PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur un problème de filtration

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 223-247

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__223_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1971/72

SUR UN PROBLEME DE FILTRATION

P.A.Meyer

Aux gens qui disent que les probabilités sont une branche des mathématiques appliquées, nous répondons depuis des années que les probabilités que nous faisons, au moins, ne peuvent servir à rien. Il faut se détromper : la solution de certains problèmes posés par les ingénieurs exige maintenant une partie de l'arsenal de la "théorie générale des processus". Je vais exposer cela ici, dans une situation aussi élémentaire que possible. Je remercie vivement M. T. KAILATH, qui m'a fait connaître ces problèmes : l'exposé ci-dessous est étroitement inspiré de ses articles.

§ 1 . LE PROCESSUS D'INNOVATION

On se donne un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, avec une famille croissante de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Il n'y a pas d'inconvénient à supposer que $\underline{\underline{F}}$ est complète, et que tous les ensembles de mesure nulle appartiennent à $\underline{\underline{F}}_0$, mais les choses seront plus claires si nous distinguons les familles $(\underline{\underline{F}}_t)$ et $(\underline{\underline{F}}_{t+})$. On se donne sur Ω un processus $(S_t)_{t\geq 0}$, à trajectoires bien régulières (par exemple, continûment dérivables) : ce processus, appelé le signal , est inobservable directement, ce qui se traduit du point de vue mathématique par le fait qu'il n'est pas adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ en général. Ce qu'on peut observer, c'est la superposition du signal et d'un bruit $(B_t)_{t\geq 0}$

(1) $\qquad \sigma_t = S_t + B_t \qquad$ (processus observé)

Le processus (σ_t), lui, est adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, et le problème consiste à estimer le signal au moyen du processus observé.

Dans beaucoup d'articles, on suppose que le processus (S_t) est de la forme $\int_0^t Z_u du$, et c'est le processus (Z_t) qui est appelé signal.

On convient en général que $B_0=0$. La v.a. $S_0=\sigma_0$ est alors observable, et on ne perd pas de généralité en supposant qu'elle est nulle.

Voici nos hypothèses de départ : elles sont beaucoup trop faibles , et nous les préciserons par la suite.

SIGNAL : $S_0=0$; les trajectoires de (S_t) sont des fonctions continues à droite, à variation bornée sur tout intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout t, on a $E[\int_0^t |dS_u|]<\infty$.

S peut donc s'écrire U-V , où les processus (U_t) et (V_t) sont croissants (non adaptés en général), continus à droite, tels que $U_0=V_0=0$, et $E[U_t]<\infty$, $E[V_t]<\infty$ pour tout t. Ils sont continus si S est continu.

BRUIT : $B_0=0$. Pour tout t, B_t est intégrable, et $E[B_t-B_s|\underline{\underline{F}}_s]=0$ si s<t . Un tel processus sera appelé, pour abréger, processus <u>innovant</u> par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ - nous ajouterons plus loin une condition de continuité à droite. Noter qu'un processus innovant adapté est tout simplement une martingale.

LE PROCESSUS D'INNOVATION

Soit (A_t) un processus croissant intégrable, non nécessairement adapté à $(\underline{\underline{F}}_t)$. Le processus

$$X_t=E[A_\infty -A_t|\underline{\underline{F}}_{t+}]$$

est une surmartingale positive de la classe (D), qui admet une décomposition de DOOB. Soit (A_t^*) le processus croissant intégrable prévisible qui figure dans cette décomposition. Il est uniquement déterminé, son caractère prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{t+})$ entraîne qu'il est adapté à $(\underline{\underline{F}}_t)$, et le processus $A-A^*$ est innovant. A^* est appelé le <u>compensateur</u> de A . Dans le livre [1] de DELLACHERIE, il s'appelle aussi la <u>projection duale prévisible</u> de A.

Lorsque A_t s'écrit $\int_0^t Z_s ds$, avec un processus mesurable $Z\geq 0$, A_t^* s'écrit $\int_0^t \hat{Z}_s ds$, $\hat{Z}$ désignant la projection prévisible du processus Z , ou la projection bien-mesurable (qui pour chaque ω ne diffère de la projection prévisible que sur un ensemble dénombrable).

L'extension au cas où $E[A_t]<\infty$ pour tout t fini, mais où $E[A_\infty]$ peut être égal à $+\infty$, est facile. Nous saurons alors, par différence, calculer le compensateur $S^* = U^*-V^*$ de S .

