Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Paul-André Meyer

Les travaux d'Azéma sur le retournement du temps

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 8 (1974), p. 262-288
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__262_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1972/73

LES TRAVAUX D'AZEMA SUR LE RETOURNEMENT DU TEMPS

par P.A.Meyer

On doit à AZEMA la découverte de la forme "duale" de la théorie générale des processus. On sait que celle-ci est l'étude de la structure déterminée, sur un espace probabilisé, par la donnée d'une famille croissante $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ de tribus, $\underline{\underline{F}}_t$ représentant le passé à l'instant t : on étudie alors les diverses classes de processus adaptés à $(\underline{\underline{F}}_t)$, les divers types de temps d'arrêt, les théorèmes de projection et de section. On étudie d'autre part les divers types de mesures (processus croissants) correspondant aux types de processus considérés. Un trait de cette théorie est le fait qu'elle utilise seulement la structure d'ordre de $\mathbb{R}_+$, mais non sa structure additive. On a longtemps cherché à introduire une famille décroissante $(\underline{\underline{G}}_t)$ de tribus, en quelque sorte complémentaire de $(\underline{\underline{F}}_t)$, et représentant le futur à chaque instant t, mais cette direction s'est avérée tout à fait infructueuse jusqu'à maintenant. L'idée d'AZEMA est différente : s'inspirant de la théorie du retournement du temps pour les processus de Markov (HUNT, NAGASAWA...), AZEMA a pris comme notion duale de celle de processus adapté à $(\underline{\underline{F}}_t)$ la notion de processus homogène pour une famille donnée d'opérateurs de translation, les classes usuelles de processus adaptés (bien-mesurables, prévisibles...) correspondant à des classes naturelles de processus homogènes, les temps d'arrêt aux temps de retour, etc. Ainsi, de manière curieuse, c'est la structure additive de $\mathbb{R}_+$ qui intervient cette fois.

Le travail d'AZEMA est orienté vers la théorie des processus de Markov : nous allons au contraire essayer, dans cet exposé, d'en mettre en évidence les aspects "généraux". En particulier, nous avons essayé de nous débarrasser de la durée de vie ζ.

Les questions de terminologie ont une très grande importance : nous aurons affaire à quatre types de processus au moins, liés entre eux par des relations de dualité (que l'on exprime au moyen du préfixe co-), et en plus aux types correspondants de mesures aléatoires (processus croissants). Voici nos principaux écarts de la terminologie usuelle :

- Un temps est une v.a. à valeurs dans $[0,+\infty]$.
- Le mot bien-mesurable refuse le préfixe co- : nous le remplaçons systématiquement par le mot optionnel de CHUNG et DOOB.
- Nous introduisons dans cet exposé une classe de processus optionnels

ou prévisibles indépendante de la loi de probabilité utilisée : ceux qu'AZEMA appelle <u>algébriquement</u> optionnels ou prévisibles. Nous les appellerons simplement <u>optionnels</u>, ou <u>prévisibles</u> , tandis que les processus optionnels ou prévisibles usuels, notions relatives à une mesure de base μ, seront appelés μ-<u>optionnels</u>, μ-<u>prévisibles</u>. Cette terminologie est très naturelle, et le lecteur s'y habituera sans peine.

I. OPERATEURS DE MEURTRE

Nous nous donnons un espace mesurable $(\Omega,\underline{\underline{F}}^{o})$ sur lequel nous faisons l'hypothèse suivante (satisfaite par tous les espaces " canoniques " usuels

HYPOTHESE 1. <u>La tribu $\underline{\underline{F}}^{o}$ est séparable, et ses atomes sont les points de Ω. Pour toute loi μ sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^{o})$, il existe un ensemble $\Omega_{\mu}\in\underline{\underline{F}}^{o}$ portant μ, tel que la tribu trace $\underline{\underline{F}}^{o}|_{\Omega_{\mu}}$ soit une tribu de BLACKWELL.</u>

Le point essentiel ici est le théorème de BLACKWELL : si $\underline{\underline{G}}$ est une tribu de BLACKWELL, si $\underline{\underline{H}}$ est une sous-tribu <u>séparable</u> de $\underline{\underline{G}}$, f une fonction réelle $\underline{\underline{G}}$-mesurable, alors

$$(f \text{ est } \underline{\underline{H}}\text{-mesurable}) \Longleftrightarrow (\text{ f est constante sur tout atome de } \underline{\underline{H}})$$

Pour plus de détails, voir Meyer, Probabilités et potentiels, chap.III, n^{os}15-17.

DEFINITION 1. <u>On appelle</u> famille d'opérateurs de meurtre (<u>ou simplement</u> opérateur de meurtre) <u>une famille</u> $(k_t)_{t>0}$ <u>d'applications de</u> Ω <u>dans</u> Ω <u>possédant les propriétés suivantes</u>

$$(1.1)\quad\left|\begin{array}{ll} (1.1.1) & k_s\circ k_t = k_{s\wedge t} \\ (1.1.2) & (t,\omega)\mapsto k_t\omega \text{ est mesurable de } \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^*)\times\underline{\underline{F}}^{o} \text{ dans } \underline{\underline{F}}^{o} \\ (1.1.3) & (k_s\omega=k_s\omega' \text{ pour tout } s<t) \Rightarrow (k_t\omega=k_t\omega'). \end{array}\right.$$

La troisième propriété est ce qui fait (en l'absence d'une durée de vie dans nos axiomes) que nous appelions (k_t) opérateur de 'meurtre' plutôt que "d'arrêt" par exemple.

Nous introduisons maintenant les notations suivantes

- $\underline{\underline{F}}_t^{o} = k_t^{-1}(\underline{\underline{F}}^{o})$ $(t>0)$. D'après (1.1.1) c'est aussi $\underline{\underline{T}}(k_s,s\leq t)$, et la famille $(\underline{\underline{F}}_t^{o})$ est croissante. On peut donc définir les tribus $\underline{\underline{F}}_{t-}^{o}$ pour $t>0$, $\underline{\underline{F}}_{t+}^{o}$ pour $t\geq 0$.
  Noter que (d'après (1.1.3)) $\underline{\underline{F}}_t^{o}$ et $\underline{\underline{F}}_{t-}^{o}$ sont séparables et ont les mêmes atomes : d'après le th. de BLACKWELL elles induisent la même

tribu sur tout espace de BLACKWELL, donc ont même complétée (hyp.1).

- Si μ est une loi sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^{\circ})$, $\underline{\underline{F}}^{\mu}$ est la complétée de $\underline{\underline{F}}^{\circ}$, et $\underline{\underline{F}}^{*}$ la complétée universelle $\cap_{\lambda}\underline{\underline{F}}_{\lambda}$. $\underline{\underline{F}}_{t}^{\mu}$ $(t\geq 0)$ est engendrée par $\underline{\underline{F}}_{t+}^{\circ}$ et tous les ensembles μ-négligeables de $\underline{\underline{F}}^{\mu}$: cette famille satisfait donc aux "conditions habituelles" de la théorie générale des processus.

PROCESSUS OPTIONNELS, ETC

Les définitions suivantes ne font pas intervenir directement l'opérateur de meurtre, mais seulement les tribus $\underline{\underline{F}}_{t}^{\circ}$. L'adjectif algébriquement sera généralement supprimé , mais nous le conserverons dans les abréviations : a.o., a.p. par opposition à μ-o., μ-p..

DEFINITION 2. La tribu $\underline{\underline{O}}^{\circ}$ des processus (algébriquement) optionnels (a.o.) est engendrée sur $\mathbb{R}_{+}\times\Omega$ par les processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ adaptés à la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+}^{\circ})$, dont les trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche .

La tribu $\underline{\underline{P}}^{\circ}$ des processus (algébriquement) prévisibles (a.p.) est engendrée sur $\mathbb{R}_{+}^{*}\times\Omega$ par les processus $(Z_t)_{t>0}$ adaptés à la famille $(\underline{\underline{F}}_{t}^{\circ})$ et à trajectoires continues à gauche .

Un processus est dit μ-optionnel (μ-prévisible) s'il est μ-indistinguable d'un processus a.o. (a.p.).

Cette définition appelle tout de suite une remarque : les deux tribus ne sont pas définies ici sur le même ensemble. La tribu optionnelle concerne $\mathbb{R}_{+}\times\Omega$, la tribu prévisible $\mathbb{R}_{+}^{*}\times\Omega$. Naturellement, on peut restreindre $\underline{\underline{O}}^{\circ}$ à $\mathbb{R}_{+}^{*}\times\Omega$, ou définir $\underline{\underline{P}}^{\circ}$ sur $\mathbb{R}_{+}\times\Omega$ en imposant en 0 une simple condition d'adaptation à $\underline{\underline{F}}_{0+}^{\circ}$. Mais il y a là quelque chose d'artificiel, et cette distinction entre les deux ensembles de temps deviendra essentielle pour la théorie duale.

On sait que la tribu $\underline{\underline{P}}^{\circ}$ est aussi engendrée par les processus prévisibles élémentaires

$$(1.2) \qquad Z_t(\omega)= I_{]a,\infty[}(t)I_A(\omega) \quad , \ A\in\underline{\underline{F}}_{a-}^{\circ}$$

d'où les conséquences suivantes : $\underline{\underline{P}}^{\circ}$ est séparable ; $B(\mathbb{R}_{+}^{*})\times\underline{\underline{F}}_{0+}^{\circ}\subset\underline{\underline{P}}^{\circ}\subset\underline{\underline{O}}^{\circ}|_{\mathbb{R}_{+}^{*}\times\Omega}$.

DEFINITION 3. Un temps T est dit a.o. si l'intervalle $[T,\infty[$ est un ensemble a.o., a.p. si $T>0$ partout, et si $[T,\infty[$ est a.p..

Noter que T est alors $\underline{\underline{F}}^{\circ}$-mesurable.

PROPOSITION 1. *Les processus optionnels pour la famille* $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$ - *au sens usuel* - *sont exactement les processus* μ-*optionnels*. *De même pour les processus prévisibles au sens usuel*.

Tout temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$ *est* μ-*p.s. égal à un temps a.o., et tout temps d'arrêt prévisible* T *de la famille* $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$ *est* μ-*p.s. égal sur* $\{T>0\}$ *à un temps a.p.*.

DEMONSTRATION. Deux résultats sont évidents : d'abord celui qui concerne les processus prévisibles de $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$: les processus prévisibles élémentaires de cette famille sont évidemment μ-indistinguables de processus de la forme (1.2). Ensuite, celui qui concerne les temps d'arrêt T de $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$: on sait en effet que T est égal μ-p.s. à un temps d'arrêt S de la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+}^o)$, et l'intervalle $[S,\infty[$ a une indicatrice adaptée à $(\underline{\underline{F}}_{t+}^o)$, continue à droite et pourvue de limites à gauche.

Pour traiter le cas des processus optionnels de $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$, il suffit d'examiner les indicatrices d'intervalles $[T,\infty[$, où T est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$: nous venons de traiter ce cas.

Enfin, soit T un t.d'a. prévisible de $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$, et soit (T_n) une suite de temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$ annonçant T. Remplaçons par des t.d'a. R_n de la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+}^o)$ égaux μ-p.s. aux T_n. Puis définissons par récurrence $S_1(\omega)=\inf\{R_n(\omega)\}$, $S_n(\omega)=\inf\{R_k(\omega) : R_k(\omega)>S_{n-1}(\omega)\}$. Puis posons $T'(\omega)=\lim_n S_n(\omega)$ sur l'ensemble $\{\forall n,\ S_n(\omega)<S_{n+1}(\omega)\}$, $T'(\omega)=+\infty$ sinon. Alors $T'=T$ μ-p.s. sur $\{T>0\}$, et il est facile de voir que si l'on pose $L_n=S_n$ si $S_n<S_{n+1}$, $+\infty$ sinon, $[T',\infty[$ est l'intersection des $]L_n,\infty[$, d'où il résulte que T' est un temps a.p..

