(18) pour tout x, $M^x_{\overline{\omega}}$ est portée par Ω' pour $\overline{P}^x$ presque tout $\overline{\omega}$.

DEMONSTRATION. $\underline{\underline{U}}$ étant séparable pour la convergence uniforme, nous pouvons nous borner à démontrer les résultats analogues pour une fonction $g\in\underline{\underline{U}}$ fixée . Les fonctions $(t,w)\longmapsto \lim\limits_{s\downarrow\downarrow t} \begin{smallmatrix}\sup\\ \inf\end{smallmatrix} \text{ ess } N(\Theta_s w, g)$

[car c'est bien ainsi que s'écrit l'expression compliquée (17) !) sont $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurables (WALSH [2]), donc l'ensemble des (t,w) où la lim ess n'existe pas est borélien dans le produit, et sa projection $(\Omega')^c$ est analytique.

Nous allons montrer directement (18) : l'assertion relative aux P^μ s'en déduit par intégration en $\overline{\omega}$ pour $\overline{P}^x$, puis en x pour μ. Soit une $\overline{\omega}$ qui satisfait aux propriétés du lemme 1. Soit (Y_t) la projection bien-mesurable du processus $(g\circ\Theta_t)$ sur la famille $(\underline{\underline{F}}^\circ_{t+})$, pour la mesure $M^x_{\overline{\omega}}$: comme les tribus $\underline{\underline{F}}^\circ_t$ et $\underline{\underline{F}}^\circ_{t+}$ n'ont des complétions différentes que pour une infinité dénombrable de valeurs de t, le lemme 1 nous dit que

pour presque tout t , on a $Y_t=N(\Theta_t.,g)$ $M^x_{\overline{\omega}}$-p.s.

Fubinisons : il vient que pour $M^x_{\overline{\omega}}$-presque tout w on a

(19) $Y_t(\omega)=N(\Theta_t w,g)$ p.p. sur $\mathbb{R}_+$, donc $\lim \begin{smallmatrix}\sup\\ \inf\end{smallmatrix} \text{ ess } Y_.(w) \equiv$
$\lim \begin{smallmatrix}\sup\\ \inf\end{smallmatrix} \text{ ess } N(\Theta_. w,g)$

Il ne reste plus qu'à se rappeler que pour $g\in\underline{\underline{U}}$ le processus $(g\circ\Theta_t)$ est continu , et que la projection bien-mesurable d'un processus continu à droite est continue à droite.

Nous avons démontré un résultat supplémentaire, que nous énoncerons à présent : mais il nous faut des notations.

DEFINITION. Quels que soient $\overline{\omega}\in\overline{\Omega}$, $w\in\Omega$, $g\in\underline{\underline{U}}$, nous posons

(20) $\overset{\circ}{S}{}^w(\overline{\omega},g) = \lim\limits_{t\downarrow\downarrow 0} \text{ess } M^{X_t(w)}(\Theta_t\overline{\omega},g)$ si cette limite existe pour toutes les fonctions de $\underline{\underline{U}}$

$= 0$ dans le cas contraire.

$\overset{\circ}{S}{}^w(\overline{\omega},.)$ est une forme positive sur $\underline{\underline{U}}$, i.e. une mesure positive (de masse 1 ou 0) sur $\check{\Omega}$. Nous posons

(21) $S^w(\overline{\omega},.) = \overset{\circ}{S}{}^w(\overline{\omega},.)$ si cette mesure est portée par Ω

$= 0$ dans le cas contraire.

LEMME 3. a) Soit $\underline{\underline{G}}_t$ la tribu $\underline{\underline{F}}_t \times \underline{\underline{F}}^\circ$ sur $\Omega\times\bar{\Omega}$. L'application $(w,\varpi) \mapsto S^w(\bar{\omega},.)$ est un noyau de $(\Omega\times\bar{\Omega},\underline{\underline{G}}_{0+})$ dans $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$.

b) Soit Ω^* l'ensemble des $w\in\Omega'$ possédant la propriété suivante

(22) pour tout t, $S^{\Theta_t w}(\Theta_t\bar{w}\ ,.)$ est une loi de probabilité.

Alors Ω^* est un complémentaire d'analytique, et porte toutes les mesures P^μ.

c) Soit $x\in E$. Alors $P^{\bar{x}}$-presque tout ϖ possède la propriété suivante

(23) M^x_ω est portée par Ω^* ; pour toute $g\geq 0$ $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable, le processus $S^{\Theta.w}(\Theta_{.}\varpi\ ,g\ )$ est projection bien-mesurable du processus $(g\circ\Theta_t)$ sur la famille $(\underline{\underline{F}}^\circ_{t+})$, pour la mesure M^x_ϖ .

DEMONSTRATION. a) est évidente. Pour établir b) et c), nous transcrivons (19) : pour P^x-presque tout $\bar{\omega}$, pour $g\in U$

| le processus $S^{\Theta_t w}(\Theta_t\bar{w},g)$ est projection bien-mesurable de
| $(g\circ\Theta_t)$ pour M^x_ω .

Un raisonnement de classes monotones donne alors que, pour toute $g\geq 0$ borélienne sur $\check{\Omega}$, le processus $S^{\Theta_t w}(\Theta_t\bar{\omega},g)$ est projection bien-mesurable de $((g|_\Omega)\circ\Theta_t)$. Prenant en particulier pour g l'indicatrice de Ω dans $\check{\Omega}$, il vient que M^x_ϖ -presque tout w appartient à Ω^*, et l' assertion (23).

Quant au fait que Ω^* soit un complémentaire d'analytique, il se démontre par un argument de projection, comme pour Ω'.

NOTATION. De même que nous avions posé $N(\omega,.)=M^{X_0(\omega)}(\bar{\omega},.)$, nous poserons $S(\omega,.)=S^\omega(\varpi,.)$. C'est un noyau de $(\Omega,\underline{\underline{G}}_{0+})$ dans $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$, et le lemme 3 s'écrit aussi : (le lemme 4 n'existe pas)

LEMME 5. Si g est une fonction $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable bornée, le processus $(Sg\circ\Theta_t)$ est, pour toute mesure P^μ, projection bien-mesurable du processus $(g\circ\Theta_t)$ sur la famille $(\underline{\underline{G}}_{t+})$.

