CLAUDE DELLACHERIE

Sur les théorèmes fondamentaux de la théorie générale des processus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 38-47
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__38_0>

Séminaire de probabilités
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg Année 1971/72

SUR LES THÉORÈMES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE GÉNÉRALE DES PROCESSUS

C. Dellacherie

Alors que d'ordinaire on se donne, au départ, un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ et une famille croissante de sous-tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$, ce qui permet de définir les temps d'arrêt, on prend ici comme concept de base une famille de variables aléatoires positives (intuitivement, la famille des temps d'arrêt d'un certain type : quelconques, accessibles ou prévisibles), et on construit le reste à partir de là. Cela donne une présentation unifiée des théorèmes fondamentaux (théorèmes de section et de projection). Mais, il ne faut pas se leurrer : la présentation "classique" va réapparaitre au sein des démonstrations. Les références renvoient à ma monographie "Capacités et processus stochastiques" parue chez Springer.

1.- SITUATION DE DÉPART

On se donne un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, et une famille $\underline{\underline{V}}$ de v.a. positives (à valeurs finies ou non). On suppose que la famille $\underline{\underline{V}}$ satisfait la petite liste suivante de propriétés, qu'il serait facile de "légitimer intuitivement" si on veut que $\underline{\underline{V}}$ représente une famille de temps d'arrêt dans l'étude d'un phénomène physique. (Il est prudent aussi de supposer que $\underline{\underline{F}}$ est la tribu engendrée par $\underline{\underline{V}}$).

1 a) la famille $\underline{\underline{V}}$ est saturée pour l'égalité p.s.

b) la famille $\underline{\underline{V}}$ est stable pour les "sup" et "inf" finis

c) la famille $\underline{\underline{V}}$ contient les constantes

d) la famille $\underline{\underline{V}}$ est fermée pour le passage à la limite le long des suites croissantes

e) la famille $\underline{\underline{V}}$ est fermée pour le passage à la limite le long des suites décroissantes stationnaires (la suite (T_n) est dite stationnaire s'il existe $n(\omega)$ tel que $T_{n(\omega)}(\omega) = T_{n(\omega)+1}(\omega) = \dots$ pour tout $\omega\in\Omega$)

f) si S et T sont deux éléments de $\underline{\underline{V}}$, la restriction $S_{\{S<T\}}$ de S à $\{S<T\}$ appartient encore à $\underline{\underline{V}}$ (par définition, la restriction S_A d'une v.a. positive S à un ensemble A est la v.a. égale à S sur A et à $+\infty$ sur le complémentaire de A).

<u>Exemple</u> : Si on a une famille de sous-tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifiant les conditions habituelles, alors les classes

$\underline{\underline{V}}_1$ = ensemble des t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)$

$\underline{\underline{V}}_2$ = ensemble des t.d'a. accessibles de $(\underline{\underline{F}}_t)$

$\underline{\underline{V}}_3$ = ensemble des t.d'a. prévisibles de $(\underline{\underline{F}}_t)$

satisfont les six propriétés que nous venons de voir.

<u>Tribu associée à un temps d'arrêt</u>

Les éléments de $\underline{\underline{V}}$ seront désormais appelés "temps d'arrêt" ou "t.d'a." en abrégé. A chaque $T\in\underline{\underline{V}}$, nous allons associer une tribu de la manière suivante : on pose

$$\underline{\underline{G}}_T = \{A\in\underline{\underline{F}} : T_A \in\underline{\underline{V}}\}$$

où T_A est la restriction de T à A.

2 PROPOSITION.- <u>La famille d'événements</u> $\underline{\underline{G}}_T$ <u>est une sous-tribu de</u> $\underline{\underline{F}}$, <u>que nous appellerons</u> tribu des événements antérieurs à T.