La proposition suivante donne des caractérisations " algébriques" de certaines propriétés de mesurabilité, à la manière de COURREGE et PRIOURET

PROPOSITION 2. *Soit* $(Z_t)_{t>0}$ *un processus a.o.*. *On a les propriétés*

(1.3.1) $(t,\omega)\longmapsto Z_t(\omega)$ *est* $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^*)\times\underline{\underline{F}}^o$-*mesurable* .

(1.3.2) $\forall t>0\ \forall s>t\ \forall\omega\forall\omega'\ (k_s\omega=k_s\omega') \Rightarrow (Z_t(\omega)=Z_t(\omega'))$

équivalente à

(1.3.2') $\forall t>0\ \forall s>t\ \forall\omega$ *on a* $Z_t(\omega)=Z_t(k_s\omega)$.

De même, si (Z_t) *est a.p., on a* (1.3.1) *et*

(1.3.3) $\forall t>0\ \forall\omega\forall\omega'\ (k_t\omega=k_t\omega') \Rightarrow (Z_t(\omega)=Z_t(\omega'))$

équivalente à

(1.3.3') $\forall t>0\ \forall\omega$ *on a* $Z_t(\omega)=Z_t(k_t\omega)$.

Inversement, si (Z_t) *satisfait à* (1.3.1) *et* (1.3.3), *il est* μ-*prévisible pour toute loi* μ (*prévisible si* Ω *est un espace de BLACKWELL*).

DEMONSTRATION. Il n'y a pas lieu d'insister sur (1.3.1), ni sur l'équivalence de (1.3.2-2'), (1.3.3-3'), qui provient de la relation $k_s = k_s \circ k_s$. Pour prouver (1.3.2) , posons $Z_t(\omega)=a$, $H=\{Z_t \in A\}$, ensemble $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$-mesurable qui contient ω . On a $H \in \underline{\underline{F}}^o_s$, donc $H=k_s^{-1}(H)$ et $k_s(\omega) \in H$, donc $Z_t(k_s\omega)=Z_t(\omega)=a$. De même pour (1.3.3).

Pour la fin de l'énoncé, supposons d'abord que $(\Omega, \underline{\underline{F}}^o)$ soit un espace de BLACKWELL. Alors il en est de même de $(\overline{\Omega}, \overline{\underline{\underline{F}}}) = (\mathbb{R}_+^* \times \Omega, \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^*) \times \underline{\underline{F}}^o)$. La tribu $\underline{\underline{P}}^o \subset \overline{\underline{\underline{F}}}$ est séparable, et (t,ω), (t',ω') appartiennent au même atome de $\underline{\underline{P}}^o$ si et seulement si $t=t'$, $k_t\omega = k_t\omega'$ (regarder les processus prévisibles élémentaires). La condition (1.3.3) signifie alors que Z est $\overline{\underline{\underline{F}}}$-mesurable, constant sur les atomes de $\underline{\underline{P}}^o$, donc $\underline{\underline{P}}^o$-mesurable. Si $(\Omega, \underline{\underline{F}}^o)$ n'est pas un espace de BLACKWELL, se restreindre à l'espace de BLACKWELL Ω_μ de l'hypothèse 1, qui porte μ.

PROPOSITION 3. <u>Un temps</u> T <u>est a.o. si et seulement si</u> T <u>est</u> $\underline{\underline{F}}^o$-<u>mesurable et si</u>

(1.4.1) $\quad (t > T(\omega)$ <u>et</u> $k_t\omega = k_t\omega') \Rightarrow (T(\omega) = T(\omega'))$

<u>Si</u> T <u>est a.p.</u>, <u>on a</u>

(1.4.2) $\quad (t>0,\ t \geq T(\omega)$ <u>et</u> $k_t\omega = k_t\omega') \Rightarrow (T(\omega)=T(\omega'))$

<u>Inversement, si</u> T <u>est</u> $\underline{\underline{F}}^o$-<u>mesurable et satisfait à</u> (1.4.2), T <u>est</u> μ-<u>p. pour toute loi</u> μ .

DEMONSTRATION. La partie directe résulte aussitôt de la prop.2, de même que l'assertion finale. Seul le fait que (1.4.1) entraîne que T soit a.o. est nouveau. Or soit $H=\{T<t\} \in \underline{\underline{F}}^o$; (1.4.1) entraîne que H est saturé pour la relation $(k_t\omega = k_t\omega')$; comme $k_t \circ k_t = k_t$, on a $k_t^{-1}(H) = H$; or $k_t^{-1}(H) \in \underline{\underline{F}}^o_t$, et T est donc un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$, donc un temps a.o..

COMMENTAIRE . AZEMA introduit dans sa définition des opérateurs de meurtre une variable aléatoire partout finie, la <u>durée de vie</u> ζ , telle que $\zeta \circ k_t = \zeta \wedge t$. Les familles de tribus dépendent de l'opérateur de meurtre et de ζ , et les temps a.o., a.p. se voient imposer des conditions différentes de comparaison avec 0 et ζ. Il s'agit là d'établir une symétrie avec la théorie des temps cooptionnels et coprévisibles, qu'on va développer au paragraphe II. Je ne vois pas pourquoi on devrait exiger la symétrie : $\mathbb{R}_+^*$, muni de sa structure additive, a une droite et une gauche, et on ne peut espérer une symétrie complète que sur $\mathbb{R}$.

Un exemple simple : si l'on prend les axiomes des opérateurs de meurtre sans durée de vie, $(k_{u+t})_{t>0}$ est un opérateur de meurtre, dont la famille de tribus associée est $(\underline{\underline{F}}^{o}_{u+t})_{t>0}$. Mais si on prend les axiomes avec durée de vie, je ne vois pas comment fabriquer la nouvelle durée de vie ! La durée de vie apparaît donc comme une complication de l'algèbre des opérateurs de meurtre.

PROCESSUS CROISSANTS

Soit (A_t) un processus croissant adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}^{\mu}_{t})$. Choisissons pour tout t rationnel une v.a. B_t égale μ-p.s. à A_t, puis posons pour t réel $C_t = \sup B_s$, s parcourant les rationnels $<t$, puis $D_t=C_{t+}$, et enfin $E_t=D_t-D_0$ si $D_0<\infty$, $E_t=0$ si $D_0=+\infty$. Nous obtenons un processus croissant a.o. indistinguable de (A_t).

Supposons que (A_t) soit prévisible pour la famille $(\underline{\underline{F}}^{\mu}_{t})$. Il en est de même de (E_t), qui se décompose en une somme du type

$$E_t = E^c_t + \sum_n c_n I_{\{t \geqq T_n\}}$$

où les c_n sont des constantes, les T_n des temps μ-prévisibles, et E^c est la partie continue de (E_t). Remplaçons chaque T_n par un temps a.o. qui lui est μ-p.s. égal, et posons

$$A'_t = E^c_t + \sum_n c_n I_{\{t \geqq S_n\}}$$

C'est un processus croissant a.p., mais il n'est pas <u>tout à fait</u> continu à droite : il est continu à droite sur tout intervalle $[0,t[$ tel que $A'_t<\infty$, mais il peut présenter une discontinuité en un unique instant r tel que $A_r<\infty$, $A_{r+}=+\infty$. Du point de vue des mesures, c'est tout de même un processus <u>droit</u>, car il représente la mesure d'un intervalle de la forme $]0,t]$ pour une certaine mesure (non nécessairement finie, mais somme d'une suite de mesures bornées).

II. OPERATEURS DE TRANSLATION

Nous considérons maintenant, sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^{o})$, une famille d'opérateurs de translation (ou plus simplement,"un opérateur de translation" $(\theta_t)_{t\geqq 0}$)

DEFINITION 4 .<u>Un opérateur de translation</u> $(\theta_t)_{t\geqq 0}$ <u>est une famille d'applications de</u> Ω <u>dans</u> Ω <u>possédant les propriétés suivantes</u>

(2.1.1) $\theta_s \circ \theta_t = \theta_{s+t}$ ($s\geqq 0$, $t\geqq 0$)

(2.1) (2.1.2) $(t,\omega) \mapsto \theta_t\omega$ <u>est mesurable de</u> $(\mathbb{R}^*_+ \times \Omega, \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}^*_+)\times\underline{\underline{F}}^{o})$ <u>dans</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}}^{o})$

(2.1.3) $(\Theta_s\omega=\Theta_s\omega'$ <u>pour tout</u> $s>t\ ) \Rightarrow (\Theta_t\omega=\Theta_t\omega')$

Θ_0 n'est pas toujours l'identité, mais c'est le cas le plus fréquent.

Un processus $(Z_t)_{t>0}$ ou $(Z_t)_{t\geq 0}$ est dit <u>homogène</u> si l'on a identiquement $Z_{s+t}=Z_t\circ\Theta_s$ ($s\geq 0$, $t>0$ ou ≥ 0 suivant le cas).

DEFINITION 5. <u>On appelle tribu (algébriquement) coprévisible (a.p̂.) la tribu sur</u> $\mathbb{R}_+\times\Omega$ <u>engendrée par les processus</u> $(Z_t)_{t\geq 0}$ <u>homogènes,</u> $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^o$ <u>-mesurables, à trajectoires continues à droite.</u>

<u>On appelle tribu (algébriquement) cooptionnelle (a.ô.) sur</u> $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$ <u>la tribu engendrée par les processus</u> $(Z_t)_{t>0}$ <u>homogènes,</u> $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^o$<u>-mesurables, dont les trajectoires sont continues à gauche et pourvues de limites à droite sur</u> $\mathbb{R}_+^*$.

La tribu a.p̂. sera notée $\hat{\underline{\underline{P}}}^o$, la tribu a.ô. $\hat{\underline{\underline{O}}}$. Il y aura aussi des processus μ-p̂. et μ-ô. (μ-indistinguables d'a.p̂. ou a.ô.).

On peut naturellement définir la tribu a.p̂. aussi sur $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$, en exigeant seulement la continuité à droite : notons la provisoirement $\hat{\underline{\underline{P}}}^*$, et montrons que $\hat{\underline{\underline{P}}}^*$ est la tribu trace de $\hat{\underline{\underline{P}}}^o$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$. Notons celle-ci $\hat{\underline{\underline{P}}}^{**}$, évidemment contenue dans $\hat{\underline{\underline{P}}}^*$. Soit $(Z_t)_{t>0}$ homogène et continu à droite sur $]0,\infty[$: le processus $(Z_{s+t})_{t\geq 0}$ est, pour tout $s>0$, homogène et continu à droite sur $[0,\infty[$, et lorsque $s\downarrow 0$ il converge vers (Z_t) sur $]0,\infty[$; (Z_t) est donc $\hat{\underline{\underline{P}}}^{**}$-mesurable. Il n'y a aucun inconvénient à noter $\hat{\underline{\underline{P}}}^o$ la tribu a.p̂. sur $]0,\infty[$ aussi : nous venons de voir que

LEMME 1. <u>Pour tout processus</u> $(Z_t)_{t>0}$, <u>a.p̂. sur</u> $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$, <u>il existe une v.a.</u> Z_0 $\underline{\underline{F}}^o$<u>-mesurable telle que</u> $(Z_t)_{t\geq 0}$ <u>soit a.p̂. sur</u> $\mathbb{R}_+\times\Omega$.[1]

Une conséquence immédiate :

LEMME 2. <u>Soit</u> $(Z_t)_{t>0}$ <u>ou</u> $(Z_t)_{t\geq 0}$ <u>un processus a.p̂.. Alors la relation</u> $\Theta_t\omega=\Theta_{t'}\omega'$ ($t,t'>0$ dans le premier cas, ≥ 0 dans le second) <u>entraîne</u> $Z_t(\omega)=Z_{t'}(\omega')$.

(En effet, $Z_t(\omega)=Z_0(\Theta_t\omega)$).