On considère en général S_t^* comme une estimation raisonnable de S_t . Naturellement, la "meilleure" estimation de S_t est $E[S_t|\underline{\underline{F}}_t]$ à l'instant t, mais cette "meilleure" estimation ne se prête pas à un calcul progressif en t : dans $E[S_{t+h}|\underline{\underline{F}}_{t+h}]$ apparaît, non pas la quantité $E[S_t|\underline{\underline{F}}_t]$ qu'on vient de calculer, mais $E[S_t|\underline{\underline{F}}_{t+h}]$, et il faut recommencer tout le calcul à chaque instant. Tandis que S_t^* s'obtient en calculant à chaque instant u $E[dS_u|\underline{\underline{F}}_u]$, et en sommant.

DEFINITION. Le processus

$$(2) \qquad I_t = \sigma_t - S_t^* = (S_t - S_t^*) + B_t$$

est appelé le processus d'innovation.

Comme I est à la fois adapté et innovant, c'est une martingale par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, il admet donc des limites à droite et à gauche le long des rationnels. Par différence, on voit que les processus (σ_t) et (B_t) en ont aussi. Le processus $S-S^*$ est innovant par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+})$ par construction ; le processus (I_{t+}) l'est aussi d'après un théorème classique sur les martingales. Par différence, on voit que (B_{t+}) est un processus innovant p.r.à $(\underline{\underline{F}}_{t+})$.

Nous normaliserons désormais les processus B, I, σ en les supposant continus à droite, et nous ferons entrer la continuité à droite dans la définition du mot innovant.

Voici une autre conséquence : considérons tous les temps d'arrêt T de la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+})$, tels que $T \leq t$. La martingale (I_t) étant continue à droite, il est bien connue que toutes les v.a. I_T sont uniformément intégrables. Il en est de même pour toutes les v.a. S_T, S_T^* par domination, donc de toutes les v.a. B_T. On vérifie alors que $E[B_T|\underline{\underline{F}}_{T+}] = E[B_t|\underline{\underline{F}}_{T+}]$, d'abord pour T étagé, puis quelconque, et enfin que si S et T sont des temps d'arrêt bornés avec $S \leq T$, on a $E[B_T - B_S|\underline{\underline{F}}_{S+}] = 0$.

VARIATION QUADRATIQUE

Le processus d'innovation étant une martingale continue à droite, il est bien connu que les sommes

$$(3) \qquad \sum_{1 \leq k < N} (I_{t_{k+1}} - I_{t_k})^2 \qquad 0 < t_1 \ldots < t_N = t$$

ont une limite en probabilité, notée $[I,I]_t$, lorsque les subdivisions $(0, t_1 \ldots t_{N-1}, t)$ deviennent de plus en plus fines, leur pas tendant vers 0 . Posons $U=S-S^*$. La somme (3) se décompose en trois sommes

$$\text{a) } \sum (U_{t_{k+1}}-U_{t_k})^2 \qquad \text{b) } 2\sum (U_{t_{k+1}}-U_{t_k})(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})$$
$$\text{c) } \sum (B_{t_{k+1}}-B_{t_k})^2$$

Nous fixons $\omega\in\Omega$, et nous étudions ces trois sommes.

<u>Somme a)</u>: nous isolons les sauts d'amplitude $>\varepsilon/2$, il y en a un nombre fini, soit M : $s_1,\dots,s_M$, d'où M intervalles au plus (exactement M si la subdivision est assez fine) contenant les s_k. Leur contribution tend évidemment vers la somme des carrés de ces sauts :

$$\sum_{s\leqq t\ ,\ |\Delta U_s|>\varepsilon/2} \Delta U_s^2$$

Un argument voisin de celui qui établit la continuité uniforme d'une fonction continue montre que, dès que la subdivision est assez fine, on a $|U_{t_{k+1}}-U_{t_k}| \leqq \varepsilon$ pour tous les autres intervalles, d'où une contribution totale de tous ces intervalles d'au plus $\varepsilon.\int_0^t |dU_s|$, qui est arbitrairement petite. Ainsi, la somme a) a une limite égale à $\sum_{s\leqq t} \Delta U_s^2$.

Si le signal S est continu, il est classique que S^*, et donc U, le sont aussi, et cette limite est nulle.

<u>Somme b)</u>. Raisonnement en tout point analogue, mais on isole les sauts de B d'amplitude $>\varepsilon/2$, et on trouve

$$\sum_{s\leqq t\ ,\ |\Delta B_s|>\varepsilon/2} \Delta U_s \Delta B_s$$ comme limite de la contribution des intervalles contenant ces sauts,

avec un terme complémentaire majoré par $\varepsilon.\int_0^t |dU_s|$ comme plus haut. D'où la limite $\sum_{s\leqq t} \Delta U_s \Delta B_s$, nulle si le signal ou le bruit est continu.

