JEAN BRETAGNOLLE

Une remarque sur le problème de Skorohod

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 8 (1974), p. 11-19

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__11_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1972/73

UNE REMARQUE SUR LE PROBLEME DE SKOROKHOD

exposé de J.Bretagnolle

I. LE PROBLEME DE SKOROKHOD.

Etant donnée une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ telle que $\int x d\mu=0$ et que $\mathrm{Var}(\mu) = \int x^2 d\mu < +\infty$, résoudre le problème de Skorokhod, c'est trouver un temps d'arrêt T du mouvement brownien (B_t) issu de 0 tel que la répartition de B_T soit μ, et ceci de manière " minimale", i.e. on exige que $E(T)=\mathrm{Var}(\mu)$.

Il y a plusieurs constructions de tels temps d'arrêt. Celle de Dubins a été exposée à ce séminaire par P.A.Meyer (Séminaire de Strasbourg, vol.5, p.170-176 , Lecture Notes n°191) . Je renverrai à cet exposé par le signe (*) .

J'avais émis la conjecture suivante : <u>le temps de Dubins est le meilleur au point de vue des moments exponentiels</u>, au sens suivant : soit S un temps d'arrêt du mouvement brownien, soient μ la loi de B_S , et T le temps d'arrêt de Dubins associé à la mesure μ (ainsi B_S et B_T ont tous deux la même loi μ). Alors si S possède un moment exponentiel, i.e. s'il existe $a>0$ tel que $E[e^{aS}]<+\infty$, alors il existe aussi un $b>0$ tel que $E[e^{bT}]<+\infty$.

Une discussion avec le Professeur Dinges m'a fortement fait douter de la validité de cette conjecture. Effectivement, j'ai ensuite trouvé un contre-exemple que je donne au dernier paragraphe.

II. LA CONSTRUCTION DE DUBINS

Dans ce paragraphe, je rappelle les résultats de (*) dont j'aurai besoin.

A). <u>Un cas simple</u>. Donnons nous deux nombres u,v , $u\leqq 0\leqq v$, et supposons que le support de la loi μ soit $\{u,v\}$. Alors $\mu=p\varepsilon_u+q\varepsilon_v$, avec $p+q=1$, $pu+qv=0$, ce qui détermine p et q. Soit alors S_{uv} le temps de sortie de l'intervalle $]u,v[$ pour le mouvement brownien : S_{uv} est fini p.s., toutes ses puissances sont intégrables, donc $E[B_{S_{uv}}] =0$. Si l'on pose $p'=P\{B_{S_{uv}}=u\}$, $q'=P\{B_{S_{uv}}=v\}$, cela entraîne $p'+q'=1$ et $p'u+q'v =0$ (continuité des trajectoires), donc $p'=p$ et $q'=q$. On vérifie immédiatement que $E[S_{uv}]=\mathrm{Var}(\mu)$. Autrement dit, S_{uv} résout le problème de Skorokhod dans ce cas simple.

On peut calculer explicitement la transformée de Laplace $E[e^{tS_{uv}}]$, et vérifier qu'elle est finie si et seulement si $t(|u|+|v|)^2 < \pi^2/_2$.

B). <u>Le temps de Skorokhod</u>. Pour ne pas alourdir l'exposé, construisons le seulement dans le cas simple où la loi μ est <u>symétrique</u>. Soient Ω' un espace sur lequel on a construit un brownien, Ω'' sur lequel est donnée une v.a. X de loi μ. Soit $\Omega=\Omega'\times\Omega''$ muni de la mesure produit et de la famille de tribus $\underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{T}}(X,B_s,s\leq t)$. Posons $S(\omega',\omega'')=S_{-|X(\omega'')|,|X(\omega'')|}(\omega')$. S est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$, et l'on a

- $|B_S|=|X|$ p.s. (continuité des trajectoires). Comme la loi de B_S est symétrique, elle est donc égale à μ.
- $E[S]=\int_{\Omega''} E_{\Omega'}[S_{-|X(\omega'')|,|X(\omega'')|}] = \int_{\Omega''} X^2(\omega'')= \mathrm{Var}(\mu)$.

