SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

BERNARD HEINKEL

Une condition suffisante pour la continuité presque sûre des trajectoires de certains processus gaussiens

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 77-94

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__77_0>

UNIVERSITE DE STRASBOURG
Département de Mathématique

Séminaire de Probabilités

UNE CONDITION SUFFISANTE POUR LA CONTINUITE PRESQUE SURE DES TRAJECTOIRES DE CERTAINS PROCESSUS GAUSSIENS

Bernard HEINKEL

Depuis quelques années, le problème consistant à rechercher des conditions suffisantes pour assurer la continuité presque sûre des trajectoires d'un processus gaussien a reçu des solutions relativement satisfaisantes, pour des ensembles d'indices de plus en plus généraux.

Le premier de ces résultats est dû à Fernique (1964) ; il considère le cas d'un processus gaussien $\{X_t, t \in T\}$, avec $T = [0,1]^k$.

THEOREME 1 (Fernique [3]).- *S'il existe une fonction* φ *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *à valeurs réelles positives, telle que* :

(i) $(E(X_s - X_t)^2)^{\frac{1}{2}} \leq \varphi(|s-t|) \qquad \forall s,t \in [0,1]^k$

(ii) *Il existe* $\alpha > 0$, *tel que* φ *soit croissante sur* $]0,\alpha[$

(iii) *Il existe* $M < \infty$, *tel que* :

$$\int_M^\infty \varphi(e^{-x^2})dx < \infty$$

Alors le processus $\{X_t, t \in [0,1]^k\}$ *est à trajectoires presque sûrement continues.*

Dudley (1967) généralisa ce résultat en donnant une condition suffisante pour la continuité presque sûre des trajectoires de certains processus gaussiens $\{X_t, t \in K\}$ où K est un sous-ensemble compact "bien choisi" d'un espace de Hilbert réel séparable. Plus précisément, on a l'énoncé suivant :

THEOREME 2 (Dudley [2]).- *Soient* H *un espace de Hilbert réel séparable,* $<\, ,\, >$ *le produit scalaire sur* H *et* K *un sous-ensemble compact de* H . *Posons*

$$r_o(K) = \limsup_{\epsilon \to 0} \left\{ \frac{\operatorname{Log} H(\epsilon)}{\operatorname{Log}(1/\epsilon)} \right\}$$

avec

$$H(\epsilon) = \operatorname{Log} N(\epsilon) \qquad \forall \epsilon > 0$$

où l'on a désigné par $N(\epsilon)$ le nombre minimal de boules ouvertes de rayon ϵ nécessaires pour recouvrir K .

Si $r_o(K) < 2$, il existe un processus gaussien $\{X_t, t \in K\}$ de covariance R , avec :

$$R(s,t) = < s,t > \qquad \forall s,t \in K$$

qui soit à trajectoires presque sûrement continues.

En 1970, Garsia trouva une condition équivalente à celle de Fernique (cf. § 3 ci-dessous), mais par des méthodes radicalement différentes :

THEOREME 3 (Garsia [4]).- Soit un processus gaussien $\{X_t, t \in [0,1]^n\}$. Posons

$$p(u) = \sup_{|s-t| \leq |u|\sqrt{n}} [E(X_s - X_t)^2]^{\frac{1}{2}}$$

Supposons que la condition suivante soit remplie :

$$\int_0^1 (-\mathrm{Log}\, u)^{\frac{1}{2}}\, dp(u) < \infty$$

Alors le processus $\{X_t, t \in [0,1]^n\}$ est à trajectoires presque sûrement continues.

Enfin, Preston (1972) a généralisé les méthodes de Garsia en les étendant de $[0,1]^n$ à un espace métrique compact quelconque. Il a obtenu l'énoncé suivant :

THEOREME 4 (Preston [6]).- Soit K un espace métrique compact. Considérons un processus gaussien $\{X_t, t \in K\}$ dont la covariance vérifie la condition suivante :

$$\int_0^1 [-\mathrm{Log}\, r\, H(2\delta r)\,]^{\frac{1}{2}} d\bar{v}\,(r) < \infty$$

où

$$v(u) = \sup_{d(s,t) \leq u} (E(X_s - X_t)^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u \geq 0$$

et

$$\bar{v}(u) = v(2u)\ .$$

et où δ désigne le diamètre de K , H ayant la même signification que dans l'énoncé de Dudley.