<u>Somme c)</u>. A priori , nous n'en savons rien, mais le calcul qui précède et l'existence de $[I,I]_t$ montrent qu'elle a une limite en probabilité, limite qu'il est tout naturel de noter $[B,B]_t$. Lorsque B est un mouvement brownien de paramètre σ , on sait que $[B,B]_t=\sigma^2 t$. Utilisant un théorème célèbre de Paul LEVY, nous obtenons le résultat suivant, dû à KAILATH

THEOREME 1. $[B,B]$ *existe toujours. Si le signal* S *est continu, on a* $[B,B]=[I,I]$.

Si S *est continu, et* B *un mouvement brownien de paramètre* σ, I *est un mouvement brownien de même paramètre.*

En effet, I est une martingale continue, et $[I,I]_t=\sigma^2 t$.

LE CAS ABSOLUMENT CONTINU

Nous allons étendre le th.1 à d'autres situations, en affaiblissant les conditions d'intégrabilité imposées ci-dessus. La généralité que l'on obtient est même un peu agaçante, car le processus d'innovation reste un mouvement brownien dans des cas où l'on ne sait rien en faire !

Une première généralisation, assez triviale, consiste à *localiser* les hypothèses précédentes, i.e. à supposer l'existence de temps d'arrêt T_n de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, croissant vers $+\infty$, et tels que les processus arrêtés aux instants T_n satisfassent aux propriétés précédentes. Nous allons étudier de manière plus approfondie le cas particulier le plus important dans les applications, celui où le signal est absolument continu.

HYPOTHESE. *Le signal est de la forme* $S_t=\int_0^t Z_s ds$, *où* Z *est un processus mesurable, et* $\int_0^t |Z_s|ds < \infty$ *p.s. pour tout* t.

(B_t) *est un mouvement brownien de paramètre* 1 *par rapport à une famille de tribus* $(\underline{\underline{G}}_t)$ *plus grande que la famille* $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Avec les hypothèses prises antérieurement, l'accroissement B_t-B_s, pour $s<t$, était orthogonal séparément à la tribu $\underline{\underline{F}}_s$, et à la tribu $\underline{\underline{T}}(B_u,u\leq s)$. Avec cette hypothèse ci, il doit être orthogonal à la borne supérieure de ces deux tribus. Du point de vue technique, cela nous servira à définir des intégrales stochastiques $\int h_s dB_s$, où h est borné, prévisible pour la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Nous ferons enfin l'hypothèse que :

Pour presque tout $t\in\mathbb{R}_+$, *la v.a. positive* $E[|Z_t||\underline{\underline{F}}_t]$ *est p.s. finie*.

Nous aurons besoin de quelques rappels

1. Intégrales stochastiques . Soit h un processus prévisible de la famille ($\underline{\underline{F}}_t$), que nous supposerons uniformément borné par exemple. Nous savons définir l'intégrale stochastique $h.B = (\int_0^t h_s dB_s)$, qui est une martingale de la famille ($\underline{\underline{G}}_t$), et qui est donc innovant par rapport à ($\underline{\underline{F}}_t$). D'après l'hypothèse faite sur le signal, le processus

$$h.S \ : \ (h.S)_t = \int_0^t h_u dS_u$$

est aussi bien défini, et nous poserons $h.\sigma = h.S+h.B$. Un passage à la limite simple à partir du cas où h est un processus prévisible "élémentaire" permet de voir que $h.\sigma$ est adapté à la famille ($\underline{\underline{F}}_t$) : la relation $h.\sigma = h.S + h.B$ est donc encore du type " processus observé = signal + bruit" .

2. Projection prévisible. Nous rappelons d'abord que l'on peut toujours définir l'espérance conditionnelle $E[Z|\underline{\underline{H}}]$ d'une v.a. positive Z par rapport à une tribu quelconque $\underline{\underline{H}}$, que Z soit intégrable ou non. Si Z n'est pas positive, nous dirons que $E[Z|\underline{\underline{H}}]$ existe si la v.a. $E[|Z||\underline{\underline{H}}]$ est p.s. finie, ce qui revient à dire que la mesure $|Z|.dP$ est σ-finie sur $\underline{\underline{H}}$, et on pose alors $E[Z|\underline{\underline{H}}]=E[Z^+|\underline{\underline{H}}]-E[Z^-|\underline{\underline{H}}]$; on a encore $\int_A Z dP=\int_A E[Z|\underline{\underline{H}}]dP$ pour tout ensemble $A\in\underline{\underline{H}}$ tel que $\int_A |Z|dP<\infty$, et cette propriété caractérise $E[Z|\underline{\underline{H}}]$. Cette définition n'exige l'intégrabilité ni de Z^+, ni de Z^-, contrairement à la définition usuelle des espérances conditionnelles "généralisées".