DEMONSTRATION. Il suffit de traiter le cas où $g\in\underline{U}$ (classes monotones). Nous savons que le processus $Sg\circ\Theta_t$ est, pour toute loi P^μ, indistinguable d'un processus continu à droite, et adapté à la famille $(\underline{\underline{G}}_{t+})$. Il nous suffit donc de vérifier que pour chaque t, $E^\mu[g\circ\Theta_t|\underline{\underline{G}}_t]$ $E^\mu[Sg\circ\Theta_t|\underline{\underline{G}}_t]$ P^μ-p.s. , ou encore que si φ est $\bar{\underline{\underline{F}}}^\circ$-mesurable, $f\in\underline{U}$ on a $E^\mu[\varphi.Sg\circ\Theta_t.f\circ a_t]=E^\mu[\varphi.g\circ\Theta_t.f\circ a_t]$ (a_t est un opérateur d'arrêt). On passe des E^μ aux E^x, on désintègre les E^x suivant les M^x_ϖ, et on est ramené à voir si pour P^x-presque tout ϖ (après suppression du coefficient $\varphi(\varpi)$)

(24) $\qquad M_{\varpi}^{x}[f\circ a_t g\circ\theta_t] = M_{\varpi}^{x}[f\circ a_t Sg\circ\theta_t]$

Mais M_{ϖ}^{x} est portée par $\{w : \overline{w}=\varpi\}$, sur lequel la fonction $S(\theta_t w,g)$ est égale à $S^{w}(\theta_t\varpi,g)$, et la formule (24) se réduit à (23).

Nous notons une conséquence immédiate de (24), lorsque t=0,f=1

COROLLAIRE. <u>On a</u>

(25) <u>pour</u> P^x-<u>presque tout</u> ϖ , $M^x(\varpi,dw)=\int M^x(\varpi,du)S(u,dw)$

(26) <u>pour toute loi</u> μ , $P^{\mu}(dw)=\int P^{\mu}(du)S(u,dw)$. <u>Si</u> T <u>est un temps d'arrêt de la famille</u> $(\underline{\underline{G}}_{t+})$, <u>on a sur</u> $\{T<\infty\}$

$$E^{\mu}[g\circ\theta_T|\underline{\underline{G}}_{T+}] \;=\; S(\theta_T.,g) \quad P^{\mu}\text{-}\underline{p.s}.$$

Ici encore, la dernière propriété ("de Markov forte") se réduit à (23) : on désintègre P^{μ} suivant les P^x, puis les M_{ϖ}^{x} ; pour ϖ fixé, T est égal M_{ϖ}^{x}-p.s. à un temps d'arrêt de la famille $\underline{\underline{F}}_{t+}^{\circ}$, et c'est la propriété de projection bien-mesurable [ou bien utiliser l'approximation usuelle par des t.d'a. étagés et la continuité à droite de $Sg\circ\theta_t$ sur Ω^* : cela revient au même].

Noter la différence avec la prop.2 : là bas, la propriété de Markov forte était relative à un temps d'arrêt T de la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+}^{\circ})$, ici d'un temps de la forme $T(\omega)=S(\overline{\omega},\omega)$, où $S(\overline{w},\omega)$ est une fonction mesurable du couple qui, <u>pour chaque</u> $\overline{w}$ <u>fixé</u>, est un t.d'a. de$(\underline{\underline{F}}_{t+}^{\circ})$.

REMARQUE. Soit une fonction $\gamma(\omega,\overline{w})$ $\underline{\underline{F}}^{\circ}\times\overline{\underline{\underline{F}}}^{\circ}$-mesurable bornée sur $\Omega\times\overline{\Omega}$, et soit $g(\omega)=\gamma(\omega,\overline{\omega})$. Le lemme 5 nous dit que la projection bien-mesurable du processus $(g\circ\theta_t)$ est le processus $(Sg\circ\theta_t)$. Mais d'autre part un raisonnement par classes monotones à partir du cas où γ s'écrit $a(\omega)b(\overline{\omega})$ montre que cette projection vaut aussi $(h\circ\theta_t)$, où $h(\omega) = \int S(\omega,du)\gamma(u,\overline{\omega})$. Les processus $(Sg\circ\theta_t)$ et $(h\circ\theta_t)$ sont donc indistinguables.

Prenons en particulier $\gamma(\omega,\overline{w})=I_{\{\overline{\omega}=\overline{w}\}}$. Alors g=1, et la projection bien-mesurable vaut 1. D'autre part, $h(\omega)$ ne peut valoir 1 que si $S(\omega,.)$ est portée par le "pinceau" $\Omega(\overline{\omega})=\{w : \overline{w}=\overline{\omega}\}$. D'où la conséquence suivante :

si nous remplaçons $S(\omega,.)$ par 0 lorsque cette mesure n'est pas portée par $\Omega(\overline{\omega})$, la fonction obtenue possède encore les mêmes propriétés.

Nous ferons cette transformation dans la suite, sans changer de notation.

REMARQUE. Nous avons besoin maintenant d'un résultat technique, dont nous ne voulons pas donner d'énoncé formel. Rappelons que la projection bien-mesurable d'un processus continu à droite est indistinguable d'un processus continu à droite. Nous partons des fonctions $g \in \underline{\underline{U}}$, et savons que les processus $(Sg \circ \Theta_.)$ sont (indistinguables de) continus à droite. Nous formons alors les processus

(27) $\quad h \circ \Theta_.$, où $h = f \circ a_t g \circ \Theta_t$, ou $f \circ a_t . Sg \circ \Theta_t$, $f \in \underline{\underline{U}}, g \in \underline{\underline{U}}, t \in \mathbb{Q}$

ils sont indistinguables de continus à droite, donc les processus $(Sh \circ \Theta_.)$ sont eux aussi indistinguables de continus à droite. Nous désignons par Ω^{**} l'ensemble des ω tels que

(28) <u>Pour toute</u> $h \in \underline{\underline{U}}$, <u>toute</u> h <u>de la forme</u> (27), <u>la fonction</u> $S(\Theta_. \omega, h)$ <u>soit continue à droite</u>.