<u>Mais</u>

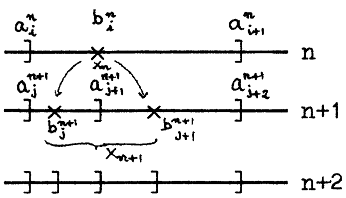
1°) S n'est pas un temps d'arrêt de la famille <u>naturelle</u> du brownien ;

2°) Le calcul de $E[e^{tS}]$ montre que <u>si</u> μ <u>n'est pas à support compact</u>, $E[e^{tS}]=+\infty$ <u>pour tout $t>0$</u> d'après A).

C). <u>Le temps de Dubins</u> . On va tout d'abord travailler sur $(\mathbb{R},\underline{\underline{B}},\mu)$ en appelant X la v.a. $x\longmapsto x$. Construisons par récurrence une famille croissante de tribus finies $\underline{\underline{H}}_n$, dont les atomes seront des intervalles $]a_i^n,a_{i+1}^n]$: $\underline{\underline{H}}_0=\{\emptyset,\mathbb{R}\}$, $\underline{\underline{H}}_1$ a pour atomes $]-\infty,0]$ et $]0,+\infty]$; $\underline{\underline{H}}_{n+1}$ s'obtient en découpant chaque atome $]a_i^n,a_{i+1}^n]$ en deux atomes $]a_i^n,b_i^n]$, $]b_i^n,a_{i+1}^n]$, où b_i^n est défini par

$$b_i^n = \frac{1}{\mu(]a_i^n,a_{i+1}^n])}\int_{]a_i^n,a_{i+1}^n]} x\,d\mu$$

après quoi on renumérote les atomes. Si maintenant $X_n=E[X|\underline{\underline{H}}_n]$, les X_n forment une martingale uniformément intégrable et on montre (voir (*)) que X_n tend vers X dans L^1, donc en loi , ou encore que les mesures $\mu_n = \sum \mu(]a_i^n,a_{i+1}^n]).\varepsilon_{b_i^n}$ convergent vers μ .



Posons $x_{n+1} = X_{n+1}-X_n$ $(x_0=0)$. Sur l'atome $]a_i^n,a_{i+1}^n]$ de $\underline{\underline{H}}_n$, x_{n+1} ne prend que deux valeurs , l'une négative $u_i^n = b_j^{n+1}-b_i^n$ (voir figure) l'autre positive $v_i^n = b_{j+1}^{n+1}-b_i^n$. Nous noterons u_n,v_n les fonctions $\underline{\underline{H}}_n$-mesurables valant respectivement u_i^n, v_i^n sur chaque atome $]a_i^n,a_{i+1}^n]$ de $\underline{\underline{H}}_n$.

Nous notons aussi K_n le support de μ_n (l'ensemble des b_i^n).

Soit maintenant un brownien (B_t) muni de ses tribus naturelles $\underline{\underline{F}}_t$. Posons $R_0=0$, $R_{n+1}=\inf\{t\,|\,t>R_n, B_t\in K_{n+1}\}$. Les R_n sont évidemment des temps d'arrêt, montrons que B_{R_n} a pour répartition μ_n : les considérations précédentes montrent que si l'on pose $r_{n+1}=R_{n+1}-R_n$ on a

$$r_{n+1} = S_{B_{R_n}+u_n(B_{R_n}),B_{R_n}+v_n(B_{R_n})} \circ \theta_{R_n}$$

Le fait que $E[x_{n+1}|\underline{\underline{H}}_n]=0$ et les propriétés des temps de sortie $S_{u,v}$ montrent que, conditionnellement à $B_{R_n}=b_i^n$, $B_{R_{n+1}}-B_{R_n}$ a même loi que x_{n+1} conditionnellement à $x_n=b_i^n$, et cela suffit.

On voit facilement (cf.(*)) que $\sup_n R_n < +\infty$, et donc que si l'on pose $T_D = \lim_n R_n$, la loi de B_{T_D} est μ . De $E[R_n]=E[X_n^2]\leqq E[X^2]<+\infty$ on tire enfin $E[T_D]=\mathrm{Var}(\mu)$.