Alors $\{X_t, t \in K\}$ est à trajectoires presque sûrement continues.

Preston a montré que le Théorème 2 peut être établi comme corollaire du Théorème 4 . Nous montrerons que le Théorème 4 est un corollaire du Théorème 3.1 (cf. Théorème 6 ci-dessous) que Dudley a démontré dans le même article [2] que le Théorème 2.

Plaçons-nous dans les mêmes conditions que Preston, i.e. considérons un processus gaussien $\{X_t, t \in K\}$, K étant un espace métrique compact. Deux questions importantes se posent :

i) Quels sont les résultats maximaux qu'on peut atteindre en employant les méthodes de Garsia et Preston ?

ii) Les résultats maximaux sont-ils plus fins que ceux de Fernique et Dudley ?

Nous allons établir ces résultats maximaux en généralisant le Lemme 2 de l'article de Preston [6] et montrer qu'en fait ils ne sont pas plus fins que les résultats précédents.

§ 1 . NOTATIONS ET ENONCE DU RESULTAT

Soient $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace de probabilité, $(K d)$ un espace métrique compact et $\{X_t, t \in K\}$ un processus gaussien sur Ω , à valeurs réelles, centré, de covariance R continue.

Avant d'énoncer le résultat fondamental, je vais introduire quelques notations.

Posons

$$v(u) = \sup_{d(s,t) \leq u} (E(X_s - X_t)^2)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\bar{v}(u) = v(2u).$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on notera $N(\epsilon)$ le nombre minimal de boules ouvertes de rayon ϵ nécessaires pour recouvrir K .

On appellera δ le diamètre de K .

On notera γ la fonction définie sur $]0,1]$, à valeurs réelles positives, telle que :

$$\forall r \in]0,1] \qquad \gamma(r) = [-\frac{\operatorname{Log} r}{\operatorname{Log} 2}]$$

où $[\ ]$ désigne la fonction "partie entière".

Au § 2, j'établirai le Théorème suivant, qui est le résultat maximal annoncé :

THEOREME 5.- <u>Soit le processus gaussien</u> $\{X_t, t \in K\}$.

<u>Supposons que les deux conditions suivantes soient réalisées</u> :

(i) <u>Il existe une fonction</u> G <u>définie sur</u> $\mathbb{R}$, <u>à valeurs réelles strictement positives, continue, paire, convexe croissante sur</u> $\mathbb{R}^+$, <u>telle que</u> :

$$\int_0^\infty G(x) \overset{+}{\operatorname{Log}}\, G(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx < \infty$$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 G^{-1}\{(N(\delta 2^{-\gamma(r)-3}))^{2}\, \gamma(r)+6\}d\bar{\nu}(r) < \infty$

Alors le processus $\{X_t, t \in K\}$ admet une version séparable et mesurable à trajectoires presque sûrement continues.

De plus, il existe une version pour laquelle on ait presque sûrement

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq 10 \int_0^{d(s,t)} G^{-1}\{N(\delta 2^{-\gamma(r)-3}))^{2\gamma(r)+6} B(\omega)\}d\bar{\nu}(r)$$

où B est une v.a. définie sur Ω à valeurs réelles positives, d'espérance finie.

§ 2 . DEMONSTRATION DU THEOREME 5

La démonstration du théorème nécessite l'établissement de 3 Propositions. Deux d'entre elles figurent déjà dans l'article de Preston ; je me contenterai donc de les énoncer sans démonstration. La troisième étant différente de l'énoncé correspondant de Garsia [4] et Preston, je l'établirai en détails.

Introduisons d'abord quelques notations supplémentaires.

On notera $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur K .

Soit Ψ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles positives, continue, paire, convexe croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Soit d'autre part ρ une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs réelles, nulle en 0 et strictement positive ailleurs, continue, croissante, comme plus haut, on notera :

$$\bar{\rho}(u) = \rho(2u) \qquad \forall u \geq 0$$

On désignera par m la fonction définie sur $]0,1]$, à valeurs réelles positives, telle que :

$$\forall r \in]0,1] \quad m(r) = \inf_{x \in K} \mu\{B_r(x)\}$$

où μ est une mesure de probabilité sur $(K,\mathcal{B})$ qui sera précisée dans la Proposition 1, et où $B_r(x)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r .