Ω^{**} est un complémentaire d'analytique, stable par translation, qui porte toutes les mesures P^μ. Nous prouvons maintenant

LEMME 6. <u>Soit</u> Ω^{***} <u>l'ensemble des</u> $\omega \in \Omega^{**}$ <u>tels que, pour tout</u> t, <u>la mesure</u> $S(\Theta_t, .)$ <u>soit portée par</u> Ω^{**}. <u>Alors</u> Ω^{***} <u>est un complémentaire d'analytique</u>, <u>stable par translation, qui porte toutes les lois</u> P^μ.

DEMONSTRATION. Le fait que Ω^{***} soit un complémentaire d'analytique se ramène, par passage au complémentaire, au suivant : si A est un ensemble analytique (ici $A^c = \Omega^{**}$), S est noyau borélien sur Ω, alors l'ensemble $\{ \omega : \exists t, S(\Theta_t \omega, A) > 0 \}$ est analytique. Par projection, on se ramène à démontrer que l'ensemble $\{(t,\omega) : S(\Theta_t \omega, A) > 0\}$ est analytique dans $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Soit $H = \mathbb{R}_+ \times \Omega$, et soit le noyau Z de H dans H ainsi défini : si $y = (t,\omega) \in H$, $Z(y,.) = \varepsilon_t \otimes S(\omega,.)$. Soit V le cylindre projetant A sur Ω, analytique dans H. On est ramené à montrer que

<u>si</u> H <u>est lusinien</u>, Z <u>un noyau borélien sur</u> H, V <u>analytique dans</u> H, $\{y : Z(y,V) > 0\}$ <u>est analytique dans</u> H

Sous cette forme, le th. est démontré dans le séminaire VII, p.158-159. Mais c'est en fait un cas particulier de résultats bien plus généraux de MOKOBODZKI sur les capacités fonctionnelles.

Montrons ensuite que Ω^{***} porte toutes les mesures P^μ. Reprenons l'ensemble A, complémentaire de Ω^{**} : du fait que Ω^{**} est stable par translation et porte P^μ, le processus $(I_A \circ \Theta_t)$ est P^μ-évanescent, autrement dit le temps d'entrée du processus $(\Theta_t \omega)$ dans A est P^μ-p.s. infini. Mais A est analytique, donc il existe un ensemble $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable B contenant A (dépendant de μ) et possédant la même propriété . Le processus $(I_B \circ \Theta_t)$ étant P^μ-évanescent, il en est de même de sa projection bien-mesurable $(SI_B \circ \Theta_t)$, et a fortiori du processus $(SI_A \circ \Theta_t)$. C'est juste ce qu'on voulait.

Nous arrivons maintenant au résultat principal de cette première partie :

THEOREME 1. <u>Il existe dans</u> Ω <u>un complémentaire d'analytique</u> $\Omega^{\times}$, <u>stable par translation et portant toutes les mesures</u> P^{μ}, <u>tel que</u>

1) <u>Pour tout</u> $\omega\in\Omega^{\times}$, <u>pour tout</u> $g\in\underline{\underline{U}}$, <u>la fonction</u> $S(\Theta_{.}\omega,g)$ <u>soit continue à droite</u>.
2) <u>Pour tout</u> $\omega\in\Omega^{\times}$, <u>la mesure</u> $S(\omega,.)$ <u>soit une loi de probabilité portée par</u> $\Omega^{\times}$, <u>et par l'ensemble</u> $\{w : \overline{w}=\overline{\omega}\}$
3) <u>Pour tout</u> $\omega\in\Omega^{\times}$ <u>on ait identiquement en</u> $t\in\mathbb{R}_{+}, f\in\underline{\underline{U}}, g\in\underline{\underline{U}}$.

(29) $$S(\omega,f\circ a_t g\circ\Theta_t) = S(\omega,f\circ a_t.Sg\circ\Theta_t)$$

On rappelle de plus que

(30) $$P^{\mu}(d\omega) = \int_{\Omega^{\times}} P^{\mu}(dw)S(w,d\omega)$$

DEMONSTRATION. Nous avons pour tout t fixe, pour P^{μ}-presque tout ω

(31) $$S(\omega,f\circ a_t g\circ\Theta_t) = S(\omega,f\circ a_t.Sg\circ\Theta_t) \qquad \forall f\in\underline{\underline{U}},g\in\underline{\underline{U}}$$

En effet, le premier membre vaut $E^{\mu}[f\circ a_t g\circ\Theta_t|\underline{\underline{G}}_{0+}]$, et le second $E^{\mu}[f\circ a_t g\circ\Theta_t|\underline{\underline{G}}_{t+}|\underline{\underline{G}}_{0+}]$.

Soit L_t l'ensemble des ω tels que (31) ait lieu, et soit L l'intersection des L_t pour t rationnel . Soit L' l'ensemble des ω tels que $\Theta_r\omega\in L$ pour <u>presque tout</u> r, un ensemble borélien, stable par translation, qui porte toutes les mesures P^{μ}. Soit $\Omega^{\times}=L'\cap\Omega^{***}$, complémentaire d'analytique <u>stable</u> <u>par translation</u>. Si $\omega\in\Omega^{\times}$, on a pour des r aussi voisins que 0 que l'on veut, puisqu'appartenant à un ensemble de mesure pleine au sens de Lebesgue

$$S(\Theta_r\omega, f\circ a_t g\circ\Theta_t)= S(\Theta_r\omega,f\circ a_t Sg\circ\Theta_t)$$

Faisons tendre r vers 0 : comme ω appartient à Ω^{**} , nous avons par (28), pour t rationnel

$$S(\omega, f\circ a_t g\circ\Theta_t) = S(\Theta_r\omega, f\circ a_t.Sg\circ\Theta_t)$$

Mais $\omega\in\Omega^{***}$, donc la mesure $S(\omega,.)$ est portée par Ω^{**}, et les deux membres sont des fonctions continues à droite en t, d'où la relation (29) identiquement.