Nous verrons plus loin que dans les cas usuels, un processus a.ô. qui n'est pas a.p̂. <u>ne peut se prolonger en 0</u> de manière à rester homogène.

TEMPS COOPTIONNELS

Nous allons rechercher maintenant les intervalles stochastiques a.ô. ou a.p̂. : cela nous donnera les notions "duales" de celles de temps a.o. ou a.p.

---

1. Voir aussi l'appendice

Nous commençons par le cas a.ô., qui est plus simple :

DEFINITION 6 . Un temps L est dit a.ô. s'il est $\underline{\underline{F}}^{\circ}$-mesurable, et si l'intervalle stochastique $]0,L]$ de $\mathbb{R}_+^* \times \Omega$ est a.ô.

Par exemple, 0 est a.ô.. L'intervalle $]0,L]$ ayant une indicatrice continue à gauche et pourvue de limites à droite, dire qu'il est a.ô. revient à dire qu'il est homogène, et cela s'écrit

(2.2) $$L \circ \Theta_t = (L-t)^+ \text{ pour tout } t \geq 0 \text{ [en particulier, } L = L \circ \Theta_0]$$

Les temps a.ô. sont donc presque exactement les temps de retour de la théorie des processus de Markov - à cela près que ceux ci ne sont en général pas supposés $\underline{\underline{F}}^{\circ}$-mesurables. Avant de commenter ce point, voici quelques faits élémentaires sur les temps cooptionnels : si L et L' sont a.ô., il en est de même de $L \wedge L'$ et $L \vee L'$. Si L est a.ô., $(L-t)^+$ l'est aussi pour tout t. Si des temps L_n sont a.ô. , lim inf L_n et lim sup L_n sont a.ô. Enfin, si L est a.ô., la v.a. obtenue en remplaçant L par 0 sur $\{L=\infty\}$ est aussi a.ô..
Voici le commentaire sur les temps de retour mentionné plus haut.

DIGRESSION. Soit L une v.a. F^*-mesurable satisfaisant à (2.2). Nous allons montrer comment la méthode des limites essentielles de WALSH permet de se ramener - sur un espace un peu réduit - à de vrais temps cooptionnels $\underline{\underline{F}}^{\circ}$-mesurables auxquels s'applique la théorie d'AZEMA.

Soit μ une loi sur Ω, et soit λ la mesure $\int_0^{\infty} e^{-t} \Theta_t(\mu) dt$. Soit M un temps $\underline{\underline{F}}^{\circ}$-mesurable tel que $L=M$ λ-p.s.. Posons

(2.3) $$\overline{L}(\omega) = \lim_{s \downarrow\downarrow 0} \sup \text{ess } M(\Theta_s \omega)$$

C'est un temps $\underline{\underline{F}}^{\circ}$-mesurable. D'autre part, $M \circ \Theta_s = L \circ \Theta_s$ μ-p.s. pour presque tout s donc (Fubini) pour presque tout ω nous avons $M(\Theta_{\cdot}\omega) = L(\Theta_{\cdot}\omega)$ p.p. sur $\mathbb{R}$, donc aussi pour tout s $M(\Theta_{s+t}\omega) = L(\Theta_{s+t}\omega)$ pour presque tout t. Pour un tel ω nous avons quel que soit s

$$\overline{L}(\Theta_s \omega) = \lim_{t \downarrow\downarrow 0} \sup \text{ess } M(\Theta_{s+t}\omega) = \lim_{t \downarrow\downarrow 0} \sup \text{ess } L(\Theta_{s+t}\omega)$$
$$= \lim (L(\omega)-(s+t))^+ = (L(\omega)-s)^+ = L(\Theta_s \omega)$$

Soit alors $\overline{\Omega}$ l'ensemble des ω tels que $\overline{L}(\Theta_s \omega) = (\overline{L}(\omega)-s)^+$ pour tout s. Nous venons de voir que cet ensemble porte μ. Il est stable par les Θ_t, il est $\underline{\underline{F}}^*$-mesurable (c'est même un complémentaire d'ensemble $\underline{\underline{F}}^{\circ}$-analytique) et satisfait donc à l'hypothèse 1. Sur cet ensemble, $\overline{L}$ est un vrai temps a.ô., et on obtient des résultats sur L en appliquant la théorie d'AZEMA à $\overline{L}$.

TEMPS COPREVISIBLES

On a une notion de <u>temps a.p̂.</u> en considérant les temps L tels que l'intervalle $]0,L]$ de $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$ soit a.p̂. : cette notion n'est pas sans intérêt, mais nous ne l'étudierons pas ici, car ce n'est pas la vraie notion de temps a.p̂. Pour trouver celle-ci, nous remarquerons que les temps a.ô. apparaissent naturellement comme les <u>fins</u> d'ensembles homogènes dans $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$: si H est un tel ensemble, et F est sa fin

$$F(\omega) = \sup \{ t : (t,\omega)\in H \} \qquad (\sup \emptyset=0)$$

le fait que $F(\omega)=0$ a une seule signification, le fait que la coupe $H(\omega)$ est vide. En revanche, si H est une partie de $\mathbb{R}_+\times\Omega$, le fait que $F(\omega)=0$ peut signifier, <u>soit</u> que $H(\omega)$ est vide, <u>soit</u> que $H(\omega)=\{0\}$. AZEMA évite cette difficulté en posant $\sup \emptyset = -\infty$, mais ce n'est pas très joli. Je préfère dédoubler le point 0 en deux points 0 et 0_- avec les règles

$$\left| \begin{array}{l} 0_-<0 \\ \text{pour tout } x\in\overline{\mathbb{R}}_+, \text{ tout } t\in\mathbb{R}_+ \text{ , } (x-t)^+=x-t \text{ si } t<x, \ 0 \text{ si } t=x, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0_- \text{ si } t>x \end{array} \right.$$

et $(0_--t)^+ = 0_-$ si $t\geq 0$. Dans ces conditions, on posera $\sup \emptyset=0_-$, et cela présentera bien des avantages. Par exemple, si F est la fin d'un ensemble homogène H de $\mathbb{R}_+\times\Omega$ fermé pour la topologie gauche, nous avons avec les conventions ci-dessus $F\circ\theta_t =(F-t)^+$.

DEFINITION 7. <u>Une v.a.</u> L <u>à valeurs dans</u> $\{0_-\}\cup\overline{\mathbb{R}}_+$ <u>est un temps coprévisible précisé</u> (<u>a.p̂.p.</u>) <u>si l'intervalle stochastique</u> $[0,L]$ <u>de</u> $\mathbb{R}_+\times\Omega$ <u>est un ensemble a.p̂.</u> (naturellement, $[0,0_-]=\emptyset$).

Cela entraîne que L est F°-mesurable, et satisfait à la relation $L\circ\theta_t=(L-t)^+$ avec les conventions ci-dessus.[1]

On définit de manière évidente le <u>graphe</u> de L dans $\mathbb{R}_+\times\Omega$, qu'on note $[L]$: il ne détermine pas uniquement L, car sa coupe par ω est vide si $L(\omega)=+\infty$, et aussi si $L(\omega)=0_-$. Mais en fait la v.a. égale à L sur $\{L<\infty\}$, à 0_- sur $\{L=\infty\}$, est un a.p̂.p. qui admet le même graphe que L : on peut donc se borner, pour l'étude des graphes, aux temps a.p̂.p. <u>finis</u>, et lever l'ambiguité ci-dessus.

Si L est un temps a.p̂.p., la variable aléatoire obtenue en posant $\underline{L}(\omega)=L(\omega)$ si $L(\omega)\neq 0_-$, $\underline{L}(\omega)=0$ si $L(\omega)=0_-$ est un temps a.p̂. - c'est à dire, une v.a. telle que $]0,\underline{L}]$ soit a.p̂. dans $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$. Inversement, on peut montrer grâce au lemme 1 que tout temps a.p̂. $\underline{L}$ peut être "précisé en 0",i.e. qu'il existe au moins un temps a.p̂.p. L égal à $\underline{L}$ sur $\{\underline{L}>0\}$, et égal à 0 ou 0_- sur $\{\underline{L}=0\}$.

1. Nous étudierons la réciproque plus loin.

Voici quelques propriétés élémentaires des temps a.ô. et a.$\hat{p}$.p..

PROPOSITION 4. a) <u>Pour qu'un temps</u> M $\underline{\underline{F}}^{o}$-<u>mesurable soit a.ô., il faut et il suffit qu'il possède la propriété</u>

(2.4) $\forall t\geq 0\ \forall t'>0\ \forall\omega\ \forall\omega'\quad (t<M(\omega),\ \theta_t\omega=\theta_{t'}\omega') \Rightarrow (M(\omega)-t=M(\omega')-t')$

b) <u>Si</u> M <u>est a.$\hat{p}$.p., il possède la propriété</u>

(2.5) $\forall t\geq 0\ \forall t'\geq 0\ \forall\omega\ \forall\omega'\quad (t=M(\omega),\ \theta_t\omega=\theta_t\omega') \Rightarrow (M(\omega')=t')$.

DEMONSTRATION. a) Supposons que M soit a.ô.. La relation $\theta_t\omega=\theta_t\omega'$ entraîne $(M(\omega)-t)^+=(M(\omega)-t')^+$; comme $t<M(\omega)$, ces deux quantités sont >0, d'où $(M(\omega)-t')^+=M(\omega)-t'$ et (2.4).

Pour la réciproque, montrons d'abord que $M(\theta_0 w)=M(w)$ pour tout w. Si $0<M(w)$, appliquer (2.4) avec $\omega=w$, $\omega'=\theta_0\omega$, $t=t'=0$. Si $0<M(\theta_0 w)$ appliquer (2.4) avec $\omega=\theta_0 w$, $\omega'=w$, $t=t'=0$. Enfin, si $0=M(w)=M(\theta_0 w)$...

La relation $M(\theta_r w)=(M(w)-r)^+$ résulte de (2.4) si $r<M(w)$ (prendre $\omega=w$, $t=r$, $t'=0$, $\omega'=\theta_r w$). Supposons $r\geq M(w)$ et montrons qu'il est absurde de supposer $M(\theta_r w)>0$: cela permet en effet d'appliquer (2.4) avec $\omega=\theta_r w$, $t=0$, $t'=r$, $\omega'=w$, d'où $M(\theta_r w)=M(w)-r$, et $M(w)>r$ contrairement à l'hypothèse.

b) ne fait qu'exprimer le lemme 2 appliqué au processus a.$\hat{p}$. $I_{[M]}=I_{[0,M]}\setminus I_{[0,M[}$.

LE RETOURNEMENT DU TEMPS

Nous fixons un temps a.ô. L, <u>partout fini</u> : ce n'est pas une perte de généralité, car on peut remplacer L par 0 sur l'ensemble $\{L=+\infty\}$.

DEFINITION 8. <u>Soit</u> $(Z_t)_{t>0}$ [<u>resp.</u> $(Z_t)_{t\geq 0}$] <u>un processus réel</u> . <u>On appelle processus retourné de</u> Z <u>à</u> L , <u>et on note</u> ${}^{L}\hat{Z}$, <u>le processus</u>

(2.6) $({}^{L}\hat{Z}_t)_{t\geq 0}$: $\quad {}^{L}\hat{Z}_t(\omega) = Z_{L(\omega)-t}(\omega)I_{[0,L(\omega)[}(t)$

<u>resp.</u>

(2.7) $({}^{L}\hat{Z}_t)_{t>0}$: $\quad {}^{L}\hat{Z}_t(\omega) = Z_{L(\omega)-t}(\omega)I_{]0,L(\omega)]}(t)$

On omettra le plus souvent le ^{L} de la notation ${}^{L}\hat{Z}$. Noter l'effet du double retournement : sur $(Z_t)_{t>0}$ cela donne $(Z_t I_{]0,L]}(t))_{t>0}$, et sur $(Z_t)_{t\geq 0}$ on obtient $(Z_t I_{[0,L[}(t))_{t\geq 0}$.

