Claude Dellacherie

Un crible généralisé

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 33-35
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__33_0>

Séminaire de Probabilités
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg Annee 1971/72

UN CRIBLE GÉNÉRALISÉ

C. Dellacherie

Soient E et F deux espaces métrisables compacts, et soit A une partie analytique du produit ExF. DOOB m'a posé la question suivante : est-ce-que l'ensemble des $y\in F$ tels que la coupe A(y) soit de la 2ème categorie de Baire dans E, est analytique dans F ? Je donne ici une réponse affirmative partielle, dans le cas où A est borélien.

Nous désignerons par E (resp F) un espace métrisable compact, et par x (resp y) un point générique de E (resp F). Pour toute partie A de ExF, nous noterons adh(A) (resp int(A)) la partie de ExF dont la coupe suivant tout $y\in F$ est égale à l'adhérence (resp l'intérieur) de A(y) dans E.

D'abord, deux petits lemmes sur adh(A) et int(A) pour A analytique (le premier n'est pas nouveau : voir par exemple la monographie de HOFFMANN-JØRGENSEN).

1 PROPOSITION.- Si A est analytique dans ExF, alors adh(A) est aussi analytique.

DÉMONSTRATION.- Soit $\underline{\underline{U}}$ une base dénombrable d'ouverts de E, et désignons par π la projection de ExF sur F. Pour tout $U\in\underline{\underline{U}}$, posons $A^U = U \times \pi[A \cap (U \times F)]$: on a $(x,y) \in A^U$ si et seulement si on a $x \in U$ et s'il existe $x' \in U \cap A(y)$. L'ensemble A^U est évidemment analytique, et donc aussi adh(A), égal à l'intersection des A^U lorsque U parcourt $\underline{\underline{U}}$.

Il n'est pas vrai en général que int(A) soit analytique pour A analytique. On a cependant.

2 PROPOSITION.- <u>Si</u> A <u>est analytique dans</u> ExF, <u>alors</u> int[adh(A)] <u>est aussi analytique</u>.

DÉMONSTRATION.- Etant donnée la proposition précédente, il suffit de démontrer que int(A) est analytique pour A analytique tel que A = adh(A). Soient $\underline{\underline{U}}$ une base dénombrable d'ouverts de E, et D un ensemble dénombrable partout dense dans E. Pour tout $d \in D$, posons $A^d = A \cap [E \times \pi(A \cap (\{d\} \times F))]$, où π désigne la projection sur F. L'ensemble A^d est analytique, et on a $A^d(y) = A(y)$ si $d \in A(y)$ et $A^d(y) = \emptyset$ sinon. Pour tout $U \in \underline{\underline{U}}$, posons alors $A^U = \cap A^d$ où d parcourt l'ensemble $D \cap U$. L'ensemble A^U est analytique, et, comme A = adh(A), on a $A^U(y) = A(y)$ si A(y) contient U, et $A^U(y) = \emptyset$ sinon. Comme int(A) est alors égal à la réunion des ensembles $A^U \cap (U \times F)$ lorsque U parcourt $\underline{\underline{U}}$, il est clair que int(A) est analytique.

Passons maintenant à l'étude de notre crible généralisé. Pour simplifier, nous dirons qu'une partie A de ExF a la propriété (P) si on peut écrire A sous la forme $A = U \Delta N$, où U est un ensemble analytique tel que U = int[adh(U)] et où N est tel que chacune des coupes N(y) soit de la 1ère catégorie de Baire.

3 THÉORÈME.- <u>L'ensemble des parties analytiques de</u> ExF <u>ayant la propriété</u> (P) <u>est stable pour les réunions et intersections dénombrables</u>.

DÉMONSTRATION.- Soit (A_n) une suite de parties analytiques ayant la propriété (P), et, pour chaque n, soit $A_n = U_n \Delta N_n$ la décomposition de A_n vue ci-dessus. On a, d'une manière équivalente, $U_n - N_n \subset A_n \subset U_n \cup N_n$, et donc,

$$(\cup U_n) - (\cup N_n) \subset (\cup A_n) \subset (\cup U_n) \cup (\cup N_n)$$
$$(\cap U_n) - (\cup N_n) \subset (\cap A_n) \subset (\cap U_n) \cup N$$

où N est une réunion dénombrable d'ensembles contenus dans un des N_n. Les ensembles $(\cup N_n)$ et N ont encore leurs coupes de 1ère catégorie. D'apres la proposition 2, il nous suffit de vérifier que $(\cup U_n)$ (resp $(\cap U_n)$) ne diffère de $\mathrm{int}[\mathrm{adh}(\cup U_n)]$ (resp de $\mathrm{int}[\mathrm{adh}(\cap U_n)]$) que par un ensemble dont les coupes sont de 1ère catégorie (au sens de la différence symétrique), ce qui est évident.

4 COROLLAIRE.- Soit A une partie borélienne de ExF. Alors l'ensemble $C(A) = \{y : A(y)$ est de 2ème catégorie$\}$ est analytique dans F.

DÉMONSTRATION.- Comme tout ouvert de ExF vérifie la propriété (P), il résulte du théorème précédent que tout borélien la vérifie aussi. On est donc ramené à montrer que C(A) est analytique pour toute partie analytique A telle que $A = \mathrm{int}[\mathrm{adh}(A)]$: mais, dans ce cas, C(A) n'est autre que la projection de A sur F.