Dans la suite on gardera la notation x_{n+1} pour $B_{R_{n+1}}-B_{R_n}$ et $\underline{\underline{H}}_n$ pour la tribu engendrée par B_{R_n} (ce qui revient à transporter les considérations précédentes sur l'espace du mouvement brownien).

III. MOMENTS EXPONENTIELS

Rappelons les inégalités de Burkholder.
Soit $X=(X_n,\underline{\underline{H}}_n)$,$n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ une martingale de carré intégrable telle que $X_0=0$. On pose $x_{n+1}=X_{n+1}-X_n$ et $Q(X)=(\sum_n x_n^2)^{1/2}$. Alors

(1) Il existe $C<\infty$ telle que $\|Q(X)\|_p \leqq C(1-\frac{1}{p})^{-1}p^{1/2}\|X_\infty\|_p$, $1<p<\infty$

Prenant $p=2m$ et utilisant l'inégalité $k^k \leqq A^k k!$ $(A<\infty)$ on obtient

(2) Il existe $K<\infty$ telle que $E[Q(X)^{2m}] \leqq K^m m! E[X_\infty^{2m}]$

Sa version brownienne sera

(3) Si T est un temps d'arrêt, $E[T^m] \leqq K^m m! E[B_T^{2m}]$.

Remarque . (3) peut servir à montrer que S_{uv} a un moment exponentiel sans calcul explicite.
Les notations sont à nouveau celles de II : le lemme suivant signifie que, du point de vue des moments exponentiels, la variation quadratique du brownien stoppé à R_n (c'est à dire R_n) est comparable à celle de la martingale discrète $B_{R_1},B_{R_2},\dots,B_{R_n}$.

LEMME 1. <u>Il existe</u> $s_1>0$ <u>tel que la relation</u> $s.\sup_{k\leqq n}\|x_k\|_\infty \leqq s_1$ <u>entraîne</u> $E[e^{sR_n}] \leqq E[\exp(80Ks\sum_{k\leqq n} x_k^2)]$.

DEMONSTRATION. On a $\exp(sR_n) = \prod_{k\leq n}\exp(sr_k) =$

$$\frac{\prod_{k\leqq n}\exp(sr_k)}{\prod_{k\leqq n} E[\exp(Fsx_k^2)|\underline{\underline{H}}_{k-1}]} \cdot \frac{\prod_{k\leqq n} E[\exp(Fsx_k^2)|\underline{\underline{H}}_{k-1}]}{\exp(Gs\sum_{k\leqq n} x_k^2)} \cdot \exp(Gs\sum_{k\leqq n} x_k^2) = A_nB_nC_n$$

où les constantes F,G seront choisies plus loin. Donc

$$E[e^{sR_n}] \leqq (E[A_n^2])^{1/2}(E[B_n^4])^{1/4}(E[C_n^4])^{1/4}$$

On va montrer que pour un bon choix de F et G, (A_i^2) et (B_i^4) sont des surmartingales positives (avec $A_0=B_0=1$) pour $0\leqq i\leqq n$. Comme $C_n\geqq 1$, nous aurons $E[C_n^4]^{1/4} \leqq E[C_n^4]$ ce qui nous donnera

$$E[e^{sR_n}] \leqq E[\exp(4Gs\sum_{k\leqq n} x_k^2)]$$

Choisissons d $(0<d<1)$ tel que $0\leqq x\leqq d$ implique simultanément $1/(1-x)\leqq e^{2x}$, $e^x\leqq 1+2x$, $(1+2x)^4 \leqq 1+10x$, et $e^{-2x} \leqq 1-x$.

a) Pour que (A_n^2) soit une surmartingale, il suffit que

$$E[\exp(2sr_k)|\underline{\underline{H}}_{k-1}] \leqq E[\exp(Fsx_k^2)|\underline{\underline{H}}_{k-1}]^2 .$$