DEFINITION 9. <u>On pose pour tout</u> $t>0$

(2.8) $$ {}^{L}\hat{k}_t(\omega) = \theta_{(L(\omega)-t)^+}(\omega) $$

LEMME 3. <u>La famille</u> $({}^{L}\hat{k}_t)$ <u>est une famille d'opérateurs de meurtre sur</u> Ω. <u>On notera</u> $({}^{L}\hat{\underline{\underline{F}}}{}^{o}_t)$, $({}^{L}\hat{\underline{\underline{F}}}{}^{\mu}_t)$ <u>les familles de tribus correspondantes</u> . <u>Soit</u> $A\in\underline{\underline{F}}^{o}$. <u>Alors</u>

(2.9) $(A\in{}^{L}\hat{\underline{\underline{F}}}{}^{o}_{t+}) \Leftrightarrow (\ A=\theta_0^{-1}(A)$ <u>et</u> $\forall s>0\ A\cap\{L>s+t\}=\theta_s^{-1}(A)\cap\{L>s+t\}\ )$.

DEMONSTRATION. Nous omettrons L de la notation lorsque cela ne prêtera pas à confusion.

La vérification de la mesurabilité de $(t,\omega)\mapsto \hat{k}_t\omega$ est purement de routine. Celle de (1.1.3) s'écrit ainsi : si $t>0$ et

(2.10) $\theta_{(L(\omega)-s)^+}(\omega) = \theta_{(L(\omega')-s)^+}(\omega')$ pour tout $s<t$

alors on a la même égalité pour $s=t$. Appliquons la fonction L aux deux membres de (2.10), il vient

$$(L(\omega)-(L(\omega)-s)^+)^+=(L(\omega')-(L(\omega')-s)^+)^+, \text{ soit } s\wedge L(\omega)=s\wedge L(\omega')$$

pour $s<t$ (donc aussi pour $s=t$). Supposons d'abors $t\leqq L(\omega)$. La relation $t\wedge L(\omega)=t\wedge L(\omega')$ entraîne $t\leqq L(\omega')$. Posons $L(\omega)=r$, $L(\omega')=r'$ et supposons par exemple $r'\geqq r$. (2.10) s'écrit

$$\theta_{r-s}\omega = \theta_{r'-s}\omega' = \theta_{r-s}\theta_{r'-r}\omega' \text{ pour } s<t$$

donc d'après (2.1.3) $\theta_{r-t}\omega = \theta_{r-t}\theta_{r'-r}\omega'$, l'égalité cherchée. Puis supposons $t>L(\omega)$, $t>L(\omega')$: la relation $t\wedge L(\omega)=t\wedge L(\omega')$ donne $L(\omega)=L(\omega')$, et la relation à démontrer s'écrit $\theta_0\omega = \theta_0\omega'$. Mais dans (2.10) nous pouvons prendre $s=L(\omega)=L(\omega')< t$, et cette égalité est bien satisfaite .

La vérification de $\hat{k}_s\hat{k}_t=\hat{k}_{s\wedge t}$ sera seulement esquissée

1) si $L(\omega)\leqq s\wedge t$, $\hat{k}_t\omega=\theta_0\omega$, $L(\hat{k}_t\omega)=L(\omega)$, $\hat{k}_s\hat{k}_t\omega=\theta_0\theta_0\omega=\theta_0\omega=\hat{k}_{s\wedge t}(\omega)$,

2) $s\leqq L(\omega)\leqq t$, $\hat{k}_t\omega=\theta_0\omega$, $L(\hat{k}_t\omega)=L(\omega)$, $\hat{k}_s\hat{k}_t\omega=\theta_{L(\omega)-s}\theta_0\omega =\theta_{L(\omega)-s}\omega=\hat{k}_s\omega$
$= \hat{k}_{s\wedge t}(\omega)$,

3) $t\leqq L(\omega)\leqq s$, $\hat{k}_t\omega=\theta_{L(\omega)-t}(\omega)$, $L(\hat{k}_t\omega)= t$, $\hat{k}_s\hat{k}_t\omega = \theta_{(t-s)^+}\hat{k}_t\omega = \theta_0\hat{k}_t\omega=$
$=\hat{k}_t\omega = \hat{k}_{s\wedge t}(\omega)$

4) $L(\omega) \geqq s\vee t$, $\hat{k}_t\omega=\theta_{L(\omega)-t}(\omega)$, $L(\hat{k}_t\omega)=t$, $\hat{k}_s\hat{k}_t\omega= \theta_{(t-s)^+}\hat{k}_t(\omega) =$
$\theta_{(t-s)^++(L(\omega)-t}(\omega)= \theta_{L(\omega)-(s\wedge t)}\omega =\hat{k}_{s\wedge t}\omega$

Ceci montre bien que nous avons une famille d'opérateurs de meurtre sur Ω. Nous vérifierons (2.9) seulement pour $t=0$: pour passer au cas général, appliquer cela à $L'=(L-t)^+$, ce qui remplace l'opérateur de meurtre $(\hat{k}_s)_{s>0}$ par $(\hat{k}'_s)=(\hat{k}_{s+t})$, et $\hat{\underline{\underline{F}}}^o_{0+}$ par $\hat{\underline{\underline{F}}}'^o_{0+} =\hat{\underline{\underline{F}}}^o_{t+}$.

Que signifie $A\in\hat{\underline{\underline{F}}}^o_{0+}$? Compte tenu de la relation $k_r\circ k_r=k_r$, cela peut s'écrire $A\in\underline{\underline{F}}^o$, $A= \hat{k}_r^{-1}(A)$ pour tout $r>0$, ou encore

$$(\omega\in A) \iff (\theta_{(L(\omega)-r)^+}(\omega) \in A) \text{ pour tout } r>0$$

Lorsque $r\geqq L(\omega)$, cette relation s'écrit $A=\theta_0^{-1}(A)$. Lorsque $r=L(\omega)-s$, $0<s<L(\omega)$, elle s'écrit $(\omega\in A\cap\{L>s\})\iff(\omega\in\theta_s^{-1}(A)\cap\{L>s\})$, et cela achève la démonstration.

Nous arrivons maintenant au lemme crucial sur le retournement : c'est lui qui nous permet, lorsqu'il y a suffisamment de temps a.ô. de ramener la théorie " duale" de la théorie générale des processus à la théorie ordinaire. Nous omettons le L de la notation $L_{\hat{k}}$, et les mots a.p., a.o. sont pris au sens de cet opérateur de meurtre.

PROPOSITION 5. a) Soit $(Z_t)_{t>0}$ un processus $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^*)\times\underline{\underline{F}}^o$-mesurable , tel que $Z_t=Z_t\circ\Theta_0$ identiquement pour tout t . Alors le processus $(Z_tI_{\{t\geqq L\}})$ est a.o., et le processus $(Z_tI_{\{t>L\}})$ est a.p.. En particulier, L est un temps a.o..

b) Soit $(Z_t)_{t>0}$ un processus $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^*)\times\underline{\underline{F}}^o$-mesurable, nul sur $]L,\infty[$. Pour que $(Z_t)_{t>0}$ soit a.ô., il faut et il suffit que son retourné $(\hat{Z}_t)_{t\geqq 0}$ soit a.o..

c) Soit $(Z_t)_{t\geqq 0}$ un processus $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^o$-mesurable, nul sur $[L,\infty[$. Pour que $(Z_t)_{t\geqq 0}$ soit a.p̂., il faut et il suffit que son retourné $(\hat{Z}_t)_{t>0}$ soit a.p..

DEMONSTRATION. a) Vérifions que $(Z_tI_{\{t\geqq L\}})$ est adapté à $(\hat{\underline{\underline{F}}}^o_{t+})$. Comme $Z_t=Z_t\circ\Theta_0$, cela s'écrit

$$\forall s>0,\ Z_tI_{\{t\geqq L\}}I_{\{L>s+t\}} = Z_t\circ\Theta_sI_{\{t\geqq L\circ\Theta_s\}}I_{\{L>s+t\}}$$

Mais $\{L>s+t\}\Leftrightarrow\{L\circ\Theta_s>t\}$, les deux membres sont donc nuls.
La tribu $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^*)\times\underline{\underline{F}}^o$ est engendrée par des processus J_t de la forme $I_{[a,\infty[}(t)I_M(\omega)$ $(a>0,\ M\in\underline{\underline{F}}^o)$, dont les trajectoires sont continues à droite et limitues à gauche. Posons $Z_t=J_t\circ\Theta_0$; le processus $Z_tI_{\{t\geqq L\}}$ est continu à droite et limitu à gauche, adapté à la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}^o_{t+})$ d'après ce qui précède, donc a.o.. L'énoncé s'en déduit pour le cas a.o., et le cas a.p. se traite de même.

b) Soit $(Z_t)_{t>0}$ un générateur de la tribu a.ô. : il est homogène, continu à gauche, limitu à droite sur $]0,\infty[$; son retourné $(\hat{Z}_t)$ est alors nul sur $[L,\infty[$, continu à droite, limitu à gauche sur $]0,L[$, et il est évident d'après (2.9) qu'il est adapté à la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}^o_{t+})$. Or d'habitude la continuité à droite seule, avec l'adaptation, ne suffit pas à entraîner qu'un processus est a.o., mais seulement qu'il est μ-o. pour toute loi μ (cf. [ ], chap.VIII, n°16, remarque c)). Mais ici, la limite à gauche ne peut manquer que pour un seul instant, et la récurrence transfinie de la démonstration citée s'arrête à un ordinal fixe. Le processus est donc bien a.o.. On passe de là aux processus a.ô. quelconques.

Inversement, soit $(Z_t)_{t\geqq 0}$ un générateur de la tribu a.o. : adapté, continu à droite, limitu à gauche. Alors son retourné $(\hat{Z}_t)_{t>0}$ est homogène, continu à gauche, limitu à droite (y compris en 0 !). Seule l'homogénéité demande une démonstration. L'adaptation entraîne d'abord que $Z_t\circ\Theta_0=Z_t$, d'où le même résultat pour $\hat{Z}$. Ensuite, vérifions que $\hat{Z}_{t+s}=\hat{Z}_t\circ\Theta_s$ pour $t>0$, $s>0$. Les deux membres sont nuls sur l'ensemble $\{L\leq t+s\}=\{L\circ\Theta_s\leq t\}$, et leur égalité sur $\{L>t+s\}=\{L\circ\Theta_s>t\}$ est simplement l'adaptation. On étend cela aux processus a.o. quelconques, à partir du cas des générateurs.

Pour voir maintenant que si $(Z_t)_{t>0}$ est nul sur $[L,\infty[$, et $(\hat{Z}_t)_{t\geq 0}$ est a.o., alors $(Z_t)_{t>0}$ est a.ô., on procède par double retournement, car $Z=\hat{\hat{Z}}$.

c) Même démonstration, un tout petit peu plus simple.

APPLICATIONS

Nous allons passer en revue la traduction, grâce à la prop.5, des principaux théorèmes de la théorie générale des processus. La loi μ reste fixée sur Ω, et si A est une partie de $\mathbb{R}_+\times\Omega$ ou de $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$, nous notons $\overline{\mu}(A)$ la probabilité extérieure, pour μ, de la projection de A.

PROPOSITION 6. a) <u>La tribu trace de $\hat{\underline{\underline{P}}}^o$ sur l'intervalle stochastique (a.p̂.)</u> $[0,L[$ <u>de</u> $\mathbb{R}_+\times\Omega$ <u>ou de</u> $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$ <u>est séparable, et la seconde est contenue dans la tribu trace de</u> $\hat{\underline{\underline{O}}}^o$ <u>sur</u> $]0,L[$.

b) <u>Soient</u> (t,ω) <u>et</u> (t',ω') <u>deux points de l'intervalle</u> $[0,L[$ <u>de</u> $\mathbb{R}_+\times\Omega$. <u>Alors ces deux points appartiennent au même atome</u>[1] <u>de</u> $\hat{\underline{\underline{P}}}^o$ <u>si et seulement si</u> $\Theta_t\omega=\Theta_{t'}\omega'$.