Malheureusement, la condition 2) n'est pas encore satisfaite. Qu'à cela ne tienne : au lieu de $\Omega^{\times}$, notons $\Omega_1^{\times}$ l'ensemble qui vient d'être construit. Comme il est contenu dans Ω^{*}, $S(\omega,.)$ est une loi de probabilité (cf.(22)). Construisons par récurrence

$$\Omega_{n+1}^{\times} = \{ \omega\in\Omega_n^{\times} : \text{pour tout } t,\ S(\omega,.) \text{ est portée par } \Omega_n^{\times}\}$$

La démonstration du lemme 6 nous montre que ces ensembles sont des complémentaires d'analytiques qui portent toutes les mesures P^{μ}. Nous prenons pour Ω^{x} leur intersection, et le théorème est établi.

COMMENTAIRE. Le contenu intuitif du théorème de JACOD était, on l'a dit au début, que conditionnellement à $\varpi\in\bar{\Omega}$, la loi du processus (X_t) est celle d'un processus de Markov à valeurs dans E, non homogène, dont la fonction de transition est donnée par le "noyau multiplicatif". Ici, munissons Ω d'une mesure P^x. Pour $P^{\bar{x}}$-presque tout ϖ, la loi M^x_{ϖ} est portée par l'ensemble des w tels que $\bar{w}=\varpi$ d'une part, d'autre part par Ω^x, et enfin telle que

$$M^x_{\varpi}(dw) = \int_{\Omega^x} M^x_{\varpi}(du)S(u,dw)$$

(formule (28)). Appelons <u>espace des germes</u> l'espace mesurable $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o_{0+})$ - c'est un horrible espace , non séparable - , et notons ξ_0 l'application identique de $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$ dans l'espace des germes, ξ_t l'application $\xi_0\circ\theta_t$. Alors le théorème 1 nous dit que pour un ϖ du type ci-dessus, pour la mesure M^x_{ϖ} , <u>le processus</u> (ξ_t) <u>à valeurs dans l'espace des germes</u> est fortement markovien, avec la loi initiale M^x_{ϖ} restreinte à $\underline{\underline{F}}^o_{0+}$, et une fonction de transition donnée par le noyau S. Cela correspond intuitivement à l'absence de " loi de tout ou rien" pour les processus conditionnels.

<u>Cependant, il arrive dans certains cas intéressants que le comportement de</u> w <u>conditionnellement à</u> ϖ <u>soit assez " localement déterministe" pour que</u> S^w_{ϖ} <u>dépende seulement de</u> ϖ <u>et</u> $X_0(w)$. Dans ces cas là, on aura de vrais processus de Markov conditionnels. En voici deux exemples.

1) E est un espace produit $\bar{E}\times I$, et p est la projection sur $\bar{E}$; Ω est $\bar{\Omega}\times D$, ou D est l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{R}_+$ dans I, continues à droite et <u>en escalier</u> . Il est alors clair, en suivant la construction de $S^w(\bar{\omega},.)$, que celle-ci ne dépend de w que par l'intermédiaire de $X_0(w)$. JACOD avait d'ailleurs déjà signalé la possibilité de construire des noyaux multiplicatifs parfaits pour un espace E du type précédent, avec I <u>dénombrable</u>.

2) On trouvera dans ce séminaire une étude détaillée des <u>processus d'incursions</u>. Voici ce que nous aurons besoin d'en savoir. Nous avons un bon processus de Markov $\bar{\Omega},\underline{\underline{\bar{F}}},\ldots$ à valeurs dans $\bar{E}$, et un <u>ensemble fermé homogène</u>, progressivement mesurable, M, de début D. D'autre part, nous nous donnons un autre espace d'états J qui importe peu ici, avec un point distingué Δ, et un espace de trajectoires à valeurs dans

J, à durée de vie, admettant des opérateurs de translation. L'espace E est une partie de $\overline{E}\times W$, p la projection de E sur $\overline{E}$. Enfin Ω est un espace d'applications $\omega : t \mapsto (\overline{X}_t(\omega), j_t(\omega))$ à valeurs dans E, possédant les propriétés suivantes

- $\overline{\omega} : t \mapsto \overline{X}_t(\omega)$ appartient à $\overline{\Omega}$;
- pour tout t,ω , $j_t(\omega)\in W$ est <u>tuée</u> à l'instant $D(\theta_t\overline{\omega})$; en particulier, si t n'est pas dans un intervalle $[a,b[$ contigu à $M(\overline{\omega})$, on a $j_t(\omega)=[\Delta]$;
- dans tout intervalle $[a,b[$ contigu à M, le comportement de $j_t(\omega)$ est déterministe : $j_t(\omega)=\theta_{t-a}j_a(\omega)$

Dans ces conditions le calcul de $S(\omega,.)$ que nous avons indiqué montre que cette mesure <u>ne dépend que de</u> $\overline{\omega}$ <u>et de</u> $j_0(\omega)$ dans l'ensemble $\{\omega : D(\overline{\omega})>0\}$, et y est une fonction $\underline{\underline{\overline{F}}}^{o}\vee\underline{\underline{F}}^{o}$-mesurable. En revanche, dans l'ensemble $\{D=0\}$, $j_0(\omega)$ vaut $[\Delta]$ et je ne sais rien dire.

Il serait très intéressant de savoir calculer les mesures $S(\omega,.)$ au moyen des quantités introduites par GETOOR-SHARPE.

II. EXTENSION. LIEN AVEC LES F.M. ORDINAIRES

Ce petit paragraphe est une pause entre deux paragraphes techniques. Il ne contient rien de spécialement important.