J'aurai besoin des résultats suivants :

PROPOSITION 1 [6].- <u>Il existe une mesure de probabilité</u> μ <u>sur</u> $(K,\mathcal{B})$, <u>telle que</u> :

$$\forall r > 0, \ \forall x \in K \quad \mu(B_r(x)) > \left[\prod_{k=1}^{\gamma(r)+2} N(2^{-k}\delta)\right]^{-1}$$

PROPOSITION 2 [6].- Soit f une fonction appartenant à $L^1(K,\mathcal{B},\mu)$ telle que :

$$\int_K\int_K \Psi\left\{\frac{f(s)-f(t)}{\rho(d(s,t))}\right\} d\mu(s)d\mu(t) = c_o < \infty$$

Supposons de plus :

$$\int_0^1 \Psi^{-1}\left\{\frac{c_o}{m^2(u/2)}\right\} d\bar{\rho}(u) < \infty$$

Alors il existe une fonction g définie sur K, à valeurs réelles, continue, égale à f presque sûrement, avec de plus :

$$|g(x)-g(y)| \leq 10 \int_0^{d(x,y)} \Psi^{-1}\left\{\frac{c_o}{m^2(u/2)}\right\} d\bar{\rho}(u) .$$

Introduisons maintenant une suite de v.a.r. gaussiennes qui interviendra dans la Proposition 3.

Considérons le développement de Mercer de la covariance R :

$$R(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(s)\varphi_n(t)$$

où $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues orthonormales et $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs.

Soit $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. gaussiennes, définies sur Ω, indépendantes, centrées, réduites.

Pour tout $t\in K$ et tout entier n, on pose :

$$X_t^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k}\, \varphi_k(t)\theta_k$$

Enonçons maintenant le résultat nouveau par rapport aux arguments de démonstration employés par Preston.

PROPOSITION 3.- <u>Soit une fonction</u> G <u>définie sur</u> $\mathbb{R}$ <u>à valeurs réelles strictement positives, continue, paire, convexe croissante sur</u> $\mathbb{R}^+$, <u>qui</u>

satisfasse aux conditions suivantes :

$$\text{(i)} \int_0^\infty G(x)\overset{+}{\mathrm{Log}}\, G(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx < \infty$$

$$\text{(ii)} \int_0^1 G^{-1}\{ \frac{1}{m^2(u/2)} \}\, d\bar{v}(u) < \infty$$

Alors :

(a) Si l'on note B la v.a.r. définie par

$$B(\omega) = \sup_n \int_K \int_K G\{\frac{X_s^{(n)}(\omega)-X_t^{(n)}(\omega)}{v(d(s,t))}\}\, d\mu(s)d\mu(t)$$

B est d'espérance finie

(b) L'inégalité suivante est réalisée presque sûrement pour tout entier n :

$$|X_s^{(n)}(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)| \leq 10 \int_0^{d(s,t)} G^{-1}\{\frac{B(\omega)}{m^2(u/2)}\}d\bar{v}(u)$$

(c) Il existe un ensemble $\Omega_o \in \mathfrak{F}$, avec :

$$P(\Omega_o) = 1$$

tel que pour tout $\omega \in \Omega_o$, la suite $\{X_{(.)}^{(n)}(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K .

Démonstration de la Proposition 3. (a) Soient s et t deux éléments de K fixés. Posons

$$Y_n = \frac{X_s^{(n)} - X_t^{(n)}}{v(d(s,t))} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

On notera

$$Z_n = G\{Y_n\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Les $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ formant une martingale et G étant convexe, $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale.