DEMONSTRATION. a) La tribu trace de $\hat{\underline{\underline{P}}}^o$ sur $[0,L[$ s'identifie par retournement à la tribu a.p. de l'intervalle stochastique (prévisible) $]0,L]$ pour l'opérateur $(\hat{k}_t)$. Elle est donc séparable, et on a le même résultat sur l'intervalle ouvert.

Dire que (t,ω) et (t',ω') appartiennent au même atome de $\hat{\underline{\underline{P}}}^o$ revient à dire que $(L(\omega)-t,\omega)$ et $(L(\omega')-t',\omega')$ appartiennent au même atome de la tribu $\underline{\underline{P}}^o$ de l'opérateur de meurtre $(\hat{k}_s)$. Cela revient à dire que $L(\omega)-t$ et $L(\omega')-t'$ ont une valeur commune u, et que $\hat{k}_u(\omega)=\hat{k}_u(\omega')$. Mais $\hat{k}_u(\omega)=\Theta_t\omega$, $\hat{k}_u(\omega')=\Theta_{t'}\omega'$, et d'autre part l'égalité $\Theta_t\omega=\Theta_{t'}\omega'$ <u>entraîne</u> $L(\Theta_t\omega)=L(\Theta_{t'}\omega')$, soit ici $L(\omega)-t=L(\omega')-t'$. Cela prouve b).

Reste la dernière partie de a) : notons que $]0,L[$ est réunion d'intervalles $]0,(L-t)^+]$, donc a.ô.. Soit A un élément de la tribu trace $\hat{\underline{\underline{P}}}^o|_{]0,L[}$; A est trace d'un élément B de $\hat{\underline{\underline{P}}}^o$ contenu dans $[0,L[$. Le retourné $\hat{B}$ de B est dans $\underline{\underline{P}}^o$ pour (k_s), contenu dans $]0,L]$; $\hat{B}$ est alors a.o., et le reste si on le considère comme sous-ensemble de $[0,L]$, i.e. comme processus défini pour $t\geq 0$, nul pour $t=0$. Soit alors C le retourné de $\hat{\hat{B}}$: c'est un ensemble de $\hat{\underline{\underline{O}}}^o$, et sa trace sur $]0,L[$ est A.

1. **Une conséquence : si X est $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable, le processus $X\circ\Theta_t$ est constant sur les atomes de $\hat{\underline{\underline{P}}}^o$, donc coprévisible sur $[0,L[$.**

PROPOSITION 7. a) Soit T un temps $\underline{\underline{F}}^{\circ}$-mesurable. Alors T est a.o. pour l'opérateur de meurtre $(\hat{k}_t)$ si et seulement si le temps

(2.11) $\hat{T} = (L-T)^+$ [$L-T$ si $T \leqq L$, 0 si $T \geqq L$]

est a.ô..

b) Soit T un temps $\underline{\underline{F}}^{\circ}$-mesurable, partout >0. Alors T est a.p. pour l'opérateur de meurtre $(\hat{k}_s)$ si et seulement si le temps

(2.11') $\hat{T}=(L-T)^+$ dans $\{0_-\}\cup\mathbb{R}_+$ [$L-T$ si $T \leqq L$, 0_- si $T \geqq L$]

est un temps a.p̂. précisé.

DEMONSTRATION. Pour éviter au lecteur une crise aux conséquences imprévisibles, on fait remarquer tout de suite que les propositions 5 et 7 n'ont pas exactement la même forme : 5 donne des conditions pour que quelque chose soit a.ô., a.p̂., et 7 des conditions pour que quelque chose soit a.o., a.p.. Par exemple, un processus a.p. est tout naturellement défini pour $t>0$ (et nul sur $]L,\infty[$) alors qu'un processus a.p̂. est tout naturellement défini pour $t \geqq 0$ (et nul sur $[L,\infty[$).

Ceci dit, il n'y a aucun problème pour le temps T_A , où $A=\{T \geqq L\}$ dans le premier cas, $\{T>L\}$ dans le second cas, et il suffit de considérer T_{A^c} . On applique alors la prop.5 au graphe.

PROPOSITION 8. a) Soit M un temps a.p̂. précisé, tel que $M<L$ partout (en particulier, $M=0_-$ sur $\{L=0\}$). Il existe alors une suite décroissante (M_n) de temps a.ô. (dépendant de la mesure μ), tels que l'on ait partout $M_n \leqq L$, partout $M_n > M_{n+1}$ sur $\{M_n>0\}$, et

$$M_n>0 \text{ pour tout } n, \ \lim_n M_n = M \quad \mu\text{-p.p. sur } \{M \geqq 0\}.$$

b) Soit M une v.a. $\underline{\underline{F}}^{\circ}$-mesurable à valeurs dans $\{0_-\}\cup\mathbb{R}_+$, telle que $M<L$ partout, et que $M \circ \theta_t = (M-t)^+$ identiquement (le $^+$ étant pris dans $\{0_-\}\cup\mathbb{R}_+$). Alors M est égale μ-p.p. à un temps a.p̂. précisé.

[Ces propriétés peuvent aussi s'appliquer , avec quelques changements, à des temps ordinaires, mais nous laisserons cela].

DEMONSTRATION. a) Nous posons $T=L-M$ si $M \geqq 0$, $T=+\infty$ si $M=0_-$; alors T est partout >0, c'est un temps a.p. partout >0, et il existe une suite ↑ (T_n) de temps a.o., partout >0, tels que $T_n < T_{n+1}$ sur $\{T_n<\infty\}$, et que $\lim_n T_n = T$ μ-p.p.. Posons maintenant

$$M_n = L-T_n \text{ si } T_n \leqq L \quad , \ M_n=0 \quad \text{si } T_n>L$$

Les M_n répondent à la question. Nous laisserons b) de côté : on se ramène à la prop.2 par retournement. Grâce à la méthode des limites essentielles, on a d'ailleurs des résultats analogues pour des temps $\underline{\underline{F}}^*$-mesurables.

Nous en arrivons maintenant aux théorèmes de section et de projection.

PROPOSITION 9. a) <u>Soit</u> A <u>un ensemble a.ô. contenu dans</u> $]0,L]$ <u>et soit</u> $\varepsilon>0$. <u>Il existe un temps a.ô. partout fini</u> M <u>tel que</u>

1) $M(\omega)>0 \Rightarrow (M(\omega),\omega)\in A$ (<u>donc</u> $M(\omega)\leqq L(\omega)$)

2) $P\{M>0\} \geqq \overline{\mu}(A)-\varepsilon$.

b) <u>Si</u> A <u>est a.p̂. contenu dans</u> $[0,L[$, <u>il existe un temps a.p̂. précisé partout fini</u> M <u>tel que</u>

1) $M(\omega)\geqq 0 \Rightarrow (M(\omega),\omega)\in A$ (<u>donc</u> $M(\omega)<L(\omega)$)

2) $P\{M\geqq 0\} \geqq \overline{\mu}(A)-\varepsilon$.

DEMONSTRATION. Nous ne donnerons aucun détail : par retournement du temps, c'est le théorème de section usuel (à cela près qu'il faut choisir des temps <u>algébriquement</u> optionnels et prévisibles pour les sections : ce n'est pas difficile).

PROPOSITION 10. a) <u>Soit</u> $(Z_t)_{t>0}$ <u>un processus</u> $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^*)\times\underline{\underline{F}}^o$<u>-mesurable borné</u>. <u>Il existe alors un processus</u> $(Z_t^!)_{t>0}$, <u>unique à</u> μ-<u>évanescence près, tel que</u>

1) $(Z_t^!)$ <u>soit a.ô., porté par</u> $]0,L]$

2) <u>Pour tout temps a.ô.</u> M <u>tel que</u> $M\leqq L$, <u>on ait</u>

(2.12) $$E_\mu[Z_M I_{\{M>0\}}] = E_\mu[Z_M^! I_{\{M>0\}}]$$

b) <u>Soit</u> $(Z_t^!)_{t\geqq 0}$ <u>un processus</u> $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^o$<u>-mesurable borné</u>. <u>Il existe un processus</u> $(Z_t^{"})_{t\geqq 0}$ <u>unique à évanescence près, tel que</u>

1) $(Z_t^{"})$ <u>soit a.p̂. et porté par</u> $[0,L[$

2) <u>Pour tout temps a.p̂. précisé</u> M <u>partout</u> $<L$, <u>on ait</u>

(2.12') $$E_\mu[Z_M I_{\{M\geqq 0\}}] = E_\mu[Z_M^{"} I_{\{M\geqq 0\}}]$$

La démonstration se fait par retournement, à partir du th. de projection classique. Si le processus $(Z_t)_{t>0}$ est continu à gauche (resp. $(Z_t)_{t\geqq 0}$, à droite) , le processus $(Z_t^!)$ est μ-indistinguable de continu à gauche (resp. $(Z_t^{"})$, à droite) : quitte à se réduire à un ensemble Θ-stable portant μ, on peut se ramener à des projections satisfaisant à ces propriétés sans restriction.

REMARQUE. J'ignore tout à fait si l'on peut avoir des résultats intéressants pour les processus a.p̂. indexés par $\mathbb{R}_+^*$ et les temps a.p̂..

HYPOTHESE DE TRANSIENCE

Nous dirons que l'opérateur de translation $(\Theta_t)_{t\geqq 0}$ est <u>transient</u> s'il existe des temps a.ô. L_n , partout finis, tels que $\sup_n L_n = +\infty$. Si ce sup est seulement μ-p.s. égal à $+\infty$, on dira que l'opérateur est <u>μ-transient</u> , mais on se ramène aussitôt au cas transient en se restreignant à un ensemble Θ-stable qui porte μ .

On peut naturellement se ramener au cas où les L_n croissent. Un argument très simple permet alors d'étendre la proposition 9 (théorème de section) à un ensemble A a.ô. dans $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$, ou a.p̂. dans $\mathbb{R}_+\times\Omega$. De même, un argument simple de recollement permet d'étendre le th. de projection, sans condition de support pour les projections, de sorte que les relations (2.12) et (2.12') aient lieu pour des temps a.ô., a.p̂.p finis quelconques.

Nous ferons dans toute la suite l'hypothèse de transience

Les processus $(Z_t^!)_{t>0}$, $(Z_t^{\bullet})_{t\geq 0}$ construits par recollement à partir de la prop.10 sont appelés respectivement, dans ce cas, la projection cooptionnelle et la projection coprévisible de (Z_t). Nous les désignerons dans toute la suite par les notations $(Z_t^{\hat{o}})$, $(Z_t^{\hat{p}})$, et nous utiliserons les notations correspondantes (Z_t^{o}), (Z_t^{p}) pour les projections classiques relatives à une famille de tribus.

REMARQUE. Dans la théorie d'AZEMA, un temps a.ô. partout fini ζ joue un rôle particulier, on ne s'intéresse qu'aux processus a.ô. à support dans $]0,\zeta]$, aux processus a.p̂. à support dans $[0,\zeta[$. En fait, lorsque ζ est vraiment la durée de vie d'un processus de Markov canonique, l'hypothèse de transience n'est pas satisfaite, car aucun temps a.ô. partout fini ne peut dépasser ζ. Cependant, dans le cas markovien, il est facile de se ramener au cas transient, en remplaçant le point ∂ par une demi-droite sur laquelle les particules défuntes se translatent uniformément pour l'éternité. Une construction analogue vaut dans la situation indiquée par AZEMA.