DÉMONSTRATION.- Si (A_n) est une suite décroissante, de limite A, alors T_{A_n} tend en croissant vers T_A : d'où la stabilité de $\underline{\underline{G}}_T$ pour les intersections dénombrables d'après 1-b) et d). D'autre part T_{A^c} est égal à la restriction de T à $\{T < T_A\}$: d'où la stabilité par passage au complémentaire d'après 1-f).

Exemple : Revenons au cas d'une famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifiant les conditions habituelles. Si on a $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}_1$, alors on a $\underline{\underline{G}}_T = \underline{\underline{F}}_T$ pour tout $T \in \underline{\underline{V}}_1$, de même, si on a $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}_2$, alors on a $\underline{\underline{G}}_T = \underline{\underline{F}}_T$ pour tout $T \in \underline{\underline{V}}_2$; par contre, si on a $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}_3$, alors on a $\underline{\underline{G}}_T = \underline{\underline{F}}_{T-}$ pour tout $T \in \underline{\underline{V}}_3$: $\underline{\underline{G}}_T$ est donc, dans le cas prévisible, la tribu des événements strictement antérieurs à T suivant la terminologie consacrée.

Voici quelques propriétés faciles des tribus $\underline{\underline{G}}_T$. Comme partout, le petit outil technique "miraculeux" est la propriété 1-f).

3 PROPOSITION.- Soient S et T deux t.d'a. tels que $S \leq T$. Alors la tribu $\underline{\underline{G}}_S$ est contenue dans la tribu $\underline{\underline{G}}_T$.

DÉMONSTRATION.- Soit $A \in \underline{\underline{G}}_S$. Alors S_A est un t.d'a., et donc aussi la restriction de T à $\{T < S_A\}$, encore égale à la restriction de T à A^c. Donc A^c, et A, appartiennent à $\underline{\underline{G}}_T$.

4 PROPOSITION.- Soit S un temps d'arrêt. On a, pour tout $A \in \underline{\underline{F}}$,

$$A \in \underline{\underline{G}}_S \iff \forall T \in \underline{\underline{V}} \quad A \cap \{S \leq T\} \in \underline{\underline{G}}_T$$

DÉMONSTRATION.- L'implication $\Leftarrow$ est évidente (prendre T = S) Demontrons $\Rightarrow$. Pour $A \in \underline{\underline{G}}_S$, le théorème précédent entraine que A appartient à $\underline{\underline{G}}_U$ où U est la restriction de T à $\{S \leq T\}$ (U est un t.d'a. car $\{S \leq T\}^c = \{T < S\}$) : donc $U_A = T_{A \cap \{S \leq T\}}$ est un t.d'a., ce qui entraine que $A \cap \{S \leq T\}$ appartient à $\underline{\underline{G}}_T$.

<u>Tribu engendrée par $\underline{\underline{V}}$ sur</u> $R_+ \times \Omega$

Soit $\underline{\underline{J}}$ l'ensemble des réunions finies d'intervalles stochastiques de la forme $[S,T[$, où S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$: les propriétés i-b),c) et f) entrainent que $\underline{\underline{J}}$ est une algèbre de Boole, et nous <u>désignerons par $\underline{\underline{T}}$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{J}}$</u> (si on reprend l'exemple d'une famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifiant les conditions habituelles, $\underline{\underline{T}}_1$ est la tribu des ensembles bien-mesurables, $\underline{\underline{T}}_2$ celle des accessibles et $\underline{\underline{T}}_3$ celle des prévisibles).

5 PROPOSITION.- <u>Soit</u> $X = (X_t)$ <u>un processus $\underline{\underline{T}}$-mesurable. Alors la v.a.</u> $X_T \cdot 1_{\{T < +\infty\}}$ <u>est $\underline{\underline{G}}_T$-mesurable pour tout t.d'a.</u> T.

DÉMONSTRATION.- D'apres le théorème des classes monotones, il suffit de considérer le cas où X est l'indicatrice d'un intervalle stochastique de la forme $[S,+\infty[$. On a alors $X_T \cdot 1_{\{T<+\infty\}} = \{S \leq T\} \cap \{T < +\infty\}$, et on applique la proposition 4.