Les v.a. $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont gaussiennes centrées ; pour tout n, on a : $\sigma_n \le 1$, où σ_n désigne l'écart-type de Y_n. J'en déduis :

$$\sup_n E\{Z_n \overset{+}{\mathrm{Log}}\, Z_n\} = \sup_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\overset{+}{\mathrm{Log}}\, G(x)\; e^{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}}\, dx$$

$$= \sup_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\sigma_n x)\overset{+}{\mathrm{Log}}\, G(\sigma_n x) e^{-\frac{x^2}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\overset{+}{\mathrm{Log}}\, G(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx < \infty$$

D'après un Théorème de Doob (cf [5] page 122), on a donc :

$$D = E\{\sup_n Z_n\} < \infty$$

Appliquons le Théorème de Fubini :

$$E \int_K \int_K \sup_n Z_n \, d\mu(s) d\mu(t) \le D$$

Posons

$$B(.) = \sup_n \int_K \int_K Z_n(.) d\mu(s) d\mu(t)$$

On aura

$$B(.) \le \int_K \int_K \sup_n Z_n(.)\, d\mu(s) d\mu(t)$$

D'où

$$E(B) \le D$$

(b) Par définition de B, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_K \int_K Z_n(\omega) d\mu(s) d\mu(t) \le B(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega$$

Nous venons d'établir que, presque sûrement :

$$B(\omega) < \infty$$

D'après la Proposition 2, on a donc, pour tout entier n et pour presque tout ω :

$$(1) \qquad |X_s^{(n)}(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)| \leq 10 \int_0^{d(s,t)} G^{-1}\{\frac{B(\omega)}{m^2(u/2)}\} \, d\bar{v}(u)$$

(c) D'après le Théorème de Mercer, on a

$$R(t,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n^2(t)$$

De ce fait, la série de v.a. indépendantes $S(t,.)$, où

$$S(t,.) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\varphi_n(t)\theta_n(.)$$

converge en loi pour tout $t \in K$, fixé ; elle converge donc également presque sûrement pour tout $t \in K$, fixé.

Soit $A(t)$ l'ensemble suivant :

$$A(t) = \{\omega | \{X_t^{(n)}(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas}\}$$

Soit T une partie dénombrable dense de K. Posons

$$A = \bigcup_{t\in T} A(t)$$

Il est clair que A est négligeable.

Soit ω n'appartenant pas à A et tel que la relation (1) soit vérifiée. Alors la suite $\{X_t^{(n)}(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $t \in T$.

La suite $\{X_{(.)}^{(n)}(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue d'après (1). De plus, les fonctions $\{X_{(.)}^{(n)}(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

Donc, $\{X_{(.)}^{(n)}(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge sur K vers une fonction $Y_{(.)}(\omega)$ continue sur K.

K étant un espace métrique compact, cette convergence est uniforme.

Cette convergence étant réalisée pour presque tout $\omega \in \Omega$, la Proposition 3 est donc entièrement établie.

Utilisons maintenant les résultats des Propositions 1 et 3 pour démontrer le Théorème 5.

D'après la Proposition 1 et la définition de la fonction m, on a :

$$\forall r > 0 \qquad m(r) \geq [N(\delta 2^{-(\gamma(r)+2)})]^{-(\gamma(r)+2)}$$

D'où

$$G^{-1}\{\frac{1}{m^2(u/2)}\} \leq G^{-1}\{[N(\delta 2^{-(\gamma(u)+3)})]^{2\gamma(u)+6}\}$$

Appliquons maintenant le résultat de la Proposition 3. Supposons que :

$$\int_0^1 G^{-1}\{[N(\delta 2^{-(\gamma(r)+3)})]^{2\gamma(r)+6}\} d\bar{\nu}(r) < \infty$$

Alors il existe un ensemble $\Omega_0 \in \mathcal{F}$, avec :

$$P(\Omega_0) = 1$$

tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, la suite $\{X_{(.)}^{(n)}(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{K}$.

Pour tout entier n, on a de plus, presque sûrement :

$$|X_s^{(n)}(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)| \leq 10 \int_0^{d(s,t)} G^{-1}\{B(\omega).[N(\delta 2^{-(\gamma(r)+3)})]^{2\gamma(r)+6}\} d\bar{\nu}(r)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient le résultat annoncé.

§ 3 . COMPARAISON AVEC LES RESULTATS CLASSIQUES

Je vais d'abord démontrer qu'en fait, le Théorème 5 est équivalent au Théorème 4.

Montrons d'abord que si les hypothèses (i) et (ii) du Théorème 5 sont réalisées, celle du Théorème 4 l'est aussi.

Soit G une fonction satisfaisant aux hypothèses (i) et (ii) du Théorème 5.