Soit Ω_1 l'ensemble $\{\zeta>0\}$, et soit $\Omega_2=\{\zeta=0\}$. Formons l'ensemble $\bar{\Omega} = (\Omega_1\times\{0\})\cup(\Omega_2\times\mathbb{R}_+)$, muni de sa tribu $\underline{\underline{F}}^{o}$ évidente. Soit $\bar{\mu}$ la mesure image de μ par l'application $\omega\mapsto(\omega,0)$. Nous posons

$$\bar{\theta}_t(\omega,s) = (\theta_t\omega \ , \ s+(t-\zeta(\omega))^+)$$

Il est très facile de voir que c'est un opérateur de translation. En outre, pour tout $r\geq 0$, le temps $L_r(\omega,s) = \zeta(\omega)+(r-s)^+$ est un temps a.ô. partout fini, aussi grand qu'on veut, et l'opérateur $(\bar{\theta}_t)$ est donc transient. On peut alors retrouver la théorie d'AZEMA en appliquant la théorie que nous développons ici, et en se restreignant à $]0,L_0]$ ou $[0,L_0[$.

III. FONCTIONNELLES ADDITIVES

Nous allons maintenant passer du point de vue des processus au point de vue "dual" des mesures aléatoires, et commencer par une assez longue digression dans la théorie générale des processus sous sa forme traditionnelle.

PROJECTIONS DE MESURES

Soient μ une loi fixe sur Ω, et λ une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ ou $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$. Nous dirons que λ et μ sont <u>**compatibles**</u> **si λ ne charge pas les ensembles μ-évanescents. Dans les quelques explications qui suivent, nous supposons que λ est bornée, et compatible avec μ.**

Il est tout naturel de caractériser une mesure λ sur $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$ au moyen du processus croissant $(A_t)_{t\geq 0}$, où A_t est la densité de la mesure $B\mapsto \lambda(]0,t]\times B)$ par rapport à μ . Le procédé canonique pour construire une bonne version de cette densité est le suivant : on commence par prendre une version $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable arbitraire de cette densité pour t rationnel (soit A_t^1). On la rend croissante en prenant $A_t^2 = \sup A_r^1$ (r rationnel < t) , continue à droite en prenant $A_t^3=A_{t+}^2$, enfin, on construit $A_.(\omega)$ en remplaçant $A_.^3(\omega)$ par 0 si $A_{0+}^3(\omega)\neq 0$. Si l'on veut construire une mesure sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$, on utilise un processus croissant analogue, continu à droite, mais **sans** exiger que $A_0=0$: A_0 représente alors la densité de $B\mapsto \lambda(\{0\}\times B)$, et A_t celle de $B\mapsto \lambda([0,t]\times B)$.

Mais il importe de remarquer qu'on peut tout aussi bien définir λ au moyen du processus croissant continu <u>à gauche</u> (A_t), qui représente la densité de $B\mapsto\lambda(]0,t[\times B)$ dans le premier cas, de $\lambda([0,t[\times B)$ dans le second. Le procédé qui permet d'en construire de bonnes versions est même un peu plus simple, et le seul défaut de ce procédé est de n'être pas usuel.

Dans toutes les situations, le point à retenir est le fait que l'on représente λ au moyen d'une désintégration : $\lambda=\int\mu(d\omega)\lambda_t\otimes\varepsilon_\omega$, où λ_t est une mesure sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_+$. Le processus croissant n'est qu'un moyen de décrire la mesure $d\lambda_t(\omega)= dA_t(\omega)$, et pour cette représentation on peut utiliser, soit le processus croissant continu à droite ("droit") , soit le continu à gauche ("processus croissant gauche").

Munissons $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$ d'une famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t^o)$, associée par exemple à un opérateur de meurtre (k_t), et que nous complèterons et rendrons continue à droite de la manière usuelle. Le fait que la projection de λ sur Ω soit absolument continue par rapport à μ nous permet de définir $<Z,\lambda>$, où Z est une classe de processus indistinguables pour μ. Cela nous permet de définir les <u>projections</u> d'une mesure λ, soit sur $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$, soit sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$:

<u>Projection prévisible</u>, définie pour tout processus Z borné par

$$<\lambda^p,Z> = <\lambda,Z^p> ,$$

<u>Projection optionnelle</u>, définie de même par $<\lambda^o,Z> = <\lambda,Z^o>$.

Une mesure λ est dite prévisible (optionnelle) si $\lambda=\lambda^p$ (λ^o), i.e. si elle commute à la projection correspondante. Il est bien connu que λ est prévisible (optionnelle) si et seulement si le processus croissant droit correspondant est μ-prévisible (resp. μ-optionnel, ce qui signifie simplement adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$). Nous avons vu plus haut comment on peut alors en construire des versions a.p. ou a.o..

Le processus croissant droit associé à la projection prévisible (optionnelle) de λ, associée elle même au processus croissant droit A, n'est pas la projection prévisible A^p (optionnelle A^o) de A : celle-ci n'est pas un processus croissant. Nous l'appellerons la compensatrice prévisible (optionnelle) de A, notée $\tilde{A}^p$, $\tilde{A}^o$ (dans le livre de DELLACHERIE, le mot employé est projection duale). On a des considérations analogues pour les processus croissants gauches.

MESURES ALEATOIRES HOMOGENES, FONCTIONNELLES ADDITIVES

Nous passons maintenant à la situation d'un espace $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$ muni d'un opérateur de translation que nous supposerons transient . Soit μ une loi sur Ω, qui reste fixée pour l'instant. Comme nous ne savons parler que de la projection cooptionnelle d'un processus $(Z_t)_{t>0}$, de la projection coprévisible d'un processus $(Z_t)_{t\geq 0}$, une mesure bornée λ compatible avec μ n'a jamais qu'une seule projection :

- Si λ est une mesure sur $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$, une projection cooptionnelle $\lambda^{\hat{o}}$ définie par $<Z,\lambda^{\hat{o}}>=<Z^{\hat{o}},\lambda>$ (et λ est dite cooptionnelle si $\lambda=\lambda^{\hat{o}}$)
- Si λ est une mesure sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$, une projection coprévisible $\lambda^{\hat{p}}$ définie par $<Z,\lambda^{\hat{p}}> = < Z^{\hat{p}},\lambda >$ (et λ est dite coprévisible si $\lambda=\lambda^{\hat{p}}$).

Cette terminologie n'est pas absolument correcte : le fait d'être coprévisible, par exemple, n'est pas vraiment une propriété de λ, mais une propriété du couple (μ,λ).

Nous allons décrire maintenant les désintégrations de mesures cooptionnelles ou coprévisibles. Pour comprendre bien la situation, il faut penser, non pas en termes de processus croissants, mais en termes de mesures aléatoires. Précisons la terminologie : une mesure aléatoire bornée sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$ est un noyau borné de $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$ dans $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$ muni de sa tribu borélienne (la positivité est sous entendue). une mesure aléatoire est un noyau de $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$ dans $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$, $\omega\mapsto\lambda(\omega,dt)$, qui peut s'écrire comme une somme dénombrable de noyaux bornés. C'est toujours le cas si la mesure aléatoire est finie (masse totale finie pour tout ω) . L'intégrale de la mesure aléatoire est la mesure, compatible avec μ

$$< Z,\lambda > = \int\mu(d\omega)\int Z_s(\omega)\lambda(\omega,ds)$$

λ n'est pas nécessairement bornée, mais elle est somme dénombrable de mesures bornées, et à ce titre elle admet une projection (coprévisible ou cooptionnelle suivant le cas).

Les définitions d'homogénéité suivantes sont empruntées à BENVENISTE et JACOD.

DEFINITION 10. <u>Une mesure aléatoire</u> $\omega \longmapsto \lambda(\omega,dt)$ <u>est dite</u> homogène <u>si l'on a pour tout</u> ω <u>et tout</u> $t \geq 0$

<u>dans le cas de</u> $\mathbb{R}_+^*$: $\int_{]0,\infty[} f(s)\lambda(\theta_t\omega,ds) = \int_{]t,\infty[} f(s-t)\lambda(\omega,ds)$

<u>dans le cas de</u> $\mathbb{R}_+$: $\int_{[0,\infty[} f(s)\lambda(\theta_t\omega,ds) = \int_{[t,\infty[} f(s-t)\lambda(\omega,ds)$

Lorsque la mesure aléatoire est finie, on peut la caractériser au moyen du processus croissant droit[1](gauche) associé, et l'homogénéité se traduit par la propriété d'additivité du processus croissant A, la même dans les deux cas :

$$A_{t+s}(\omega) = A_t(\omega) + A_s(\theta_t\omega)$$

C'est cette identité de forme dans les deux cas qui fait l'intérêt du processus croissant gauche. Hélas ! AZEMA a ici confondu les deux mains, appelant fonctionnelles additives gauches celles qui sont continues à droite.

Voici le théorème fondamental d'AZEMA sur les mesures. Nous l'établissons sous hypothèse de transience.

PROPOSITION 11. <u>Soit</u> λ <u>une mesure bornée compatible avec</u> μ <u>sur</u> $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$ ($\mathbb{R}_+\times\Omega$). <u>Pour que</u> λ <u>soit cooptionnelle</u> (<u>coprévisible</u>), <u>il faut et il suffit que</u> λ <u>admette une désintégration homogène</u>.

DEMONSTRATION. Traitons par exemple le cas coprévisible. Soit L un temps a.ô. partout fini : nous allons supposer d'abord que λ est portée par $[0,L[$, et utiliser le retournement du temps.

Définissons une mesure $\hat{\lambda}$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$ de la manière suivante : si (Z_t) $(t>0)$ est un processus $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^*)\times\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable, nous notons $(\hat{Z}_t)_{t\geq 0}$ son retourné (nul sur $[L,\infty[$) qui est aussi mesurable, et posons

$$< Z,\hat{\lambda}> = <\hat{Z},\lambda>$$

Cette mesure $\hat{\lambda}$ est portée par $]0,L]$. Dire que λ (portée par $[0,L[$) commute avec la projection coprévisible équivaut à dire que $\hat{\lambda}$ commute avec la projection prévisible de l'opérateur $(\hat{k}_t)$ (prop.9 et 10), donc que $\hat{\lambda}$ admet une désintégration $\hat{\lambda}(\omega,dt)$ possédant la propriété suivante :

---

1. En général, nous appellerons processus droit le processus $\lambda(\omega,]0,.])$ processus gauche $\lambda(\omega,[0,.[)$, qui ne sont pas nécessairement continus à droite (à gauche) si λ n'est pas finie.

$\hat\lambda$ est une somme de mesures $\hat\lambda_n$ finies, dont les processus droits $\hat A^n$ associés sont algébriquement prévisibles pour $(\hat k_t)$ (cf. la fin du § 1).

Comme $\hat\lambda$ est portée par $]0,L]$, ensemble a.p. pour $(\hat k_t)$, on peut supposer aussi que $\hat A^n_\infty = \hat A^n_L$ identiquement.

Si $t \geq L(\omega)$, on a $L(\theta_t\omega)=0$, donc $\hat A^n_\infty(\omega)=0$. Si $t<L(\omega)$, soit $s=L(\omega)-t$. On a en utilisant la propriété a.p.

$$\hat A^n_\infty(\theta_t\omega) = \hat A^n_L(\theta_t\omega) = \hat A^n_{L(\omega)-t}(\theta_t\omega) = \hat A^n_s(\theta_t\omega) = \hat A^n_s(\hat k_s\theta_t\omega) = \hat A^n_s(\hat k_s\omega) = \hat A^n_s(\omega)$$

Cela montre que le processus $(\hat A^n_\infty\circ\theta_t)$ est continu à gauche sur $]0,L[$, avec une limite à gauche en L nulle, qu'il est nul sur $[L,\infty[$, et décroissant. Le processus $A^n_t = A^n_\infty - A^n_\infty\circ\theta_t$ est alors croissant, nul pour $t=0$, continu à gauche sur $]0,\infty[$. On vérifie aussitôt que $A^n_\infty = \hat A^n_\infty$, et la propriété d'additivité.