2.- LES THÉORÈMES FONDAMENTAUX

Nous nous contenterons de citer le théorème de section : pour la démonstration "unifiée", voir mon livre p 71 (en fait, on n'a pas besoin de toutes les propriétés du n.1 : e) est inutile, et on peut remplacer c) par "$\underline{\underline{V}}$ contient 0 et $+\infty$")

6 THÉORÈME.- <u>Soit π la projection de</u> $R_+ \times \Omega$ <u>sur</u> Ω. <u>Pour tout</u> $A \in \underline{\underline{T}}$ <u>et tout $\epsilon > 0$, il existe un t.d'a.</u> T <u>tel que</u>

a) $[T] \subset A$

b) $P[\pi(A)] \leq P\{T < +\infty\} + \epsilon$

Etant donnée la propriété 1-e), on a

7 COROLLAIRE.- <u>Toute v.a. positive dont le graphe est $\underline{\underline{T}}$-mesurable est un temps d'arrêt.</u>

D'où deux autres corollaires : tout intervalle stochastique (dont les extremités sont des temps d'arrêt) est $\underline{\underline{T}}$-mesurable, et le début d'un ensemble $\underline{\underline{T}}$-mesurable fermé à droite est un temps d'arrêt.

Pour tout temps constant t, nous désignerons par $\underline{\underline{F}}_t$ la tribu $\underline{\underline{G}}_{t+}$: la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifie alors les conditions habituelles.

Voici maintenant le lemme fondamental pour démontrer le théorème de projection : je le trouve tout à fait surprenant.

8 THÉORÈME.- <u>Tout temps d'arrêt</u> prévisible <u>de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>appartient à</u> $\underline{\underline{V}}$.

DÉMONSTRATION.- On sait que tout t.d'a. prévisible est la limite d'une suite croissante de t.d'a. prévisibles étagés (cf mon livre p 73). Etant donnée la propriété 1-d), il suffit de considérer le cas d'un t.d'a. prévisible étagé T, donc de la forme $T = \Sigma\, t_n . 1_{A_n}$ où $A_n = \{T = t_n\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_{t_n -}$. Mais, la tribu $\underline{\underline{F}}_{t_n -}$ est contenue dans la tribu $\underline{\underline{G}}_{t_n}$, et donc, d'apres la propriété 1-c), la restriction T_n de t_n à A_n appartient à $\underline{\underline{V}}$. Posons $S_n = \inf\,(T_1, T_2, \dots, T_n)$: les S_n appartiennent à $\underline{\underline{V}}$ d'après 1-b), et (S_n) est une suite décroissante stationnaire : sa limite T appartient aussi à $\underline{\underline{V}}$ d'après 1-e).

D'après la proposition 3, tout élément de $\underline{\underline{V}}$ est un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)$. Réciproquement, on a, puisque tout t.d'a. est la limite d'une suite décroissante de t.d'a. prévisibles,

9 COROLLAIRE.- <u>Tout t.d'a. de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>est la limite d'une suite décroissante d'éléments de</u> $\underline{\underline{V}}$. <u>En particulier, si</u> $\underline{\underline{V}}$ <u>est fermée pour le passage à la limite le long des suites décroissantes, alors</u> $\underline{\underline{V}}$ <u>est l'ensemble des t.d'a. de</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>et on a</u> $\underline{\underline{F}}_T = \underline{\underline{G}}_T$ <u>pour tout</u> $T \in \underline{\underline{V}}$.