Comme $E[Z|\underline{\underline{H}}]\leqq E[Z|\underline{\underline{H}}]^2$ pour $Z\geqq 1$, il suffit que le côté gauche soit majoré par $E[\exp(Fsx_k^2)|\underline{\underline{H}}_{k-1}]$. Or d'après (3), sommant sur m la majoration de $E[T^m/m!]$, on a si $2sK\|x_k^2\|_\infty < 1$

$$\begin{aligned} E[\exp(2sr_k)|\underline{\underline{H}}_{k-1}] &= E[\sum_m \frac{(2sr_k)^m}{m!}|\underline{\underline{H}}_{k-1}] \\ &\leqq E[\sum_m K^m(2sx_k)^{2m}|\underline{\underline{H}}_{k-1}] = E[1/(1-2sKx_k^2)|\underline{\underline{H}}_{k-1}] \\ &\leqq E[\exp(4Ksx_k^2)|\underline{\underline{H}}_{k-1}] \end{aligned}$$

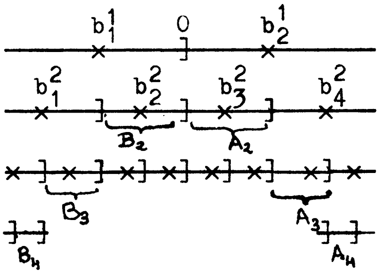
Le processus (A_i) est donc une surmartingale pour $0\leqq i\leqq n$ si $F=4K$, et si $2sK.\sup_{k\leqq n}\|x_k^2\|_\infty < d$.

b) De même, pour que (B_i^4) soit une surmartingale pour $0\leqq i\leqq n$ il suffit d'avoir $E[\exp(Fsx_k^2)|\underline{\underline{H}}_{k-1}]^4.E[\exp(-4Gsx_k^2)|\underline{\underline{H}}_{k-1}] \leqq 1$. Or si l'on a $Fs.\sup_{k\leqq n}\|x_k^2\|_\infty \leqq d$ et $4Gs.\sup_{k\leqq n}\|x_k^2\|_\infty \leqq d$, le coté gauche peut se majorer par $(1+10FsE[x_k^2|\underline{\underline{H}}_{k-1}])(1-2GsE[x_k^2|\underline{\underline{H}}_{k-1}])$, qui est $\leqq 1$ si $2G=10F$. Comme $F=4K$, on prend $G=20K$, et le nombre s_1 de l'énoncé vaut $d/80K$.

PROPOSITION 1. <u>Posons</u> $|||X||| = \sup\limits_n \|x_n\|_\infty$ ($|||X|||$ <u>ne dépend que de</u> μ).
<u>Alors</u>

- <u>il existe</u> s_2 <u>tel que</u> $E[e^{sT_D}]<+\infty$ <u>si</u> $s|||X|||^2 < s_2$,
- si $|||X|||=+\infty$, <u>on a</u> $E[e^{sT_D}]=+\infty$ <u>pour tout</u> $s>0$.

DEMONSTRATION. Pour la première partie il suffit, compte tenu du lemme 1, de montrer que si $|||X|||<+\infty$ on a $E[\exp(s\sum\limits_k x_k^2)]<\infty$ pour s assez petit.



Soit A_n l'événement $\{x_1>0, x_2>0,\ldots,x_{n-1}>0$ $x_n\leqq 0\}$, de même $B_n=\{x_1<0,\ldots,x_{n-1}<0,x_n\geqq 0\}$. Si l'on réalise sur $\mathbb{R}$ la martingale (X_n) (voir la figure ci-contre) on s'aperçoit que A_n et B_n sont des atomes de $\underline{\underline{H}}_n$, et que l'espace entier est réunion des A_n et des B_n à un ensemble négligeable près.

Je dis que

$$(4) \qquad \int_{A_n} \exp(s\sum x_k^2)d\mu \leqq \frac{e^{2s|||X|||^2}}{1-Ks|||X|||^2} \int_{A_n} \exp(s|||X|||.X)d\mu \quad \text{si } sK|||X|||^2<1 \quad .$$

En effet, le côté gauche est égal à

$$\int_{A_n} \exp(s\sum_{k\leqq n} x_k^2)E[\exp(s\sum_{k>n} x_k^2)|\underline{\underline{H}}_n]d\mu$$

Or sur A_n, $\sum\limits_{k>n} x_k^2$ est la variation quadratique $Q^2(Y)$ de la martingale $(Y_k)=(X_{n+k}-X_n)$. Mais tous les atomes ultérieurs auxquels donne naissance A_n sont contenus dans A_n, donc sur A_n on a $X_{n-2}\leqq X_{n+k}\leqq X_{n-1}$, et $X_{n-1}-X_{n-2} \leqq |||X|||$, de sorte que Y est majorée par $|||X|||$ en valeur absolue.