Soit (X_t) un processus mesurable, positif ou borné. On appelle projection prévisible de X, et on note $\hat{X}$, l'unique processus prévisible par rapport à la famille ($\underline{\underline{F}}_t$) tel que l'on ait $\hat{X}_T=E[X_T|\underline{\underline{F}}_{T-}]$ pour tout temps d'arrêt T prévisible, p.s. fini. Si X n'est ni positif, ni borné, nous dirons que $\hat{X}$ existe dans l'ensemble $A\subset\mathbb{R}_+\times\Omega$ si la projection prévisible $\widehat{|X|}$ du processus $|X|$ est finie dans A, et nous définirons $\hat{X}$ dans A, par différence.

On définit de manière analogue la projection bien-mesurable $\check{X}$ de X , si X est positif ou borné : c'est l'unique processus bien-mesurable pour la famille ($\underline{\underline{F}}_{t+}$), tel que $\check{X}_T=E[X_T|\underline{\underline{F}}_{T+}]$ pour tout temps d'arrêt de ($\underline{\underline{F}}_{t+}$), p.s. fini. Nous aurons seulement besoin de savoir que l'ensemble $\{ t : \hat{X}_t(\omega) \neq \check{X}_t(\omega) \}$ est dénombrable (donc de mesure nulle) pour presque tout ω.

D'après notre dernière hypothèse, la v.a. $E[|Z_t| | \underline{\underline{F}}_t]$ est p.s. finie pour presque tout t ; il en est de même a fortiori de $\widecheck{|Z|}_t = E[|Z_t| | \underline{\underline{F}}_{t+}]$. D'après le théorème de Fubini, le processus $\widecheck{|Z|}$ est fini p.p. pour la mesure $dt \otimes dP$. D'après la remarque précédente, il en est de même du processus $\widehat{|Z|}$, et nous avons démontré que <u>la projection prévisible</u> $\hat{Z}$ <u>existe p.p. dans</u> $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, <u>au sens de la mesure</u> $dt \otimes dP$. Nous pouvons maintenant énoncer la généralisation cherchée du théorème de KAILATH

THEOREME 1'. <u>Sous les hypothèses de cette section, on a pour presque tout</u> ω

(4) $\quad \int_0^t |\hat{Z}_s(\omega)| ds < \infty$ <u>pour tout</u> t <u>fini</u>

<u>et le processus</u> $I_t = \sigma_t - \int_0^t \hat{Z}_s ds$ <u>est un mouvement brownien de paramètre</u> 1.

DEMONSTRATION. Considérons le processus prévisible borné

$$J_t^n = I_{\{\widehat{|Z|}_t \leqq n\}} \operatorname{sgn}(\hat{Z}_t)$$

(noter qu'il est partout défini), et introduisons les processus

$$\sigma^n = J^n \cdot \sigma \quad , \quad B^n = J^n \cdot B \quad , \quad S^n = J^n \cdot S$$

(intégrales stochastiques). Le " processus observé" σ^n est adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, et l'on a

$$E[\int_0^t |dS_u^n|] = E[\int_0^t |J_u^n| |Z_u| du] = E[\int_0^t |J_u^n| \widehat{|Z|}_u du \leqq nt$$

La projection duale prévisible S^{n*} vaut $\int_0^t J_s^n \hat{Z}_s ds =$ $\int_0^t I_{\{\widehat{|Z|}_s \leqq n\}} |\hat{Z}_s| ds$, processus bien défini et positif. Le théorème 1 nous donne alors que le processus d'innovation

(5) $\quad I_t^n = \sigma_t^n - \int_0^t J_s^n \hat{Z}_s ds \;=\; S_t^n + B_t^n - \int_0^t J_s^n \hat{Z}_s ds$

est une martingale continue par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, avec $[I^n, I^n]_t = [B^n, B^n]_t = \int_0^t (J_s^n)^2 ds \leqq t$. Faisons tendre n vers l'infini :

a) S_t^n converge vers $\int_0^t \operatorname{sgn}(\hat{Z}_s) Z_s ds$, limite finie p.s., du fait que $\widehat{|Z|}$ est fini p.p..