10 COROLLAIRE.- La tribu $\underline{\underline{T}}$ est coincée entre la tribu $\underline{\underline{T}}_1$ des ensembles bien-mesurables relativement à $(\underline{\underline{F}}_t)$ et la tribu $\underline{\underline{T}}_3$ des ensembles prévisibles relativement à $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Remarque.- On voit le miracle opéré par la propriété 1-f). Supposons que la propriété 1-e) ne soit pas vérifiée par $\underline{\underline{V}}$ (elle n'a été utilisée que pour le corollaire 7 et la fin de la démonstration du théorème 8). Alors le stabilisé de $\underline{\underline{V}}$ pour les limites de suites décroissantes est automatiquement stable pour les limites de suites croissantes et décroissantes (puisque c'est alors l'ensemble des t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)$).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de projection, mais en utilisant le théorème "classique" d'existence de la projection sur $\underline{\underline{T}}_1$.

11 THÉORÈME.- Soit $X = (X_t)$ un processus mesurable positif ou borné. Il existe un processus $\underline{\underline{T}}$-mesurable $Y = (Y_t)$, unique à l'indistinguabilité près, tel que l'on ait

$$E[X_T 1_{\{T<+\infty\}}] = E[Y_T 1_{\{T<+\infty\}}]$$

pour tout $T \in \underline{\underline{V}}$. On a alors

$$Y_T 1_{\{T<+\infty\}} = E[X_T 1_{\{T<+\infty\}} \mid \underline{\underline{G}}_T]$$

pour tout $T \in \underline{\underline{V}}$.

DÉMONSTRATION.- La deuxième égalité résulte de la première appliquée aux restrictions de T aux éléments de $\underline{\underline{G}}_T$, et de la proposition 5. L'unicité de Y résulte du théorème de section. L'existence de Y va être démontrée par étapes. D'abord, étant donné le corollaire 10, on peut suppose X bien-mesurable. Alors, étant donné le théorème des classes monotones, il suffit de considérer le cas où $X = 1_{[S,+\infty[}$ où S est un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Maintenant, $[S,+\infty[= [S] \cup]S,+\infty[$, et l'intervalle $]S,+\infty[$ est prévisible, donc $\underline{\underline{T}}$-mesurable. Il ne reste plus qu'à savoir projeter le graphe $[S]$. D'abord un petit lemme

<u>lemme</u> : Soit S une v.a. positive (resp un t.d'a.). Il existe une partition essentiellement unique de $\{S < +\infty\}$ en deux éléments I et A de $\underline{\underline{F}}$ (resp $\underline{\underline{F}}_S$) tels que S_I soit <u>totalement</u> <u>$\underline{\underline{V}}$-inaccessible</u> (i.e. $P\{S_I = T < +\infty\} = 0$ pour tout $T \in \underline{\underline{V}}$), et S_A soit <u>$\underline{\underline{V}}$-accessible</u> (i.e. il existe une suite (T_n) d'éléments de $\underline{\underline{V}}$ telle que $P\{\exists n \;\; S_A = T_n < +\infty\} = P\{S_A < +\infty\}$). On dira que S_I (resp S_A) est la partie totalement $\underline{\underline{V}}$-inaccesible (resp $\underline{\underline{V}}$-accessible) de S.

<u>démonstration</u>.- C'est évidemment une petite généralisation du cas classique où $\underline{\underline{V}}$ = les t.d'a. prévisibles. Considérer la famille des ensembles de la forme $\{\exists n \;\; S_A = T_n < +\infty\}$, où (T_n) est une suite d'éléments de $\underline{\underline{V}}$: cette famille est stable pour les réunions dénombrables. Prendre pour A un représentant de l'ess. sup. de cette famille.

Revenons à la démonstration de notre théorème. Décomposons le t.d'a. S en ses parties totalement $\underline{\underline{V}}$-inaccessible et $\underline{\underline{V}}$-accessible : $[S] = [S_I] \cup [S_A]$. La $\underline{\underline{T}}$-projection de $[S_I]$ est évidemment égale à $\emptyset$. On est donc ramené au cas où le graphe de S est contenu dans la réunion des graphes d'une suite (S_n) d'éléments de $\underline{\underline{V}}$. Maintenant, on a $[S] = \bigcup_n ([S] \cap [S_n])$, et il est facile de voir qu'on peut supposer les $[S_n]$ disjoints (sinon, remplacer $[S_{n+1}]$ par $[S_{n+1}] - \bigcup_1^n [S_k]$, et appliquer la proposition 7). Donc, il nous suffit finalement d'étudier le cas où le graphe de S est contenu dans le graphe d'un élément T de $\underline{\underline{V}}$. Désignons alors par λ la mesure de Dirac sur $[T]$, i.e. la mesure sur $R_+ \times \Omega$ définie par

