CLAUDE DELLACHERIE

Un ensemble progressivement mesurable...

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 8 (1974), p. 22-24
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__22_0>

Séminaire de Probabilités
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg I Année 1972/73

UN ENSEMBLE PROGRESSIVEMENT MESURABLE ...

C. Dellacherie

Le titre exact de l'exposé devrait être :" Un exemple d'ensemble progressivement mesurable ne contenant pas de graphe de temps d'arrêt, ou , ce qui est équivalent, ayant une projection bien-mesurable nulle ".
Un premier exemple, dû à Meyer et maintenant classique, est le suivant : soit (B_t) un mouvement brownien linéaire issu de 0, et, pour tout réel a, désignons par H_a l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus au fermé aléatoire $\{(t,\omega) : B_t(\omega) = a\}$; les ensembles H_a sont alors progressifs, non évanescents, et ne contiennent pas de graphes de temps d'arrêt. On sait maintenant, depuis les travaux de Getoor-Sharpe, l'importance de ces ensembles progressifs non bien-mesurables, contenus dans l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus â un fermé aléatoire bien-mesurable. Mais, tous ces ensembles ont leurs coupes dénombrables, et notre propos est de donner un exemple d'ensemble dont les coupes seront non-dénombrables : ce sera tout simplement l'ensemble $H = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} H_a$, où H_a est défini ci-dessus.

On désigne par Ω l'ensemble des applications continues ω de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\liminf_{t\to+\infty} \omega(t) = -\infty$ et $\limsup_{t\to+\infty} \omega(t) = +\infty$, par (B_t) les applications coordonnées et par $\underline{\underline{F}}^o$, $\underline{\underline{F}}^o_t$ les tribus habituelles. On sait qu'il existe une loi P sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$ telle que (B_t) soit un mouvement brownien issu de 0, et on désigne par $\underline{\underline{F}}$ la tribu complétée de $\underline{\underline{F}}^{\circ}$, par $\underline{\underline{F}}_t$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_t^{\circ}$ et les ensembles négligeables de $\underline{\underline{F}}$. Pour tout réel a, l'ensemble $F_a = \{(t,\omega) : B_t(\omega) = a\}$ est un fermé aléatoire bien-mesurable; nous appellerons H_a l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à F_a, et nous poserons $H = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} H_a$. Comme les trajectoires oscillent entre les deux infinis, toutes les coupes de H sont non-dénombrables.

PROPOSITION 1.- <u>L'ensemble</u> H <u>est progressivement mesurable</u>

DEMONSTRATION.- Les tribus $\underline{\underline{F}}_t$ contenant les ensembles négligeables de $\underline{\underline{F}}$, il suffit de montrer que, pour t fixé, $H\cap([0,t[\times\Omega)$ appartient à la tribu $\underline{\underline{B}}([0,t[)\times\underline{\underline{F}}_t$. Pour $u\in[0,t[$ et $r\in[0,t[\cap Q$ (Q désigne les rationnels), l'application $(u,r,\omega)\longrightarrow B_u(\omega) - B_r(\omega)$ est $\underline{\underline{B}}([0,t[)\times\underline{\underline{B}}(Q)\times\underline{\underline{F}}_t$ -mesurable. Posons, pour m,n,p entiers, et u et r comme ci-dessus,

$$A_{m,n,p} = \left\{(u,r,\omega) \ : \ r\notin\left[u+\frac{1}{m},u+\frac{1}{n}\right] \text{ ou } \left|B_u(\omega) - B_r(\omega)\right| \geq \frac{1}{p}\right\}$$

L'ensemble $A_{m,n,p}$ appartient à $\underline{\underline{B}}([0,t[)\times\underline{\underline{B}}(Q)\times\underline{\underline{F}}_t$, et on a l'équivalence logique

$$\big((u,\omega)\in H \text{ et } u<t\big)\Leftrightarrow\big(\exists n \ \ \forall m>n \ \ \exists p \ \ \forall r<t \quad (u,r,\omega)\in A_{m,n,p}\big)$$

Les rationnels étant dénombrables, on en déduit aisément le résultat voulu.

PROPOSITION 2.- <u>L'ensemble</u> H <u>ne contient pas de graphe de temps d'arrêt</u>.

DEMONSTRATION.- Au lieu d'employer une technique markovienne, nous utiliserons un raisonnement adapatable à toute autre martingale continue que (B_t).
Nous raisonnerons par l'absurde et supposons qu'il existe un t.d'a. S non p.s. infini dont le graphe est contenu dans H. Soit T le t.d'a. défini par $T(\omega) = \inf\{t>S(\omega) : B_t(\omega) = B_{S(\omega)}(\omega)\}$. On a $T>S$ sur $\{S<+\infty\}$.
Soient d'autre part S_1 et S_2 les t.d'a. définis par

$$S_1(\omega) = \inf\{t>S(\omega) : B_t(\omega) > B_{S(\omega)}(\omega)\}$$

$$S_2(\omega) = \inf\{t>S(\omega) : B_t(\omega) < B_{S(\omega)}(\omega)\}$$

Comme $T>S$ sur $\{S<+\infty\}$ et que les trajectoires sont continues, les graphes de S_1 et S_2 sont disjoints et leur réunion est égale au graphe de S ;

de plus, on a $B_t(\omega) > B_{S(\omega)}(\omega)$ pour $S_1(\omega) < t < T(\omega)$ et $B_t(\omega) < B_{S(\omega)}(\omega)$ pour $S_2(\omega) < t < T(\omega)$. Si S n'est pas p.s. infini, S_1 ou S_2 ne l'est pas non plus : nous supposerons pour fixer les idées que S_1 n'est pas p.s. infini. Choisissons alors un entier n suffisamment grand tel que $P\{S_1 < T \leq n\} > 0$, et désignons par U le t.d'a. égal à S_1 sur $\{S_1 < T \leq n\}$ et à $T \wedge n$ sur le complémentaire. La martingale arrêtée $(M_t) = (B_{T\wedge n\wedge t})$ est uniformément intégrable et l'on a, pour tout entier p, $M_{U+(1/p)} > M_U$ sur $\{S_1 + \frac{1}{p} < T \leq n\}$ et $M_{U+(1/p)} = M_T$ sur le complémentaire. Comme on a aussi $M_U = M_T$ et $E[M_U] = E[M_{U+(1/p)}]$, on obtient une contradiction pour p suffisamment grand.