SUPPRESSION DE CERTAINES HYPOTHESES

Nous avons supposé au début que E et $\overline{E}$ étaient des espaces métriques compacts, que p était continue, que (P_t) et $(\overline{P}_t)$ étaient des semi-groupes de RAY, que Ω et $\overline{\Omega}$ étaient lusiniens. Ces hypothèses sont bien commodes pour les démonstrations, mais on ne les rencontre pas souvent dans la nature. Nous allons présenter ici une méthode de compactification qui permet de ramener à ces hypothèses des cas beaucoup plus généraux.

Considérons deux espaces F et $\overline{F}$, homéomorphes à des parties universellement mesurables d'espaces métriques compacts, et une application universellement mesurable p de F dans $\overline{F}$. Ces deux espaces sont munis de semi-groupes droits (P_t) et $(\overline{P}_t)$, absorbés en des points ∂, $\overline{\partial}$ tels que $p(\partial)=\overline{\partial}$. On suppose que l'hypothèse (1) est satisfaite.

Deux remarques sont nécessaires : le mot <u>processus droit</u> , lorsque l'espace d'états est seulement supposé universellement mesurable, suppose la validité de la condition de MERTENS (voir le dernier paragraphe de " ensembles aléatoires I", dans ce volume). D'autre part, nous excluons la présence de points de branchement : si les processus en possédaient, nous commençons par les enlever.

Maintenant, nous procédons de la manière suivante : nous nous donnons un espace vectoriel $\wedge$-stable $\underline{\underline{\bar{H}}}$ de fonctions bornées sur $\bar{F}$, contenant les constantes, stable pour la résolvante de $(\bar{P}_t)$, séparant les points , séparable pour la convergence uniforme, tel que toute fonction $h \in \underline{\underline{\bar{H}}}$ soit différence de deux fonctions r-excessives (pour un $r > 0$ dépendant de h). Nous notons $\bar{E}$ le compactifié de RAY de $\bar{F}$ relativement à $\underline{\underline{\bar{H}}}$. Si f sur $\bar{E}$ est r-excessive pour $(\bar{P}_t)$, $f \circ p$ est r-excessive pour (P_t) : nous pouvons donc construire sur E un espace analogue contenant les fonctions $h \circ p$, $h \in \underline{\underline{\bar{H}}}$. Notons le $\underline{\underline{H}}$, et F le compactifié de RAY de E relativement à $\underline{\underline{H}}$. Il est alors très facile de voir que p se prolonge en une application continue de F dans $\bar{F}$, qui satisfait à (1) relativement aux deux semi-groupes de RAY construits sur F et $\bar{F}$.

Nous utilisons maintenant les espaces canoniques Ω et $\bar{\Omega}$ d'applications c.à d.l.à g. de $\mathbb{R}_+$ dans $F, \bar{F}$, dont le point initial n'est pas un point de branchement (on ne peut pas leur imposer de rester dans l'ensemble des points de branchement sans perdre le caractère lusinien), et on applique toute la théorie du § 1 , ce qui fournit, pour une trajectoire donnée $\omega \in \Omega$, une loi $S(\omega,.)$ sur Ω qui donne la répartition conditionnelle du processus connaissant le germe de ω en 0, et la trajectoire $\bar{\omega}$ en bas.

La réalisation initiale du semi-groupe (P_t) nous apparaît comme un sous-ensemble W de Ω, portant toutes les lois P^{μ} (μ sur E), formé de trajectoires continues à droite à valeurs dans E, stable par translation . De même pour $(\bar{P}_t)$, un certain sous-ensemble $\bar{W}$ de $\bar{\Omega}$. Si nécessaire, on restreint W de manière que $p(W) \subset \bar{W}$. Le problème consiste alors à voir si l'on peut encore restreindre W à un sous-ensemble W_1 , stable par translation et portant toutes les mesures P^{μ}, tel que pour $w \in W_1$ la mesure $S(w,.)$ soit portée par W_1. Le lecteur doit commencer à être familier avec ce genre de raisonnements ! Il s'agit de trouver des complémentaires d'analytiques portant les mesures et contenus dans W... Faut-il en dire plus ?

LIEN AVEC LA THEORIE CLASSIQUE

Considérons un espace $\bar{E}$ muni d'un semi-groupe droit $(\bar{P}_t)$ - prenons le markovien pour fixer les idées - et d'un semi-groupe subordonné exact $(\bar{Q}_t)$, que nous ne rendons pas markovien. Nous savons qu'on peut représenter $(\bar{Q}_t)$ sous la forme

$$(31) \qquad \overline{Q}_t(\overline{x},f) = E^{\overline{x}}[f\circ X_t M_t]$$

où (M_t) est une fonctionnelle multiplicative parfaite. Posons maintenant $E=\overline{E}\times\{0,1\}$, et définissons un semi-groupe markovien (P_t) sur E par les formules

$$(32) \qquad \begin{aligned} &P_t((\overline{x},1),A\times\{1\}) = \overline{P}_t(\overline{x},A) \ , \ P_t((\overline{x},1),A\times\{0\})=0 \\ &P_t((\overline{x},0),A\times\{1\}) = \overline{P}_t(\overline{x},A)-\overline{Q}_t(\overline{x},A), \ P_t((\overline{x},0),A\times\{0\})=\overline{Q}_t(\overline{x},A) \end{aligned}$$

alors (P_t) est un semi-groupe markovien au dessus de $(\overline{P}_t)$ (l'application p du § 1 étant la projection de E sur le facteur $\overline{E}$). Intuitivement, (31) nous donne une manière de réaliser $(\overline{Q}_t)$ au moyen de $(\overline{P}_t)$, en envoyant la trajectoire au point $\overline{\delta}$ à partir d'un certain instant aléatoire ; (32) est une construction analogue, mais au moyen d'une maison à un étage : au lieu d'être tuée, la particule quitte le rez de chaussée et monte au premier, où elle continue à évoluer suivant $(\overline{P}_t)$ sans plus jamais redescendre . $(\overline{Q}_t)$ représente alors ce que voient d'elle les habitants du rez de chaussée.