$\lambda(Z) = E[Z_T\, 1_{\{T<+\infty\}}]$, où $Z = (Z_t)$ est un processus mesurable positif. On vérifie aisément qu'une projection de [S] sur $\underline{\underline{T}}$ est fournie par une version de l'espérance conditionnelle de [S] par rapport à la mesure λ et la tribu $\underline{\underline{T}}$. L'existence des $\underline{\underline{T}}$-projections est ainsi établie. Une dernière remarque sur l'espérance conditionnelle de [S] : ce n'est pas un ensemble (sauf si S appartient à $\underline{\underline{V}}$), mais elle est cependant portée par [T], qui est $\underline{\underline{T}}$-mesurable; de plus, elle n'est évanescente que si [S] est déjà évanescent.

Deux compléments aux théorèmes de projection et de section

12 PROPOSITION.- <u>Soient</u> X <u>un processus bien-mesurable borné ou positif</u>, <u>et</u> Y <u>sa</u> <u>$\underline{\underline{T}}$-projection</u>. <u>L'ensemble</u> $\{X \neq Y\}$ <u>est la réunion des graphes d'une suite de t.d'a. de</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$.

DÉMONSTRATION.- Par le théorème des classes monotones (sachant que l'on peut remplacer "est la réunion" par "est contenu dans la réunion"), on se ramène au cas où $X = 1_{[S,+\infty[}$, et alors $\{X \neq Y\}$ est contenu dans la réunion du graphe de la partie totalement $\underline{\underline{V}}$-inaccessible de S et de la réunion des graphes de la suite des éléments de $\underline{\underline{V}}$ portant la $\underline{\underline{T}}$-projection de la partie $\underline{\underline{V}}$-accessible.

13 PROPOSITION.- <u>Soit</u> A <u>un ensemble bien-mesurable</u>. <u>Si</u> A <u>ne contient pas</u> (<u>resp ne rencontre pas</u>) <u>de graphe d'élément de</u> $\underline{\underline{V}}$ - <u>à un ensemble évanescent près</u> -, <u>alors</u> A <u>est la réunion des graphes d'une suite de t.d'a. de</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$(<u>resp</u> ... <u>et ces t.d'a. sont totalement</u> <u>$\underline{\underline{V}}$-inaccessibles</u>).

DÉMONSTRATION.- Désignons par Y la $\underline{\underline{T}}$-projection de A, qui peut ne pas être un ensemble. Réglons d'abord le cas de "ne rencontre pas". Par définition de la projection, on a alors $E[Y_T\{T<+\infty\}] = 0$

pour tout $T \in \underline{\underline{V}}$, et donc on a $Y = 0$ d'après le théorème de section. Alors A est la réunion d'une suite de graphes de t.d'a. d'après le théorème précédent, et la remarque finale de la démonstration du théorème 11 entraine que les parties $\underline{\underline{V}}$-accessibles de ces t.d'a. sont nulles. Passons au cas de "ne contient pas". On a $A = (A \cap \{Y < 1\}) \cup (A \cap \{Y = 1\})$. Comme $A \cap \{Y < 1\}$ est contenu dans $\{1_A \neq Y\}$, il nous suffit de montrer que $B = A \cap \{Y = 1\}$ est évanescent. Or, $\{Y = 1\}$ étant $\underline{\underline{T}}$-mesurable, la $\underline{\underline{T}}$-projection de B est égale à $Y.1_{\{Y = 1\}} = \{Y = 1\}$: c'est donc un ensemble qui contient B. S'il n'est pas évanescent, il resulte alors du théorème de section - et de l'hypothèse faite sur A - qu'il existe un élément T de $\underline{\underline{V}}$ dont le graphe est contenu dans $\{Y = 1\}$ et tel que $[T] - A$ ne soit pas évanescent, ce qui contredit le fait que $\{Y = 1\}$ est la $\underline{\underline{T}}$-projection de B.

