GABRIEL MOKOBODZKI

Pseudo-quotient de deux mesures, application à la dualité

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 318-321
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__318_0>

UNIVERSITE DE STRASBOURG
Séminaire de Probabilités

PSEUDO-QUOTIENT DE DEUX MESURES
APPLICATION A LA DUALITE

G. MOKOBODZKI

Ce texte est la fin de l'exposé de l'an dernier, portant le même titre, p. 173-176 du volume VI, qui n'avait pas été insérée dans le volume VI par suite d'une erreur.

RESULTATS COMPLEMENTAIRES

Si $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(\partial X)$, on désignera par $D(\frac{\nu}{\mu})$ une fonction numérique quelconque telle que $\varphi \leq D(\frac{\nu}{\mu}) \leq \psi$ où φ et ψ sont définies comme précédemment.

En particulier $D(\frac{\nu}{\mu})$ est $(\mu+\nu)$-mesurable.

PRINCIPE DE DOMINATION.

Si $D(\frac{\nu}{\mu}) \leq 1$ ν-presque partout , alors $\nu \prec \mu$.

Démonstration : On a $\{\varphi \leq 1\} = \bigcap_{\lambda>1} F_\lambda$ et $\nu^{F_\lambda} = \nu \prec \lambda\mu$ pour tout $\lambda > 1$.

COROLLAIRE.- Si $\nu, \nu' \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ et $\nu, \nu' \prec k\mu$, $k>0$, alors $D(\frac{\nu}{\mu}) \leq D(\frac{\nu'}{\mu})$ ν-presque partout entraîne que $\nu \prec \nu'$.

POTENTIELS ET MESURES REGULIERES.

On dit que $u \in \mathcal{S}$ est régulier si pour toute famille filtrante croissante $(u_\alpha) \subset \mathcal{S}$, telle que $u = \sup u_\alpha$, alors $\inf R(u-u_\alpha) = 0$ (sauf sur un ensemble polaire).

THEOREME.- Pour que $u \in \mathcal{S}$ soit régulier, il faut et il suffit que $u = \sum_n u_n$ où $u_n \in \mathcal{S} \cap \mathcal{C}^+(X)$.

Il existe alors un noyau U subordonné à $\mathcal{S}$ et un seul tel que $U1 = u$ ($U = \Sigma U_n$ où U_n est associé à u_n).

THEOREME.- Pour $\nu, \mu \in \mathcal{M}^+(\partial X)$, il existe une mesure et une seule $\sigma \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ telle que $< \sigma, Vf > = \sup\{< \nu - \mu, p >, p \in \mathcal{S}, p \leq Vf\}$ pour toute $f \in C^+(X)$.

On peut alors poser $\sigma = R(\nu-\mu) = \inf\{\theta \in \mathcal{M}^+(\partial X) \ ; \ \theta \succ \nu - \mu\}$, enveloppe inférieure pour l'ordre du balayage défini par $\mathcal{S}$.

THEOREME.- Le couple $(\mathcal{M}^+(\partial X), \prec)$ est un cône de potentiels, c'est-à-dire que si si $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(\partial X)$, on a $R(\nu-\mu) \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ et $R(\nu-\mu) \leq \nu$.

DEFINITION.- On dit que $\nu \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ est régulière si pour toute famille $(\nu_\alpha) \subset \mathcal{M}^+(\partial X)$, filtrante croissante pour l'ordre $\prec$ et telle que $\nu = \sup\limits_{\prec} \nu_\alpha$, on a $\inf\limits_{\prec} R(\nu - \nu_\alpha) = 0$.

PROPOSITION.- Pour que $\mu \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ soit régulière, il faut et il suffit que μ ne charge pas les ensembles semi-polaires de ∂X.

DEFINITION.- On dit que ν est dominée par θ ($\nu \in d(\theta)$) si pour toute famille filtrante décroissante (ν_α) pour l'ordre $\leq$, telle que $\nu_\alpha \leq \nu$ et $\inf \nu_\alpha = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α tel que $\nu_\alpha \prec \varepsilon\theta$.

LEMME.- Pour toute mesure régulière ν, il existe une mesure régulière θ, de la forme $\theta = \Sigma \nu_n$, $\nu_n \leq \nu$ telle que $\nu \in d(\theta)$, $\nu_n \in d(\nu)$ et $\int v d\nu_n < +\infty$ $\forall v \in \mathcal{S}$.