Il est extrêmement facile, dans ce cas particulier, d'expliciter le noyau multiplicatif :

$$(33) \qquad \begin{aligned} &\text{si } y=(x,1) \quad q_t^y(\overline{\omega},f) = f(\overline{X}_t(\overline{\omega}),1) \\ &\text{si } y=(x,0) \quad q_t^y(\overline{\omega},f) = f(\overline{X}_t(\overline{\omega}),0)M_t(\overline{\omega})+f(\overline{X}_t(\overline{\omega}),1)(1-M_t(\overline{\omega})) \end{aligned}$$

Ce qu'il faut remarquer, c'est que la première partie du § 1, la construction " grossière" des mesures $M^x_{\overline{\omega}}$ par simple désintégration, donne directement la théorie des fonctionnelles multiplicatives et leur propriété de Markov forte, tandis que la partie techniquement compliquée du § 1 correspond à la régularisation de WALSH au moyen des limites essentielles.

III. REGULARISATION QUANT A L'ARRET

Nous nous posons ici le problème suivant : dans la proposition II, nous avons vu que si c est $\underline{\underline{F}}^o_t$-mesurable positive, alors pour toute mesure μ, la fonction $\omega \mapsto N(\omega,c) = M^{X_0(\omega)}_{\overline{\omega}}[c]$ est P^μ-p.s. égale à une fonction $\underline{\underline{F}}^o_0\vee\underline{\underline{F}}^o_t$-mesurable : cela correspond à la propriété d'adaptation de la fonctionnelle multiplicative. Peut on supprimer les "P^μ-p.s." ?

Du point de vue logique, ce paragraphe devrait s'insérer <u>avant</u> la partie technique du § 1 : on régularise d'abord quant à l'arrêt, puis quant à la perfection, la seconde régularisation ne détruisant

pas l'effet de la première. En fait, il s'agit d'une question moins importante, et c'est pourquoi nous la présentons en dernier.
Nous ferons les hypothèses du début : $E,\overline{E}$ métriques compacts, p continue, $(P_t)(\overline{P}_t)$ semi-groupes de RAY. Mais de plus, nous ferons un choix spécifique de Ω et $\overline{\Omega}$:

Ω ($\overline{\Omega}$) <u>est l'ensemble de toutes les applications continues à droite de</u> $\mathbb{R}_+$ <u>dans</u> E ($\overline{E}$) , <u>à durée de vie</u> ζ ($\overline{\zeta}$), <u>admettant des limites à gauche sur l'intervalle</u> $]0,\zeta[$ ($\overline{\zeta}$) .

La possibilité d'une "explosion" à l'instant ζ tient à une propriété de limites projectives dont nous aurons besoin. Nous en reparlerons.

Nous commençons par une remarque. Notons $(P^1_t),(\overline{P}^1_t)$ les semi-groupes obtenus en "tuant" (P_t) et $(\overline{P}_t)$ au moyen d'une même v.a. exponentielle de paramètre 1 (et en envoyant la trajectoire en ∂, resp. $\overline{\partial}$).
Il est clair que (P^1_t) est au dessus de $(\overline{P}^1_t)$, et qu'ils sont réalisables sur $\Omega,\overline{\Omega}$: le fait que ce ne soient pas des s.g. de RAY est sans importance. Les espérances correspondantes seront notées E^x_1 ,$E^{\overline{x}}_1$.
Nous avons les formules sur Ω (et de même sur $\overline{\Omega}$)

(34) $\quad E^x_1[f] = E^x[\int_0^\infty f\circ k_r e^{-r}dr]$ si f est $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable positive

et si f est $\underline{\underline{F}}^\circ_t$-mesurable

(35) $\quad E^x_1[fI_{\{t<\zeta\}}] = e^{-t}E^x[f]$.

Nous construisons maintenant les mesures $M^x_1(\overline{\omega},.)$ relatives à ce couple de semi-groupes. Nous avons

LEMME 7. <u>La désintégration</u> $M^x_1(\overline{\omega},.)$ <u>convient aussi au couple</u> (P_t), $(\overline{P}_t)$, <u>sauf pour</u> $\overline{\omega}=[\overline{\partial}]$.

DEMONSTRATION. Soit $\overline{g}$ une fonction de $\overline{\underline{\underline{U}}}_0$ (ce n'est pas la fermeture de $\underline{\underline{U}}_0$, mais l'espace $\underline{\underline{U}}_0$ sur $\overline{\Omega}$: cf. le début de l'exposé), donc nulle au point $[\overline{\partial}]$. Soit f une fonction de $\underline{\underline{U}}$. Nous avons

$$E^x_1[\overline{g}\circ k_t f] = E^x_1[\overline{g}\circ k_t.M^x_1(.,f)]$$

Mais $\overline{g}\circ k_t = \overline{g}\circ k_t I_{\{t<\zeta\}}$; nous appliquons (35) et supprimons les e^{-t}

$$\cancel{e^{-t}}E^x[\overline{g}\circ k_t f] = \cancel{e^{-t}}E^x[\overline{g}\circ k_t.M^x_1(.,f)]$$

Le premier membre est aussi égal à $E^x[\overline{g}\circ k_t.M^x(..f)]$. Faisant tendre t vers $+\infty$, il vient

$$E^x[\overline{g}.M^x(.,f)]=E^x[\overline{g}.M^x_1(.,f)]$$

On en déduit que $M^x(.,f)=M^x_1(.,f)$ $P^{\overline{x}}$-p.s. dans le complémentaire de $[\overline{\partial}]$: si le semi-groupe en bas n'a pas de point de branchement, $P^{\overline{x}}$ ne charge d'ailleurs pas $[\overline{\partial}]$ si $\overline{x}\neq\overline{\partial}$.