<u>Remarque</u>.- ce petit complément au théorème de section est intéressant en théorie "classique" en prenant pour $\underline{\underline{V}}$ l'ensemble des t.d'a. prévisibles.

Bien entendu, quand on a les théorèmes de section et de projection, on peut étendre une grande partie des résultats de la théorie classique à notre situation. Voici, par exemple, encore deux énoncés "unifiés" de théorèmes.

14 THÉORÈME.- <u>Soit</u> $X = (X_t)$ <u>un processus mesurable dont les trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche</u>. <u>Alors le processus</u> X <u>est</u> $\underline{\underline{T}}$-<u>mesurable si et seulement s'il satisfait les conditions suivantes</u>

a) <u>on a</u> $X_Z = X_{Z-}$ <u>p.s. sur</u> $\{Z < +\infty\}$ <u>pour toute v.a. positive</u> Z <u>totalement</u> $\underline{\underline{V}}$-<u>inaccessible</u>

b) <u>la v.a.</u> $X_T.1_{\{T<+\infty\}}$ <u>est</u> $\underline{\underline{G}}_T$<u>-mesurable pour tout</u> $T\in\underline{\underline{V}}$.

et, du côté des processus croissants,

15 THÉORÈME.- <u>Soit</u> $A = (A_t)$ <u>un processus croissant</u> (<u>non nécessairement adapté</u>). <u>Alors</u> A <u>est</u> $\underline{\underline{T}}$<u>-mesurable si et seulement si on a</u>

$$E[\int_0^\infty X_t \, dA_t] = E[\int_0^\infty Y_t \, dA_t]$$

<u>pour tout processus mesurable positif</u> $X = (X_t)$, $Y = (Y_t)$ <u>étant la projection</u> $\underline{\underline{T}}$<u>-mesurable de</u> X.

3.- VARIATION SUR THÈME

Une autre manière encore d'attaquer la théorie générale des processus est de partir ni de "$(\underline{\underline{F}}_t)$", ni de "$\underline{\underline{V}}$", mais de "$\underline{\underline{T}}$". Autrement dit, donnons nous une tribu $\underline{\underline{T}}$ sur $R_+ \times \Omega$ engendrée par des intervalles stochastiques. Plus précisément, considérons les éléments de $\underline{\underline{T}}$ de la forme $[S,T[$, où S et T sont deux v.a. positives telles que $S \leq T$, et supposons que $\underline{\underline{T}}$ soit engendrée par les éléments de ce type. Désignons par $\underline{\underline{V}}$ l'ensemble des débuts possibles de ces intervalles, et supposons de plus que $[S,+\infty[$ appartienne à $\underline{\underline{T}}$ pour tout $S\in\underline{\underline{V}}$. Si on regarde les intervalles de la forme $[S,+\infty[$, avec $S\in\underline{\underline{V}}$, on voit sans peine que le fait que $\underline{\underline{T}}$ soit stable pour les réunions et intersections dénombrables entraine que $\underline{\underline{V}}$ vérifie les propriétés b), d) et e) du n.1. La famille $\underline{\underline{V}}$ vérifie aussi 1-f), car le début de $[S,+\infty[- [T,+\infty[$ est égal à $S_{\{S<T\}}$. Il ne nous manque donc que la propriété 1-a) (qui n'est pas bien génante à rajouter) et la propriété 1-c). J'ai l'impression qu'on pourrait faire sans (c'est le cas pour le théorème de section, mais je n'y suis pas arrivé pour le théorème de projection. L'introduction des "constantes" revenant en dernière analyse à pouvoir appliquer le théorème de régularisation des martingales).