On a donc

$$C = \int_0^\infty G(u) \overset{+}{\mathrm{Log}}\, G(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du < \infty$$

D'où

$$\forall x > 0 \qquad \int_x^{2x} G(u)\overset{+}{\mathrm{Log}}\, G(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du < C$$

G étant convexe croissante, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty$$

Il existe donc $D > 0$, tel que :

$$x > D \Rightarrow G(x) > e$$

Pour un tel x, on a

$$\int_x^{2x} G(u)\mathrm{Log}\, G(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du > x\, G(x) e^{-2x^2}$$

D'où

$$\forall x > D \Rightarrow G(x) < \frac{ce^{2x^2}}{x}$$

Supposons

$$x > \sup\,(C,D)$$

Alors on aura :

$$G(x) < e^{2x^2}$$

et de ce fait :

$$\forall x > \sup(e^{2C^2}, e^{2D^2}) \Rightarrow G^{-1}(x) > \left(\frac{\mathrm{Log}\ x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

D'après la relation (2) et l'hypothèse (ii) du Théorème 5, la condition intégrale de Preston, qui n'est autre que la condition (ii) où l'on a pris :

$$G^{-1}(x) = (\mathrm{Log}\ x)^{\frac{1}{2}}$$

est remplie.

Supposons maintenant que le processus $\{X_t, t \in K\}$ satisfasse à l'hypothèse de Preston. Posons :

$$\Psi(x) = e^{\frac{x^2}{8}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dans la démonstration de Preston et Garsia (cf [4]), Ψ joue le même rôle que G dans la mienne.

Les hypothèses (i) et (ii) sont donc remplies pour la fonction Ψ .

Donc, contrairement aux apparences, le résultat établi plus haut n'est pas plus général que celui de Preston.

Pour retrouver le résultat de Garsia [4] dans le cas où $K=[0,1]^n$ on remplace la mesure μ par la mesure de Lebesgue dans le raisonnement précédent ; il est évident qu'on peut simplifier grandement dans ce cas particulier la démonstration de la Proposition 2 en employant des propriétés de dérivation de mesures.

Montrons maintenant que les Théorèmes 1 et 3 sont équivalents. Nous allons établir cette équivalence dans le cas le plus simple, celui où $K = [0,1]$.

Nous allons montrer d'abord que s'il existe une fonction φ vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) du Théorème1, alors la condition intégrale du Théorème 3 est remplie. On aura donc :

$$\int_M^\infty \varphi(e^{-x^2})dx = \int_0^{e^{-M^2}} \frac{\varphi(u)du}{2u(\text{Log }\frac{1}{u})^{\frac{1}{2}}} < \infty$$

Posons

$$A = \inf\{e^{-M^2},\alpha\}$$

On aura :

$$\int_0^A \frac{\varphi(u)du}{2u(\text{Log }\frac{1}{u})^{\frac{1}{2}}} < \infty$$

R étant uniformément continue, pour tout $u>0$ il existe s_1 et t_1 tels que :

$$v(u) = (E(X_{s_1} - X_{t_1})^2)^{\frac{1}{2}} \leq \varphi(|s_1 - t_1|)$$

φ étant croissante sur $]0,A[$, on en déduit :

$$v(u) \leq \varphi(u) \qquad \forall u \in]0,A[$$

et :

$$J = \int_0^A \frac{v(u)}{2u(\mathrm{Log}\ \frac{1}{u})^{\frac{1}{2}}}\, du < \infty$$

Calculons cette intégrale par parties :

$$J = [-v(u)(-\mathrm{Log}\ u)^{\frac{1}{2}}]_0^A + \int_0^A (-\mathrm{Log}\ u)^{\frac{1}{2}} dv(u)$$

Or on a

$$0 \leq v(A)(-\mathrm{Log}\ A)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

et :

$$v(x)(-\mathrm{Log}\ x)^{\frac{1}{2}} \geq 0 \qquad \forall x \in]0,1]$$

Du fait que J est finie, on aura donc :

$$0 \leq \int_0^A (-\mathrm{Log}\ u)^{\frac{1}{2}}\, dv(u) < \infty$$

La condition de Garsia est donc réalisée lorsque celle de Fernique l'est.

Démontrons maintenant la réciproque.