LEMME 8. <u>Pour tout</u> $r>0$, <u>toute</u> f <u>$\underline{\underline{F}}^o$-mesurable bornée, tout</u> x, <u>on a</u>

(36) <u>Pour</u> $\overline{P}_1^x$-<u>presque tout</u> $\overline{\omega}\in\overline{\Omega}$, <u>la fonction</u> $M_1^x(k_.\overline{\omega},f\circ k_r)$ <u>est p.p.</u> (mesure dt) <u>égale à une constante sur</u> $]r,\infty[$.

<u>Le même résultat vaut aussi pour la loi</u> $\overline{P}^x$.

DEMONSTRATION. Il suffit de le démontrer pour $f\in\underline{\underline{U}}$. Nous avons alors $f\circ k_r=\lim_{t\uparrow r} f\circ k_t$, et d'après la proposition 2,a) appliquée au semi-groupe (P_t^1) il existe une fonction g, $\underline{\underline{\overline{F}}}{}^o_{r-}$-mesurable, égale à $M_1^x(.,f\circ k_r)$ $\overline{P}_1^x$-p.s.. D'après la formule (34), cela nous donne

(37) pour presque tout s , $g\circ k_s(\overline{\omega})=M_1^x(k_s\overline{\omega},f\circ k_r)$ $\overline{P}^x$-p.s.

D'autre part, g étant $\underline{\underline{F}}{}^o_{r-}$-mesurable, $g\circ k_s(\overline{\omega})=g(\overline{\omega})$ pour $s<r$. Le théorème de Fubini nous donne alors la dernière phrase de l'énoncé, relative à $\overline{P}^x$. Pour établir le même résultat pour $\overline{P}_1^x$, nous regardons la mesure

$$E_2^x[f]=E_1^x[\int_0^\infty f\circ k_s e^{-s}ds\ ]$$

Cette loi sur Ω est absolument continue par rapport à P_1^x, donc la relation $M_1^x(.,f\circ k_r)=g$ P_1^x-p.s. entraîne le même résultat P_2^x-p.s.. Mais alors le même raisonnement donne la première phrase de l'énoncé.

REDEFINITION DES MESURES

Dans cette section, nous allons fixer x , choisir une fois pour toutes la loi $M^x([\overline{\partial}],.)$, et nous occuper de redéfinir les mesures $M_1^x(\overline{\omega},.)$ (aussi notées $M_1^x(\omega,.)$, conformément à nos notations générales). Lorsque nous aurons ainsi nos nouvelles mesures $\hat{M}_1^x(\omega,.)$, nous définirons les nouvelles mesures $\hat{M}_1^x(\omega,.)$ en posant

(38) $\hat{M}^x(\overline{\omega},.)=\hat{M}_1^x(\overline{\omega},.)$ si $\overline{\omega}\neq[\overline{\partial}]$

et en ne changeant pas la valeur $M^x([\overline{\partial}],.)$ choisie plus haut.

Nous dirons que ω <u>est cohérente jusqu'à</u> u (il s'agit en fait d'une propriété de $\overline{\omega}$) si, quelle que soit $f\in\underline{\underline{U}}$, quel que soit $r<u$, l'ensemble des couples (s,t) d'éléments de $]r,u[$ tels que $M_1^x(k_s\omega,f\circ k_r)\neq M_1^x(k_t\omega,f\circ k_r)$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue plane. Nous désignons par $J(\omega)$ le sup des nombres $u>0$ tels que ω soit cohérente jusqu'à u ($\sup\emptyset=0$). Il est clair que ω est cohérente jusqu'à $J(\omega)$.

Comme $\underline{\underline{U}}$ est séparable pour la convergence uniforme, on peut se borner à vérifier la condition précédente pour une partie dénombrable dense de $\underline{\underline{U}}$. Si $f\in\underline{\underline{U}}$, d'autre part, l'application $r\mapsto f\circ k_r$ est continue pour la convergence uniforme : il suffit donc de vérifier la condition pour r rationnel. On en déduit sans peine que l'ensemble des ω cohérentes jusqu'à u est $\overline{\underline{F}}^{o}$-mesurable, et que $J(\omega)$ est une fonction $\overline{\underline{F}}^{o}$-mesurable.

Si ω est cohérente jusqu'à u, et $r<u$, la fonction $M_1^x(k_s\omega, f\circ k_r)$ ($f\in\underline{\underline{U}}$) est p.p. égale à une constante sur l'intervalle $]r,u[$. Cette constante vaut $\frac{1}{u-r}\int_r^u M^x(k_s\omega, f\circ k_r)ds$, de sorte que c'est une <u>mesure</u> en f. Elle vaut d'autre part

$$\lim_{s\downarrow\downarrow r} \text{ess}\ M^x(k_s\omega,\ f\circ k_r)$$

ce qui montre qu'elle ne dépend que de la restriction de ω à l'intervalle $[0,r+\varepsilon[$, quel que soit $\varepsilon>0$.

Enfin, le lemme 8 signifie que pour P_1^x-presque tout ω, ω est cohérente jusqu'à $+\infty$, avec (d'après (37))

$$(39)\qquad \lim_{s\downarrow\downarrow r} \text{ess}\ M_1^x(k_s\omega, f\circ k_r) = M_1^x(\omega, f\circ k_r) \qquad \begin{matrix} f\in\underline{\underline{U}} \\ r \text{ rationnel}\end{matrix}$$

on a alors la même propriété pour tout r réel, par convergence uniforme.

Nous avons tout ce qu'il nous faut : nous redéfinissons les mesures de la manière suivante :

1) Si $J(\omega)=0$, alors $\hat{M}_1^x(\omega,f) = 0$ pour toute f.