Pour avoir la désintégration homogène cherchée, on somme les $d\hat A^n_\cdot$ en n . Ceci règle le cas où λ est portée par $[0,L[$. Pour passer au cas général, on utilise l'hypothèse de transience : on coupe λ en mesures $\lambda.I_{[L_n,L_{n+1}[}$ qui commutent avec la projection coprévisible, et on somme à nouveau.

IV. APPLICATIONS AUX PROCESSUS DE MARKOV

Les résultats de ce paragraphe sont vraiment des applications très frappantes de la théorie générale qui précède. Mais il faut aussi que le lecteur ait le plaisir de lire AZEMA lui-même. Je vais donc présenter ces applications avec un minimum d'indications de démonstrations.

Nous allons considérer un processus de Markov droit (X_t) à valeurs dans un espace d'états E, dont nous désignerons par F un compactifié de RAY. Nous changerons d'emblée la topologie de E et sa tribu borélienne, en les remplaçant par la topologie et la tribu héritées de F. L'espace Ω de la réalisation sera celui des applications de $\mathbb{R}_+$ dans E continues à droite, admettant des limites à gauche dans $E\cup B$ (B est l'ensemble des points x de $F\setminus E$ telles que $\varepsilon_x P_0$ soit portée par E). On supposera que pour toute loi α sur E l'opérateur (θ_t) est P^α-transient au sens donné à ce terme au § 2 .

COMMUTATION DE PROJECTIONS

Recopions quelques résultats plus ou moins connus de la théorie des processus de Markov.

A) Soit $(Z_t)_{t>0}$ ou $(Z_t)_{t\geq 0}$ un processus mesurable positif. Alors ses projections optionnelle et prévisible pour la mesure P^α sont indépendantes de la loi initiale α, et données par des noyaux.

Rappelons comment on fait cela (formule de DAWSON). Formons pour chaque t la fonction $(\omega,\omega')\mapsto Z_t(\omega/t/\omega')$ [notation expliquée dans l'exposé " ensembles aléatoires markoviens homogènes III"], puis les fonctions

(4.1) $$F(\omega,t,x) = E^x[Z_t(\omega/t/.)] \quad x\varepsilon E$$

(4.2) $$G(\omega,t,x) = \int P_0(x,dy)F(\omega,t,y) \quad x\varepsilon E\cup B$$

alors les projections cherchées sont les processus

(4.3) $$Z_t^o(\omega) = F(\omega,t,X_t(\omega)),\ Z_t^p(\omega) = G(\omega,t,X_{t-}(\omega)).$$

B) Supposons que $(Z_t)_{t\geqq 0}$ soit a.$\hat{p}$.. Alors $Z_t=Z_0\circ\theta_t$, et la projection optionnelle $(Z_t^o)_{t\geqq 0}$ est le processus $(f\circ X_t)_{t\geqq 0}$, où $f=E^\bullet[Z_0]$ est borélienne. Deux conséquences :

- cette projection est <u>encore</u> coprévisible,
- si $(Z_t)_{t\geqq 0}$ est à la fois a.$\hat{p}$. et a.o., il est indistinguable - pour toute loi P^α- d'un processus de la forme $(f\circ X_t)_{t\geqq 0}$.

Ce n'est pas sous cette forme que nous utiliserons le théorème : étant donné un processus mesurable positif (Z_t), et une loi $\mu=P^\alpha$, nous formerons la projection coprévisible $(Z_t^{\hat{p}})$ de (Z_t) pour μ, puis la projection optionnelle $(Z_t^{\hat{p}o})$ de $(Z_t^{\hat{p}})$: nous obtiendrons alors une classe de processus μ-indistinguables, parmi lesquels figurent des processus $(f\circ X_t)_{t\geqq 0}$, f étant définie à un ensemble α-négligeable et α-polaire près.

C) Supposons que $(Z_t)_{t>0}$ soit cooptionnel. Alors la projection prévisible $(Z_t^p)_{t>0}$ est encore un processus cooptionnel (à l'inverse de B), on ne peut affirmer qu'il soit de la forme $(f\circ X_{t-})$, mais seulement qu'il existe f telle que les processus (Z_t^p) et $(f\circ X_t)$ ne diffèrent que sur un ensemble à coupes dénombrables).

Ici le raisonnement est un peu plus délicat : on part du cas où Z est l'indicatrice d'un intervalle $]0,L]$, où L est a.$\hat{o}$.. Soit c la fonction excessive $P^\bullet\{L>0\}$. La projection optionnelle de $I_{]0,L[}$ est le processus $(c\circ X_t)_{t\geqq 0}$, d'où l'on déduit que la projection prévisible de $I_{]0,L]}$ est $((c\circ X_t)_-)_{t>0}$: c'est un processus cooptionnel.

D) Du côté des fonctionnelles additives, on a un résultat classique, qui revient à la théorie de la représentation des fonctions excessives :

<u>Soit</u> (A_t) <u>une fonctionnelle additive brute telle que</u> $E^\bullet[A_\infty]$ <u>soit partout finie. Il existe alors une fonctionnelle additive prévisible</u> (B_t), <u>qui est compensatrice prévisible de</u> (A_t) <u>pour toute loi</u> P^α.

AZEMA, en s'appuyant sur la théorie de la représentation des fonctions surmédianes régulières (adaptée d'un travail de MERTENS) a montré que de même :
<u>Si</u> (A_t) <u>est une fonctionnelle additive brute gauche, telle que</u> $E^{\bullet}[A_\infty]$ <u>soit finie, il existe une fonctionnelle gauche</u> (B_t) <u>qui est compensatrice optionnelle de</u> (A_t) <u>pour toute loi</u> P^α.

Il est curieux que GETOOR-SHARPE aient utilisé un troisième théorème du même genre, relatif à la compensatrice optionnelle d'une fonctionnelle brute droite. Cela suggère que le quatrième (compensatrice prévisible d'une fonctionnelle gauche) est vrai aussi. Ces théorèmes n'ont pas d'applications immédiates dans cet exposé.

REMARQUE. En B) et C), il faut se méfier : si $(Z_t)_{t>0}$ est a.$\hat{p}$., il est prolongeable d'après le lemme 1 en un processus $(Z_t)_{t\geqq 0}$ a.$\hat{p}$.. Soit $f=E^{\bullet}[Z_0]$; la projection prévisible de $(Z_t)_{t>0}$ est le processus $(g\circ X_{t-})_{t>0}$, où $g=P_0f$. <u>Mais ce processus, bien qu'homogène, n'est pas nécessairement a.</u>$\hat{p}$. Ainsi, on n'a pas <u>quatre</u> théorèmes, mais <u>deux</u> . C'est pour cela que, dans le théorème ci-dessous, seules les projections <u>croisées</u> (relatives au <u>même</u> ensemble de temps) commutent.

THEOREME. <u>Soit</u> $(Z_t)_{t>0}$ <u>un processus</u> $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^*)\times\underline{\underline{F}}^\circ$<u>-mesurable borné, et soit</u> μ <u>une mesure de la forme</u> P^α. <u>Alors</u> - les projections cooptionnelles étant relatives à μ - <u>on a</u> $Z^{p\hat{o}}= Z^{\hat{o}p}$. <u>De même, pour un processus</u> $(Z_t)_{t\geqq 0}$ <u>on a</u> $Z^{\hat{p}o}=Z^{o\hat{p}}$.

DEMONSTRATION. $Z^{p\hat{o}}$ est par définition un processus a.$\hat{o}$., tandis que $Z^{\hat{o}p}$ est a.$\hat{o}$. en tant que projection prévisible d'un processus a.$\hat{o}$. (propriété (B)). D'après le théorème de section, il suffit de montrer que pour tout temps a.$\hat{o}$. L on a $E^\alpha[Z_L^{\hat{o}p}]=E^\alpha[Z_L^{p\hat{o}}]$. Mais l'intégration sur le graphe de L est l'intégration par rapport à une fonctionnelle additive brute (droite) (A_t), c'est une mesure cooptionnelle λ. Soit (B_t) sa compensatrice prévisible (B_t) - cf. (D) plus haut - et soit $\lambda^p(U)=E^\mu[\int_{\mathbb{R}_+^*} U_s dB_s]$, la projection prévisible de λ. Nous avons

$$\begin{aligned} E^\alpha[Z_L^{\hat{o}p}] &= \langle Z^{\hat{o}p},\lambda\rangle = \langle Z^{\hat{o}},\lambda^p\rangle && \text{par définition de } \lambda^p \\ &= \langle Z,\lambda^p\rangle && \text{car } \lambda^p \text{ est donnée par une fonct. add., i.e. est cooptionnelle} \\ &= \langle Z^p,\lambda\rangle && \text{par définition de } \lambda^p \\ &= \langle Z^{p\hat{o}},\lambda\rangle && \text{car } \lambda \text{ est cooptionnelle} \\ &= E^\alpha[Z_L^{p\hat{o}}] && \text{cqfd .} \end{aligned}$$

L'APPLICATION AU RETOURNEMENT DU TEMPS

C'est le but principal du travail d'AZEMA, mais nous n'en donnerons qu'une esquisse. Une analogie va nous guider. Connaissant la mesure $\mu=P^{\alpha}$, comment pouvons nous construire directement les mesures P^x, sans passer par la construction du semi-groupe, etc ? Nous regardons une v.a. $h\geqq 0$ $\underline{\underline{F}}^{o}$-mesurable , le processus $(Z_s)=(h\circ\theta_s)$, sa projection optionnelle (Z^o_s) . Celle-ci est de la forme $(H\circ X_s)$, où H est est une fonction sur E, définie à un ensemble α-négligeable et α-polaire près. L'application $h\longmapsto H$ peut se relever en un noyau N de E dans Ω, et alors $N(x,.)=P^x$, sauf pour des x qui forment un ensemble α-négligeable et α-polaire.

Nous allons faire la construction dans l'autre sens : partons d'une v.a. $\underline{\underline{F}}^{o}$-mesurable $h\geqq 0$, et construisons le processus optionnel (même prévisible) $(h\circ k_s)_{s\geqq 0}$, puis sa projection coprévisible $(Z^{\bar{p}}_s)$ pour μ. Elle est comme ci-dessus de la forme $(H\circ X_s)$, nous construisons $\bar{N}$ donnant l'application $h\longmapsto H$ par relèvement, et nous posons $\bar{N}(x,.)=\bar{P}^x$.

Fixons maintenant un temps de retour fini L quelconque, et construisons le processus $(\hat{X}_t)$ retourné de (X_t) à L : alors (sauf pour des x qui forment un ensemble α-négligeable et α-polaire) le processus continu à gauche $(\hat{X}_t)$ est modérément markovien pour $\bar{P}^x$: les mesures " retournées" des $\bar{P}^x$ sont les mesures $\hat{P}^x$ du processus retourné. Cela fournit une démonstration très claire du théorème de CHUNG et WALSH sur le retournement du temps, et du même coup une parfaite explication du rôle de la "topologie cofine" dans les questions de retournement.

UNE APPLICATION A LA REPRESENTATION DES MESURES

Ici encore, laissons nous guider par une analogie : supposons que nous soyons sous des hypothèses de dualité, avec αU comme mesure de référence. Si β est une mesure qui ne charge pas les ensembles polaires (qui sont aussi les ensembles α-polaires, puisque αU est de référence !), son potentiel de Green $U\beta$ sera de la classe (D) s'il est fini, et sera donc engendré par une fonctionnelle additive (droite, même prévisible) B . On sait montrer que $U(f\beta)=U_{fB}$ pour toute $f\geqq 0$. Alors

(4.4) $\quad <\beta,f> = <\alpha,U(f\beta)> = E^{\alpha}[\int_0^{\infty} f\circ X_s dB_s]$

Ceci ne fait plus intervenir le noyau de Green : c'est une représentation de la mesure β par une intégrale sur les trajectoires du processus issu de α. On va essayer de faire la même chose sans dualité.