On suppose donc :

$$\int_0^1 (-\mathrm{Log}\ x)^{\frac{1}{2}} dv(x) < \infty$$

On aura donc pour tout $\epsilon \in]0,1]$:

$$v(\epsilon)(-\mathrm{Log}\ \epsilon)^{\frac{1}{2}} < \int_0^\epsilon (-\mathrm{Log}\ x)^{\frac{1}{2}} dv(x) < \infty$$

et par suite :

$$\lim_{\epsilon \to 0} (-\mathrm{Log}\ \epsilon)^{\frac{1}{2}} v(\epsilon) = 0$$

D'où

$$\int_0^1 \frac{v(x)dx}{2x(-\mathrm{Log}\ x)^{\frac{1}{2}}} < \infty$$

Il existe donc $M < \infty$, tel que :

$$\int_M^\infty v(e^{-x^2})dx < \infty$$

Or v vérifie également les hypothèses (i) et (ii) du Théorème de Fernique.

Donc, lorsque la condition de Garsia est remplie, il en est de même de celle de Fernique.

Les théorèmes 1 et 3 sont donc équivalents.

Démontrons enfin que si K est un sous-ensemble compact d'un espace de Hilbert réel séparable, le Théorème 4 est un corollaire du Théorème 6 suivant, dans le cas particulier d'un processus gaussien dont la covariance est donnée par :

$$E(X_s,X_t) = < s,t > \qquad \forall s,t \in K$$

THEOREME 6 [2].- Soit K un sous-ensemble compact d'un espace de Hilbert réel séparable. Considérons un processus gaussien $\{X_t, t \in K\}$, dont la covariance est donnée par :

$$E(X_s\ X_t) = < s,t > \qquad \forall s,t \in K$$

Supposons que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H(1/2^n)^{\frac{1}{2}}}{2^n} < \infty$$

Alors le processus $\{X_t, t \in K\}$ est à trajectoires presque sûrement continues.

Supposons que la condition intégrale de Preston soit satisfaite on a donc :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (-\mathrm{Log} r\ H(2\delta r))^{\frac{1}{2}} d\bar{v}(r) < \infty$$

D'après l'expression de la covariance, on a :

$$\bar{v}(u) = 2u \qquad \forall u \in [0,\tfrac{1}{2}]$$

D'où

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (\mathrm{Log}\ \frac{2\delta}{u}\ H(u))^{\frac{1}{2}}\ du < \infty \qquad (3)$$

Minorons l'intégrale I :

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-(k+1)}}^{2^{-k}} (\mathrm{Log}\ \frac{2\delta}{u}\ H(u))^{\frac{1}{2}} du \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\ (\mathrm{Log}\ 2^{k+1}\delta H(2^{-k}))^{\frac{1}{2}}$$

D'après la relation (3), on aura donc :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H(^1/_{2^k})^{\frac{1}{2}}}{2^k} < \infty$$

Le processus $\{X_t, t \in K\}$ est donc à trajectoires p.s. continues d'après le Théorème 6.

On a ainsi établi le Théorème 4 dans le cas particulier considéré.

Dans un certain sens, le Théorème 5 est le meilleur possible. En effet, il n'est pas possible d'améliorer davantage la Proposition 3 , Blackwell et Dubins [1] ayant montré qu'étant donnée une sous-martingale positive $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, il n'existe pas de condition plus large portant uniquement sur $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ que :

$$\sup_n E\{X_n \overset{+}{\mathrm{Log}}\, X_n\} < \infty$$

et suffisante pour assurer l'intégrabilité de $\sup\limits_n X_n$.

B. HEINKEL

Strasbourg, le 7.11.1972

REFERENCES

[1] D. BLACKWELL and L.E. DUBINS — A converse to the dominated convergence theorem. Ill. J. of Math. t. 7 (1963), pp. 508-514.

[2] R.M. DUDLEY — The sizes of compact subsets of Hilbert spaces and continuity of gaussian processes. J. Functional Analysis 1 (1967), pp. 290-330.

[3] X. FERNIQUE — Continuité des processus gaussiens. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 258 (1964), pp. 6058-60.

[4] A.M. GARSIA — Continuity properties of multi-time-dimensional gaussian processes. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math.Statist. Prob. Univ. of California Press.

[5] P.A. MEYER — Probabilités et Potentiel. Hermann Paris (1966).

[6] C. PRESTON — Continuity properties of some gaussian processes. Ann. Math. Stat. Vol. 43 n° 1 (1972), pp. 285-292.