2) Supposons $J(\omega)=j>0$. Pour tout $r<j$, toute $f\in\underline{\underline{U}}$, posons

$$(40)\qquad \hat{M}_1^x(\omega, f\circ k_r) = \lim_{s\downarrow\downarrow r} \text{ess}\ \hat{M}_1^x(k_s\omega, f\circ k_r)$$

limite qui est aussi la "vraie valeur" de cette fonction sur l'intervalle $]r,j[$. Les fonctions $f\circ k_r$, $f\in\underline{\underline{U}}$, forment une algèbre qui engendre la tribu $\underline{\underline{F}}_{r-}^{o}$, et le calcul de la vraie valeur comme intégrale montre que l'expression (40) se prolonge en une mesure sur la tribu $\underline{\underline{F}}_{r-}^{o}$. Lorsque r augmente, ces mesures forment un système projectif. D'autre part, <u>le choix que l'on a fait de l'espace</u> Ω , <u>avec la condition sur l'absence possible d'une limite à gauche en</u> ζ, permet de montrer qu'il existe une mesure $\hat{M}_1^x(\omega,.)$ sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_{j-}^{o})$, unique, portée par l'ensemble $\{\zeta\leq j\}$, et induisant les mesures données sur les tribus $\underline{\underline{F}}_{r-}^{o}$, $r<j$. Si $j=+\infty$, la construction est achevée. Sinon, nous prolongeons cette mesure à $\underline{\underline{F}}^{o}$ par la formule

$$(41)\qquad \hat{M}_1^x(\omega,f) = \hat{M}_1^x(\omega, f\circ k_j) \ .$$

Nous passons de là aux $\hat{M}^x(\omega,f)$ par (38). On a maintenant les propriétés suivantes, dont nous n'indiquerons pas la démonstration ennuyeuse.

PROPOSITION 3. L'application $(x,\overline{\omega}) \mapsto \hat{M}^x(\overline{\omega},.)$ est $\underline{\underline{B}}(E)\times\underline{\underline{\overline{F}}}^o$-mesurable et l'on a pour tout x

$$P^x(d\omega) = \int \hat{M}^x(\overline{w},d\omega)\overline{P}^x(d\overline{w})$$

La mesure $\hat{M}^x(\overline{\omega},.)$ est portée par l'ensemble des w tels que

pour tout $t<\zeta(w)$, on a $\overline{X}_t(w)=\overline{X}_t(\omega)$

Enfin on a identiquement, pour toute f $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable, tout x , tout couple (r,s) tel que $r\leq s$

$$\hat{M}^x(\overline{\omega},f\circ k_r) = \hat{M}^x(k_s\overline{\omega},f\circ k_r)$$

[Il en résulte que si f est $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$-mesurable, $\hat{M}^x(.,f)$ est $\underline{\underline{\overline{F}}}^o_{t+}$-mesurable]

Il est évident que l'espace que nous avons utilisé, avec sa propriété bizarre à l'instant ζ, est assez inhabituel. Je pense qu'au bout du compte, on peut l'éliminer au moyen des méthodes du paragraphe 1, mais je ne veux pas noircir des pages et des pages pour une question qui ne me paraît pas d'un intérêt... Voici le principe

Nous travaillons sur Ω tel qu'il a été utilisé jusqu'à maintenant dans ce paragraphe, et nous notons Ω_0 le sous-ensemble de Ω formé des trajectoires ayant une limite à gauche à l'instant ζ. De même avec des $^-$ pour le semi-groupe en bas. Nous construisons le noyau

$$\hat{N}(\omega,.) = \hat{M}^{X_0(\omega)}(\overline{\omega},.) \text{ sur } \Omega$$

Maintenant nous faisons la construction du § 1 : nous avons un ensemble $\Omega^\times$, complémentaire d'analytique stable par translation, tel que pour $\omega\in\Omega^\times$ $S(\omega,dw)$ soit une loi de probabilité portée par $\Omega^\times$, donnée pour $f\in\underline{\underline{U}}$ par

$$S(w,f) = \lim_{t\to 0} \text{ess } \hat{N}(\Theta_t\omega,f)$$

Soient r,s avec r<s. Si $f\in\underline{\underline{U}}$ on a $f\circ k_r\in\underline{\underline{U}}$ et

$$\begin{aligned} S(k_s\omega,f\circ k_r) &= \lim_{t\to 0} \text{ess } \hat{N}(\Theta_t k_s\omega,f\circ k_r) = \lim_{t\to 0} \text{ess } \hat{N}(k_{s-t}\Theta_t\omega,f\circ k_r) \\ &= \lim_{t\to 0} \text{ess } \hat{N}(\Theta_t\omega,f\circ k_r) \quad (s-t>r \text{ pour } t \text{ assez petit}) \\ &= S(\omega,f\circ k_r) \end{aligned}$$

On retrouve d'ailleurs le même résultat pour s=r, en remplaçant r par r-ε et en faisant tendre ε vers 0. Ainsi la régularisation quant à la propriété multiplicative ne détruit pas l'effet de la régularisation quant à l'arrêt.

Nous savons d'autre part que le processus $(S(\Theta_t.,f))$ est , pour toute fonction $f\geq 0$, projection bien-mesurable (pour toute loi P^μ)

du processus $(f\circ\Theta_t)$ sur la famille $(\underline{\underline{G}}_{t+})$. Prenant pour f l'indicatrice de Ω_0, on voit que l'ensemble des ω tels que $S(\Theta_. \omega, \Omega_0)=1$ porte toutes les mesures P^μ... Le procédé de démonstration du théorème 1 nous permet alors de trouver un Ω^{xx} complémentaire d'analytique, <u>contenu dans</u> Ω_0 , possédant toutes les propriétés du théorème 1 . En particulier, pour $\omega\in\Omega^{xx}$, $S(\Theta_t\omega,.)$ est portée par Ω_0 pour tout t, et nous avons complètement éliminé la difficulté à l'instant ζ.

Croyez vous qu'on en ait fini ? Ω^{xx} est bien invariant par translation, mais qu'en est il des opérateurs de meurtre ? C'est une question que nous avons laissée de côté au paragraphe 1, puisque nous ne savions rien sur les $M^x_{\underline{\omega}}$ à cet égard, et que maintenant il faudrait reprendre après la régularisation qui donne les $\hat{M}^x_{\underline{\omega}}$! L'exemple des fonctionnelles multiplicatives ordinaires me donne à penser que tout marche bien, mais j'en ai plus qu'assez des noyaux multiplicatifs.