L'inégalité de Burkholder (2) donne alors par sommation

$$E[\exp(s\sum_{k>n} x_k^2)|\underline{\underline{H}}_n] \leqq \frac{1}{1-Ks|||X|||^2} \quad \text{sur } A_n \text{ , si } Ks|||X|||^2<1$$

Par ailleurs, on a sur A_n, tous les $x_k, k<n$ étant positifs

$$\begin{aligned}\sum_{k\leqq n} x_k^2 &\leqq x_n^2 + \sup_{k<n} x_k.\sum_{k<n} x_k \leqq x_n^2+|||X|||X + |||X|||\,|X_{n-1}-X| \\ &\leqq 2|||X|||^2+|||X|||.X\end{aligned}$$

D'où (4). On a une inégalité similaire sur B_n , et par sommation

$$(5) \qquad E[\exp(s\sum x_k^2)] \leqq \frac{e^{2s|||X|||^2}}{1-Ks|||X|||^2} E[e^{s|||X|||\,|X|}] \text{ si } sK|||X|||^2 < 1 \text{ .}$$

La première partie sera donc établie si nous montrons que la condition

$[\![X]\!]<\infty$ entraîne

(6) il existe $s_3>0$ tel que $E[e^{t|X|}] < +\infty$ dès que $t[\![X]\!]\leq s_3$

Cela résultera de la proposition 2 ci-dessous.

Passons à la seconde partie. Pour tout n, la v.a. x_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs : elle est donc bornée. Si $[\![X]\!]=+\infty$, la borne supérieure de $|x_n|$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes pour n grand. M étant arbitrairement choisi, on peut trouver un n, un atome C_n (de probabilité >0) de $\underline{\underline{H}}_n$, tel que l'une des deux valeurs de $|x_n|$ sur C_n dépasse M : supposons par exemple que la valeur positive v dépasse M, l'autre valeur u étant <0. Un retour à II.A) montre alors que

$$\text{si } sM^2\geq \pi^2/2 \text{ , on a } E[e^{sr_{n+1}}|\underline{\underline{H}}_n] = +\infty \text{ sur } C_n$$

et a fortiori $E[e^{sT_D}] \geq \int_{C_n} e^{sT_D} = +\infty$. Comme M est arbitraire, T_D n'admet pas de moment exponentiel.

PROPOSITION 2. <u>Associons à μ les fonctions</u> $H^+(x)=\mu(]x,\infty[)$ <u>et</u> $H^-(x)=\mu(]-\infty,-x[)$ $(x>0)$. <u>Alors</u> $[\![X]\!]$ <u>est fini si et seulement s'il existe un nombre</u> $M<+\infty$ <u>tel que</u>

$$\underline{\text{pour tout}}\ x>0 \text{ , } H^+(x+M)\leq \tfrac{1}{3}H^+(x) \text{ , } H^-(x+M)\leq \tfrac{1}{3}H^-(x) \text{ .}$$

DEMONSTRATION. Posons $s_0^+=0$,

$$s_1^+= \frac{1}{\mu(]0,\infty[)}\int_{]0,\infty[} xd\mu \quad , \quad s_{n+1}^+= \frac{1}{\mu]s_n^+,\infty[}\int_{]s_n^+,\infty[} xd\mu$$

(s_n^+ est l'extrémité gauche de l'atome de $\underline{\underline{H}}_{n+1}$ situé le plus à droite). Posons $s^+= \sup_n (s_{n+1}^+-s_n^+)$, et définissons de même les s_n^- , s^-. Alors $[\![X]\!]= \sup(s^+,s^-)$.

