

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Potentiels de fonctionnelles additives. Un contre-exemple de Knight

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 58-60

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__58_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

POTENTIELS DE FONCTIONNELLES ADDITIVESUN CONTRE-EXEMPLE DE KNIGHT (exposé de C. Dellacherie)

Dans "Potentiels de Green et fonctionnelles additives" (cf vol. IV du séminaire), nous avons été amenés à poser le problème suivant : soit (A_t) une fonctionnelle additive naturelle, dont le potentiel est fini presque-partout; le potentiel est-il alors fini partout ?

Nous présentons ici un contre-exemple que nous a communiqué Knight, simplifié en suivant une suggestion de Bretagnolle.

L'espace d'états E sera la somme topologique dénombrable $\sum_{n \geq 0} \mathbb{R}_+^{(n)}$ où $\mathbb{R}_+^{(n)}$ est une copie de \mathbb{R}_+ ; pour $u \in \mathbb{R}_+$, nous désignerons par $u^{(n)}$ le point correspondant de $\mathbb{R}_+^{(n)}$ (mais aussi par u s'il n'y pas d'ambiguïté). Nous allons décrire d'abord informellement le processus, en fait la réalisation d'un semi-groupe. Si on part d'un point de $\mathbb{R}_+^{(n)}$ avec $n > 0$, on continue à se déplacer sur $\mathbb{R}_+^{(n)}$ suivant la translation uniforme de vitesse $1/n$. Si on part d'un point de $\mathbb{R}_+^{(0)}$, on se déplace sur $\mathbb{R}_+^{(0)}$ suivant la translation uniforme de vitesse 1 , mais on se permet aussi un saut dans $\mathbb{R}_+^{(n)}$, $n > 0$, selon les modalités suivantes. On désigne par I_n l'intervalle $[1/n, 1/(n-1)[$ de $\mathbb{R}_+^{(0)}$ pour $n > 0$, et on se donne une v.a. exponentielle T , de paramètre 1 : T va définir le moment du saut, et les I_n , l'endroit où l'on saute. Plus précisément,

si T arrive au moment où la trajectoire issue d'un point de $\mathbb{R}_+^{(0)}$ se trouve dans I_n , alors on saute à l'origine de $\mathbb{R}_+^{(n)}$.

La construction d'un tel processus n'est pas bien difficile. Pour n fixé, désignons par $\Omega^{(n)}$ l'ensemble des applications ω de \mathbb{R}_+ dans $\mathbb{R}_+^{(n)}$ de la forme $X_t(\omega) = \omega(t) = x^{(n)} + \frac{t}{n}$ pour $n > 0$, et de la forme $X_t(\omega) = \omega(t) = x^{(0)} + t$ pour $n = 0$. On sait très bien réaliser la translation uniforme de vitesse $1/n$ pour $n > 0$ (resp 1 pour $n = 0$) sur $\mathbb{R}_+^{(n)}$ en prenant $\Omega = \sum_{n \geq 0} \Omega^{(n)}$ comme ensemble de trajectoires. Donnons nous maintenant la v.a. exponentielle T définie sur un espace W ; posons $\bar{\Omega} = \Omega \times W$, $\bar{\omega} = (\omega, w)$ et

$$Y_t(\bar{\omega}) = X_t(\omega) \text{ si } X_0(\omega) \notin \mathbb{R}_+^{(0)} \text{ ou si } T(w) > t$$

$$Y_t(\bar{\omega}) = \left[\frac{t-T}{n} \right]^{(n)} \text{ si } X_0(\omega) \in \mathbb{R}_+^{(0)}, T(w) \leq t, n \text{ étant alors l'entier}$$

tel que $X_{T(w)}(\omega)$ appartienne à I_n

Alors, si Ω est muni d'une loi P^x , et si λ désigne la loi de T ,

le processus (Y_t) est fortement markovien pour la loi $\bar{P}^x = P^x \times \lambda$.

Plus précisément, on obtient ainsi une réalisation d'un semi-groupe

de Feller (P_t) dont on peut donner l'expression explicite : pour

$x \in \mathbb{R}_+^{(n)}$, $n > 0$, la mesure $P_t(x, dy)$ est la mesure de Dirac au point $x + \frac{t}{n}$ de $\mathbb{R}_+^{(n)}$; pour $x \in \mathbb{R}_+^{(0)}$, la mesure $P_t(x, dy)$ est somme de mesures portées par les $\mathbb{R}_+^{(k)}$, à savoir la mesure ponctuelle de masse e^{-t} au point $x+t$ de $\mathbb{R}_+^{(0)}$, et, sur $\mathbb{R}_+^{(k)}$ pour $k \geq 1$, la mesure ayant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue dy

$$P_t(x, y) = 1_{\{0 \leq y \leq t/k\}} \cdot 1_{\{x+t-ky \in I_k\}} \cdot k e^{ky-t}$$

Passons maintenant à la construction de la fonctionnelle additive.

Soit f une fonction borélienne positive sur la demi-droite telle

que $a = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ soit fini et non nul, et posons $A_t = \int_0^t f(Y_s) ds$.

Comme toute trajectoire a au plus un saut, il est clair que A_ω est une v.a. finie. Maintenant, si on part de $x \in \mathbb{T}_+^{(n)}$, $n > 0$, on a $\bar{E}^x[A_\omega] \leq na < +\omega$; de même, si on part de $x \in \mathbb{T}_+^{(0)}$, $x \in I_n$, le saut possible ne peut avoir lieu que dans $\mathbb{T}_+^{(k)}$ avec $k \leq n$, et donc on a $\bar{E}^x[A_\omega] \leq na < +\omega$. Reste le cas où x est l'origine de $\mathbb{T}_+^{(0)}$. Nous allons voir qu'alors $\bar{E}^0[A_\omega] = +\omega$; comme l'origine 0 de $\mathbb{T}_+^{(0)}$ est polaire, nous aurons le contre-exemple voulu. On a en effet

$$\bar{E}^0[A_\omega] \geq \sum \lambda\{T \in I_k\} E^T \left[\int_T^\infty f(Y_s) ds \right] = \sum (e^{-(k-1)} - e^{-k}) ka = +\omega$$

Il reste que nous ne voyons pas clairement si on peut adapter cet exemple de sorte à avoir les hypothèses de dualité sous lesquelles nous nous étions placés au début de notre exposé du vol. IV.