THEOREME. Soient α et β deux mesures bornées, telles que β ne charge pas les ensembles α-négligeables et α-polaires. Il existe alors une fonctionnelle additive gauche[1] (A_t) telle que

$$(4.5)\qquad <\beta,f> = E^{\alpha}[\int_{[0,\infty[} f\circ X_s dA_s]$$

On a alors, pour toute v.a. $h\geqq 0$ sur Ω

$$(4.6)\qquad E^{\beta}[h] = E^{\alpha}[\int_{[0,\infty[} h\circ\Theta_s dA_s] .$$

Deux fonctionnelles satisfaisant à (4.5) sont α-indistinguables.

DEMONSTRATION. Soit $\mu=P^{\alpha}$. Nous définissons une mesure λ sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ de la manière suivante : à tout processus mesurable positif $(Z_t)_{t\geqq 0}$ nous associons le processus $(Z_t^{o\hat{p}})_{t\geqq 0}$ calculé pour μ - c'est en fait une classe de processus μ-indistinguables, qui contient des processus de la forme $(f\circ X_t)_{t\geqq 0}$, où f est définie à un ensemble α-négligeable et α-polaire près. Nous pouvons alors poser $<\lambda,Z> = <\beta,f>$. λ est une mesure compatible avec μ, qui est à la fois optionnelle et coprévisible d'après le théorème de commutation de projections. Il existe donc une fonctionnelle gauche adaptée (A_t) telle que

$$(4.7)\qquad \lambda(Z) = E^{\alpha}[\int_{[0,\infty[} Z_s dA_s] \text{ pour tout } Z$$

Prenant $Z_s=f\circ X_s$, nous avons $Z^{o\hat{p}}=Z$, et $<\lambda,Z>=<\beta,f>$, d'où (4.5).

Maintenant, supposons en sens inverse que $\bar{A}$ soit une fonctionnelle adaptée gauche satisfaisant à (4.5). Soit Z un processus mesurable positif, et soit f définie par $Z_t^{o\hat{p}}=f\circ X_t$. Comme la mesure $\bar{\lambda}$: $Z\longmapsto E^{\alpha}[\int_{[0,\infty[} Z_s d\bar{A}_s]$ commute avec la projection $Z\mapsto Z^{o\hat{p}}$, on a $\bar{\lambda}(Z) = E^{\alpha}[\int_{[0,\infty[} f\circ X_s\, d\bar{A}_s] = <\beta,f> = \lambda(Z)$, donc $\bar{\lambda}=\lambda$, et les deux fonctionnelles $\bar{A}$ et A sont indistinguables pour μ.

Nous allons maintenant chercher à remplacer la fonctionnelle gauche par une fonctionnelle droite. Pour cela nous avons besoin de quelques remarques sur les fonctionnelles gauches. Toute fonctionnelle gauche se décompose en une partie continue (qui est aussi une fonctionnelle droite) et une somme de fonctionnelles gauches , dont les sauts sont minorés par un $\varepsilon>0$ (de sorte qu'il n'y en a qu'un nombre fini dans tout intervalle fini). Soit (H_t) une telle fonctionnelle. Soit h une fonction presque-borélienne telle que pour toute loi P^x, $H_{0+}=h\circ X_0$ p.s..

1.Il est intéressant de noter que dA ne charge pas ζ si $\beta(\{\partial\})=0$.

Alors les processus (H_t) et $(\sum_{0\leq s<t} h\circ X_t)$ sont indistinguables. Comme (H_t) est finie, et h est (ou peut être choisie) $\geq\varepsilon$ sur $\{h>0\}$, l'ensemble $S_H=\{h>0\}$ est semi-polaire, et même mieux : presque toute trajectoire le rencontre suivant un ensemble discret.

Nous pouvons maintenant revenir au problème précédent.

THEOREME. Soit β une mesure bornée qui ne charge pas les ensembles α-polaires. Il existe alors une fonctionnelle additive (adaptée) droite (B_t) telle que pour toute $f\geq 0$

(4.8) $$\langle\beta,f\rangle = E^{\alpha}[\int_0^{\infty} f\circ X_s dB_s\ ]$$

On peut en outre affirmer que la partie discontinue de B est de la forme

(4.9) $$B_t^d = \sum_{0<s\leq t} b\circ X_s$$ où b est presque-borélienne positive, nulle hors d'un ensemble semi-polaire[1].

DEMONSTRATION. Nous partons de la représentation de β au moyen d'une fonctionnelle gauche (A_t) vue plus haut, et nous décomposons A en une partie continue - qui est aussi une fonctionnelle droite - et une somme de fonctionnelles à sauts bornés inférieurement, du type considéré avant l'énoncé. Il suffit évidemment d'établir que pour chacune d'elles - notons la (H_t) comme plus haut - il existe une fonctionnelle droite (K_t) telle que pour toute f

$$E^{\alpha}[\int_{[0,\infty[} f\circ X_s dH_s\ ] = E^{\alpha}[\int_0^{\infty} f\circ X_s\, dK_s\ ]$$

Notons $\eta(f)$ le premier membre. Notons aussi ξ une mesure bornée équivalente à la mesure

$$f \mapsto E^{\alpha}[\sum_{s>0} I_{S_H}\circ X_s f\circ X_s\ ]$$

une partie ξ-négligeable de S_H est α-polaire (non nécess^t α-néglig.). Posons maintenant, avec les notations employées juste avant le théorème

$$K_t^1 = \sum_{0<s\leq t} h\circ X_s \quad , \ \eta^1 = h.\alpha$$

K^1 est une fonctionnelle droite majorée par H, et nous avons

---

1. Sous les hypothèses de dualité usuelles, l'hypothèse (B) de HUNT entraîne que les temps totalement inaccessibles ne passent pas dans les semi-polaires : donc B est accessible (cf. La frontière de Martin, p. 121). Si $\beta(\{\partial\})=0$, B ne charge pas ζ. Cette classe de fonctionnelles est intéressante.

$$\eta(f)=E^{\alpha}[\int_{[0,\infty[} f\circ X_s dH_s] = E^{\alpha}[\int_0^{\infty} f\circ X_s dK_s^1] + \eta^1(f)$$

η^1 est une mesure qui ne charge pas les ensembles α-négligeables et α-polaires, elle admet donc une représentation

$$\eta^1(f) = E^{\alpha}[\int_{[0,\infty[} f\circ X_s dH_s^1]$$

au moyen d'une fonctionnelle gauche, portée par S_H , donc de la forme $\sum_{0\leqq s<t} h^1\circ X_s$, où h^1 est positive et nulle hors de S_H . Posons

$$K_t^2 = \sum_{0<s\leqq t} h^1\circ X_s \quad , \ \eta^2 = h^1.\alpha$$

η^2 ne charge pas les ensembles α-négligeables et α-polaires, etc. On voit là l'amorce d'une récurrence transfinie. Il arrivera dans cette récurrence un premier ordinal dénombrable ρ tel que

$k=\sum_{\sigma\leqq\rho} h^{\sigma}$ soit borne supérieure essentielle pour ξ de toutes les sommes analogues

Soit $K_t=\sum_{0<s\leqq t} k\circ X_s$, fonctionnelle droite. Ecrivons

$$<\eta,f> = E^{\alpha}[\int_{[0,\infty[} f\circ X_s dH_s]=E^{\alpha}[\int_0^{\infty} f\circ X_s \, dK_s] + \eta'(f)$$

η' se représente comme $E^{\alpha}[\int_{[0,\infty[} f\circ X_s dH_s']$, et H_t' s'écrit $\sum_{0\leqq s<t} h'\circ X_s$, mais cette fois le caractère maximal de ρ entraîne que h' est ξ-négligeable, donc α-polaire. Si β ne charge pas les α-polaires, h' est nulle et le théorème est démontré : mais en fait nous avons prouvé mieux :

COROLLAIRE (de la démonstration). Si β ne charge pas les ensembles α-négligeables et α-polaires, il existe une fonctionnelle droite K, du type envisagé dans l'énoncé précédent, et une fonction positive h nulle hors d'un ensemble α-polaire, telle que

(4.10) $$\beta = \alpha U_K + h.\alpha .$$

BIBLIOGRAPHIE

J.AZEMA. Une remarque sur les temps de retour, trois applications. Séminaire de Prob. Strasbourg VI. Lect. Notes vol.258, 1972.

J.AZEMA. Le retournement du temps. A paraître aux Annales E.N.S.

APPENDICE

Nous allons maintenant revenir à la situation générale des paragraphes II et III, pour tenter de voir si la construction de fonctionnelles additives droites qui vient de servir à la représentation des mesures sur un processus de Markov a une signification plus générale. Nous aurons besoin pour cela d'un mot nouveau : nous dirons que $A\in\underline{\underline{F}}^o$ est <u>polaire</u> (μ-polaire, si la précision est utile) si le processus $(I_A\circ\Theta_t)_{t>0}$ est μ-évanescent, <u>évanescent</u> si le processus $(I_A\circ\Theta_t)_{t\geq 0}$ est μ-évanescent. Il arrive que les deux notions coïncident (cas des processus de Markov : mesures P^α où α est p-excessive ; en théorie classique du potentiel mesures P^α où α ne charge pas les ensembles polaires classiques). Le lemme 1 (§ 2) nous dit que tout processus coprévisible $(Z_t)_{t>0}$ est prolongeable en un processus coprévisible $(Z_t)_{t\geq 0}$, et il est évident que Z_0 est définie à un ensemble <u>polaire</u> près.

Soit λ une mesure positive bornée sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$, compatible avec μ, et <u>coprévisible</u> (i.e., donnée par une fonctionnelle additive brute gauche). Construisons par récurrence transfinie

$$\lambda_1 = I_{\mathbb{R}_+^*\times\Omega}.\lambda \qquad , \lambda'_1 = (I_{\{0\}\times\Omega}.\lambda)^{\hat{p}} \text{ (proj. coprévisible)}$$

puis, si α est un ordinal dénombrable

$$\lambda_{\alpha+1}=I_{\mathbb{R}_+^*\times\Omega}.\lambda'_\alpha \qquad , \lambda'_{\alpha+1}=(I_{\{0\}\times\Omega}.\lambda'_\alpha)^{\hat{p}}$$

Si α est un ordinal limite, d'autre part

$$\lambda_\alpha =0 \ , \qquad \lambda'_\alpha = \inf_{\beta<\alpha} \lambda'_\beta$$

Posons aussi pour tout ordinal α , $\Lambda_\alpha=\sum_{\beta\leq\alpha} \lambda_\beta$. Pour tout α , Λ_α est une mesure portée par $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$, donnée par une fonctionnelle additive brute <u>droite</u>, et $\lambda=(\Lambda_\alpha)^{\hat{p}} + \lambda'_\alpha$. La suite des masses totales des Λ_α est stationnaire à partir d'un ordinal dénombrable, et il existe donc un premier ordinal γ tel que $\lambda_{\gamma+1}=0$. Posons $\Lambda_\gamma=\Lambda$, $\lambda'_\gamma=\lambda^o$: λ^o est une mesure coprévisible, et le fait que $\lambda_{\gamma+1}=0$ entraîne que λ^o est portée par $\{0\}\times\Omega$. Rien n'est plus facile que d'écrire la fonctionnelle gauche correspondante : $A_t^o = f.I_{\{t\geq 0\}}$, où f est positive, intégrable, nulle hors d'un ensemble polaire. Ainsi :

THEOREME. <u>Si</u> λ <u>est coprévisible</u>, <u>il existe une fonctionnelle brute droite</u> (B_t), <u>une fonction</u> f <u>positive nulle hors d'un ensemble polaire</u>, <u>telles que pour tout processus</u> $(Z_t)_{t\geq 0}$

$$\langle\lambda, Z\rangle = E^\mu[\int_0^\infty Z_s^{\hat{p}} dB_s] + E^\mu[f.Z_0^{\hat{p}}]$$