a). Si la condition de la proposition est satisfaite, on a $\int_{x>a} xd\mu =$

$$aH^+(a)+\int_{x>a} H^+(x)dx \leq aH^+(a)+ \tfrac{3}{2}\int_a^{a+M} H^+(x)dx \leq(a+\tfrac{3}{2}M)H^+(a). \quad \text{D'où}$$

$$\frac{1}{\mu(]a,\infty[)}\int_{x>a} xd\mu - a \leq \tfrac{3}{2} M \text{ , } s^+\leq \tfrac{3}{2}M \text{ et } [\![X]\!]\leq \tfrac{3}{2}M \text{ .}$$

b). Réciproquement, supposons que la condition ne soit pas vérifiée, par exemple du côté positif. M étant choisi, on peut trouver a avec $H^+(a+M)> \frac{1}{3}H(a)$. Soit alors s_n^+ le premier des s_i^+ qui dépasse a (son existence provient de la convergence de μ_n vers μ, qui charge $]a+M,\infty[$). Alors

- ou bien $s_n^+\geq a+M/2$, et alors $s_n^+-s_{n-1}^+\geq M/2$,
- ou bien $s_n^+< a+M/2$, et alors $\int_{]s_n^+,\infty[} xd\mu \geq s_nH^+(s_n)+ \int_{s_n}^{a+M} H^+(x)d\mu$

$$\geq s_nH^+(s_n)+ \tfrac{M}{2}H^+(a+M) > s_nH^+(s_n)+ \tfrac{M}{6} H^+(s_n)\text{, d'où } s_{n+1}^+-s_n^+ \geq M/6 \text{ .}$$

Dans les deux cas, on voit que $[\![X]\!] \geqq M/6$, donc (M étant arbitraire) $[\![X]\!]=+\infty$.

L'ensemble des deux raisonnements montre aussi que si $[\![X]\!]<\infty$, et si M est le plus petit nombre satisfaisant à la condition, on a $M/6 \leqq [\![X]\!] \leqq M/2$. Les conditions de la forme $s[\![X]\!]^2 \leqq A$ peuvent donc être remplacées par des conditions de la forme $sM^2 \leqq A'$.

DEMONSTRATION DE (6). On a $E[e^{sX^+}]=-\int_0^\infty e^{sx}dH^+(x)=1+\sum \int_{kM}^{(k+1)M} se^{sx}H^+(x)dx$ $\leqq 1+e^{sM}\sum 3^{-k}e^{skM}$, de même pour X^-. On a vu que M et $[\![X]\!]$ sont du même ordre.

Résumons :

THEOREME. <u>Soit</u> T_D <u>le temps de Dubins associé à la loi centrée</u> μ. <u>Pour que</u> T_D <u>admette des moments exponentiels il faut et il suffit que</u> μ <u>satisfasse la condition de la proposition</u> 2. <u>On a alors</u> $E[e^{sT_D}]<+\infty$ <u>dès que</u> $sM^2<s_0$, <u>où</u> s_0 <u>est un nombre</u> >0 <u>indépendant de</u> μ.

Une condition suffisante :

COROLLAIRE. <u>Soit</u> S <u>un temps d'arrêt</u> borné, <u>et soit</u> μ <u>la loi de</u> B_S. <u>Alors le temps de Dubins associé à</u> μ <u>admet des moments exponentiels</u>.

DEMONSTRATION. Supposons par exemple $S\leqq 1$. Notons $B^*_{s,t}$ la quantité $\sup_{s\leqq u\leqq t} |B_u-B_s|$ et τ_a le temps d'atteinte de a : $\tau_a=\inf\{t>0\ ;\ B_t=a\}$.