Propriétés des mesures régulières.

1) L'ensemble des mesures régulières est un sous-cône convexe héréditaire de $\mathcal{M}^+(\partial X)$ que l'on notera $\mathcal{S}_r^*$.

2) Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ telle que $(u \in \mathcal{S}$ et $\int u d\mu = 0) \Rightarrow (u = 0)$ alors pour toute $\nu \in \mathcal{S}_r^*$ telle que $\int v d\nu < +\infty$ $\forall v \in \mathcal{S}$, il existe $k > 0$ tel que $\nu \prec k\mu$.

3) Il existe une suite (μ_n) de mesures régulières, stable par ad-

dition, de base V , telle que a) la famille μ_n est filtrante croissante pour l'ordre $\prec$ et pour toute mesure régulière ν on a $\nu = \sup_{\prec}\{\mu_n ; \mu_n \prec \nu\}$

b) pour toute μ_n , il existe μ_m telle que $\mu_n \in d(\mu_m)$

c) $\int v \, d\mu_n < +\infty \quad \forall v \in \mathcal{S}$.

Désignons par $\mathcal{S}_0^* = \{\nu \in \mathcal{S}_r^* \, ; \text{ il existe } \mu_n, \ \nu \prec \mu_n\}$.

THEOREME.- Pour toute forme linéaire T sur $(\mathcal{S}_0^* - \mathcal{S}_0^*)$ croissante pour l'ordre $\prec$ il existe une fonction excessive et une seule $u \in \mathcal{S}$, telle que $< T, \nu > = \int u \, d\nu \quad \forall \nu \in \mathcal{S}_0^*$.

De ce théorème, il résulte que $\mathcal{S}$ est faiblement complet métrisable pour la topologie $\sigma(\mathcal{S}, \mathcal{S}_0^*)$ et qu'on peut appliquer le théorème de représentation intégrale de Choquet.

PROPOSITION.- Soit $\mu_0 \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ telle que V soit de base μ_0 . Il existe alors un ensemble borélien $A \subset \partial X$ tel que $\complement A$ soit μ_0-polaire (donc polaire) et telle que pour toute $\nu \in \mathcal{S}_0^*$, $D(\frac{\nu}{\mu_0})$ soit finement continue en tout point de A, donc bien définie en tout point de A .

On suppose A fixé ainsi que μ_0 et que μ_0 est de base V .

COROLLAIRE.- Pour toute $\nu \in \mathcal{S}_0^*$, l'application $f \mapsto 1_A . D(\frac{f.\nu}{\mu})$ est un noyau compact de base ν transformant fonction boréliennes bornées en fonctions boréliennes bornées et satisfaisant au principe complet du maximum.

(Rappelons que toute $\nu \in \mathcal{S}_r^*$ s'écrit $\nu = \sum_n \nu_n$, $\nu_n \in \mathcal{S}_0^*$) .

COROLLAIRE.- Il existe $\mu_1 \leq \mu_0$, μ_0 de base μ_1 telle que le noyau $T : f \to 1_A . D(\frac{f.\mu_1}{\mu_0})$ soit compact, satisfasse au principe complet du maximum.

On peut donc définir un cône de fonctions T-excessives Γ et définir une frontière $\partial^* X$, associée à T et portant le noyau T , par la relation

$$(y \in \partial^* X) \Leftrightarrow (\forall u, v \in \Gamma \quad \widehat{\inf u, v}(y) = [\inf(u, v](y))$$

PROPOSITION 1.- 1) L'ensemble $\partial^* X$ est borélien et porte toute mesure régulière. (On a pris $\partial^* X \subset \partial X$).

2) Pour tout $y \in \partial^* X$, il existe une fonction excessive extrémale male et une seule $G_y \in \mathcal{S}$ telle que, pour toute $f \in B^+$

$$Tf(y) = \int G_y(x) f(x) d\mu_1(x) .$$

Si l'on pose $G(x,y) = G_y(x)$ pour $y \in \partial^* X$, $x \in X$, alors l'application G est mesurable sur $\partial^* X \times X$.

3) Pour que $u \in \mathcal{S}$ soit régulier, il faut et il suffit qu'il existe une mesure régulière ν sur ∂X, telle que $u(x) = G_\nu(x) = \int G(x,y) d\nu(y)$.