On a $\{\tau_{a+1}<S\}\cap\{B^*_{\tau_{a+1},\tau_{a+1}+1}<1\}\subset\{B_S>a\}$ (remarquer que la condition $S\leqq 1$ entraîne que $S<\tau_{a+1}+1$ quel que soit a). On en déduit

$$P\{\tau_{a+1}<S\}.P\{B^*_{0,1}<1\} \leqq P\{B_S>a\}$$

car $B^*_{\tau_{a+1},\tau_{a+1}+1}$ et $B^*_{0,1}$ ont même loi. On a également $\{B_S>a+1\}\subset\{\tau_{a+1}<S\}$. Il vient donc

$$\int_{\{B_S>a\}} B_S \leqq (a+1)P\{B_s>a\}+\int_{\{B_s>a+1\}}(B_S-a-1)$$
$$\leqq (a+1)P\{B_s>a\}+P\{\tau_{a+1}<S\}E[B^*_{0,1}]$$

puisque $|B_S-a-1|=|B_S-B_{\tau_{a+1}}|$ sur $\{\tau_{a+1}<S\}$, et que cette v.a. est majorée par $B^*_{\tau_{a+1},\tau_{a+1}+1}$ de même loi que $B^*_{0,1}$.

Les deux remarques combinées donnent

$$\frac{1}{P\{B_S>a\}}\int_{\{B_S>a\}} B_S \leqq a+1+E[B^*_{0,1}]/P\{B^*_{0,1}<1\}$$

et par conséquent, avec les notations utilisées plus haut

$$[\![X]\!] \leqq 1+E[B^*_{0,1}]/P\{B^*_{0,1}<1\}.$$

IV. CONSTRUCTION D'UN TEMPS D'ARRET

On construit un temps d'arrêt T du mouvement brownien (B_t) tel que $E[e^{sT}]<\infty$ pour tout s, et tel que si μ est la loi de B_T, T_D le temps de Dubins associé à μ, $E[e^{sT_D}]=\infty$ pour tout $s>0$.

Soit $S_{A,a} = \inf\{t \mid t>0,\ B_t=A+a \text{ ou } B_t=A-a\}$, et $S_{A,a,M}=S_{A,a}\wedge M$. Remarquons que

(7) Pour tout s, $E[\exp(sS_{A,a,M})]$ est fini (puisqu'il s'agit d'un temps borné).

(8) $\lim_M P_A\{B_{S_{A,a,M}}=A+a\}= \frac{1}{2} = P_A\{B_{S_{A,a,M}}>A\}$ (P_x ,E_x représentent probabilité et espérance avec loi initiale ε_x).

Choisissons une suite a_n de nombres $\geqq 0$ telle que si $A_n=\sum_{k\leqq n} a_k$ on ait

(9) $$A_n > \tfrac{3}{2}A_{n-1} \quad \text{(donc } a_n \text{ tend vers } +\infty\text{)}$$

Puis d'après (8) une suite M_n telle que M_n tende vers l'infini et

(10) $$\lim_n P_{A_n}\{ B_{S_{A_n,a_n,M_n}} = A_n+a_n \} = 1/2$$

Puis une suite s_n tendant vers l'infini, et une suite b_n de nombres >0 , telle que $b_n<1$, $\lim_n b_n=0$ et que

$$\sum_n (\prod_{k<n} b_k)(\prod_{k\leqq n} E_{A_n}[\exp(s_n S_{A_n,a_n,M_n})]) < \infty$$

Les transformées de Laplace en question étant des fonctions finies et croissantes de s , cela garantit que

(11) $$\text{pour tout } s>0 \text{ , } \sum_n (\prod_{k<n} b_k)(\prod_{k\leqq n} E_{A_n}[\exp(sS_{A_n,a_n,M_n})]) < \infty$$

Adjoignons maintenant à notre brownien une suite de v.a. Z_n, indépendantes entre elles et indépendantes de (B_t), de répartition $P\{Z_n=1\}= b_n = 1-P\{Z_n=0\}$. Définissons la suite des temps d'arrêt T_n par $T_0=0$ et

$$T_n = T_{n-1} + S_{B_{T_{n-1}},a_n,M_n} \circ\theta_{T_{n-1}}$$

C_n sera l'événement $\{B_{T_n}-B_{T_{n-1}} = a_n\}$, $D_n=\{Z_n=1\}$, $\Gamma_n= \bigcap_{k\leqq n} C_k$,

$\Delta_n = \bigcap_{k\leqq n} D_k$. $\Delta_n \downarrow \emptyset$ puisque b_n tend vers 0 . Définissons alors T par

$$T = \sum_n 1_{\Gamma_{n-1}\cap\Delta_{n-1}\setminus\Gamma_n\cap\Delta_n}\cdot T_n$$

Soit $\underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{T}}(\ B_s, s\leq t,\ Z_n, n\in N\ )$. Comme $\Gamma_n\cap\Delta_n\in\underline{\underline{F}}_{T_n}$, T est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$.

LEMME 2. $E[e^{sT}]<+\infty$ <u>pour tout</u> s, <u>et la loi</u> μ <u>de</u> B_T <u>ne satisfait pas à la condition de la proposition</u> 2.

DEMONSTRATION. $E[e^{sT}] \leqq \sum_n E[1_{\Delta_{n-1}} e^{sT_n}] \leqq \sum_n (\prod_{k<n} b_k)(\prod_{k\leqq n} E[\exp sS_{0,a_n,M_n}])$

Comme S_{0,a_n,M_n} a même loi pour P_0 que S_{A_n,a_n,M_n} pour P_{A_n}, cette quantité est finie d'après (11).

Etudions maintenant B_T. On a $\{T\geqq T_n\}=\Gamma_{n-1}\cap\Delta_{n-1}$, donc $\{T\geqq T_n, Z_n=0\}\subset \{T=T_n\}$. Par ailleurs

$$\{T\geqq T_n\}\cap C_n\cap\{Z_n=0\} \subset C_1\cap C_2\cap\ldots\cap C_n\cap\{T=T_n\}\subset\{B_{T_1}=A_1,\ldots,B_{T_n}=A_n, T=T_n\}$$
$$\subset\{B_T=A_n\}$$

soit

(12) $P\{B_T=A_n\} \geqq P\{T\geqq T_n\}P(C_n)P\{Z_n=0\}$

car $\{T\geqq T_n\}=\Gamma_{n-1}\cap\Delta_{n-1}$ ne dépend que de $(B_s, s\leqq T_{n-1}, Z_k, k\leqq n-1)$, et est donc indépendant de C_n et de Z_n. Ensuite, on a $\{T\leqq T_{n-1}\}\subset \{B_T\leqq A_{n-1}\}$ et donc

(13) $\{B_T>A_{n-1}\} \subset \{T\geqq T_n\}$

soit, puisque $A_n > 3/2\ A_{n-1}$ d'après (9)

$$\frac{P\{B_T>3/2\ A_{n-1}\}}{P\{B_T>A_{n-1}\}} \geqq \frac{P\{B_T = A_n\}}{P\{B_T > A_{n-1}\}} \geqq \frac{P\{T\geqq T_n\}P(C_n)P\{Z_n=0\}}{P\{T\geqq T_n\}}$$

qui tend vers 1/2, car $b_n \to 0$, et $P(C_n) \to 1/2$ d'après (10).

Maintenant, comme A_n tend vers $+\infty$, nous avons pour tout M fixé

$$\limsup_{a\to\infty} \frac{P\{B_T>a+M\}}{P\{B_T>a\}} \geqq \lim_n \frac{P\{B_T>3/2\ A_{n-1}\}}{P\{B_T > A_{n-1}\}} = 1/2$$

et la condition de la proposition 2 n'est pas satisfaite.

REMARQUE FINALE. Bien que le temps de Dubins T_D associé à μ ne satisfasse pas la conjecture du début, on gagne par rapport au temps de Skorokhod T_S. Pour que T_S ait des moments exponentiels il est nécessaire, on l'a vu, que le support de μ soit compact, alors que pour T_D il suffit que μ soit la loi de B_S pour un temps d'arrêt <u>borné</u> S (ce qui inclut la loi de B_1, dont le support est $\mathbb{R}$). Cette condition n'est d'ailleurs pas nécessaire : par exemple, la loi symétrique μ telle que $\mu\{|x|>a\}=e^{-a}$ satisfait à la condition de la proposition 2, donc T_D admet des moments exponentiels. Mais $\int e^{sx^2}d\mu(x)=+\infty$, donc μ ne peut être représentée au moyen d'un temps d'arrêt borné.