b) B_t^n converge vers $\int_0^t \operatorname{sgn}(\hat{Z}_s) dB_s$ dans L^2.

c) $\int_0^t J_s^n \hat{Z}_s ds$ converge en croissant vers $\int_0^t |\hat{Z}_s| ds$ (fini ou non)

d) I_t^n reste borné dans L^2

Quitte à extraire une sous-suite, on peut remplacer la convergence dans L^2 en b) par la convergence p.s. L'ensemble du second membre a une limite p.s. (finie ou non), et reste borné dans L^2 : d'après le lemme de Fatou, cette limite doit être p.s. finie. Autrement dit, la limite c) est p.s. finie, et nous avons prouvé (4).

Reprenons maintenant tout ce raisonnement, sans changer de notation, mais en prenant sans signe

$$J_t^n = I_{\{|\widehat{Z}|_t \leq n\}}$$

Cette fois, S_t^n converge simplement vers S_t , B_t^n vers B_t dans L^2 , et la dernière intégrale simplement vers $\int_0^t \hat{Z}_s ds$, d'après ce qui précède et le th. de convergence dominée. Tout le dernier membre de (5) converge donc vers I_t en probabilité. Mais les martingales I_t^n sont continues, et leurs processus croissants associés $[I^n, I^n]_t$ sont majorés par t : elles possèdent donc des propriétés d'intégrabilité uniforme très forte, et I_t^n converge dans tout L^p vers I_t (voir par ex. le Séminaire de Strasbourg, vol.IV, p.247). On en déduit que

$$I_t^n \to I_t \text{ dans } L^1 \quad ; \quad I_t^{n2} - \int_0^t J_s^{n2} ds \to I_t^2 - t \text{ dans } L^1$$

Les processus (I_t) et $(I_t^2 - t)$ sont donc des martingales continues, et I est un mouvement brownien de paramètre 1, ce qu'on voulait établir.

UN EXEMPLE. Prenons pour bruit un mouvement brownien de paramètre 1, et pour signal $S_t = S.t$, où S, de loi μ, est indépendante du bruit (B_t). On a $Z_t = S$ pour tout t. On peut calculer la loi conditionnelle de S connaissant $\sigma_u = S.u + B_u$:

$$P\{S \in dy \mid \sigma_u = z\} = \frac{\exp(-\frac{(z-uy)^2}{2u})\mu(dy)}{\int \exp(-\frac{(z-ux)^2}{2u})\mu(dx)}$$

Cette loi conditionnelle ayant une moyenne, $E[|Z_u| | \sigma_u]$ est p.s. finie, et il en est de même a fortiori de $E[|Z_u| | \underline{\underline{F}}_u]$: le processus d'innovation est donc bien un mouvement brownien dans ce cas (cf. KAILATH [3]).

§ 2 . REPRESENTATIONS COMME INTEGRALES STOCHASTIQUES

Nous restons sous les hypothèses de la fin du paragraphe 1 : bruit brownien de paramètre 1, continuité absolue du signal, existence du processus $\hat{Z}$. Notre but dans ce paragraphe (et, en partie, dans le suivant) consiste à examiner dans quelle mesure " toute l'information est contenue dans le processus d'innovation I" . D'une manière précise, on aimerait établir que <u>les deux processus d'observation</u> (σ_t), <u>et d'innovation</u> (I_t), <u>engendrent la même famille de tribus</u>.

Une telle conjecture résulte tout naturellement de l'étude du cas discret : donnons nous un processus quelconque (σ_n), dont les v.a. soient intégrables, et tel que $\sigma_0=0$. La famille de tribus naturelle associée est $\underline{\underline{F}}_n=\underline{\underline{T}}(\sigma_k,k\leq n)$. Posons

$$I_0=0 \ , \ I_1=\sigma_1-E[\sigma_1|\underline{\underline{F}}_0] \ \ldots I_n=I_{n-1}+(\sigma_n-E[\sigma_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}])$$

C'est l'analogue exact du processus d'innovation. On vérifie facilement, par récurrence sur n, que $\underline{\underline{F}}_n=\underline{\underline{T}}(I_k,k\leq n)$. Mais il n'existe pas d'extension " naïve" de ce résultat au cas continu : considérons par exemple un processus croissant (σ_t) à trajectoires continues , prenons pour $(\underline{\underline{F}}_t)$ sa famille de tribus naturelle ; le "processus d'innovation" correspondant devrait être $\sigma_t-\sigma^*_t$, où σ^* est la projection duale prévisible de σ , mais il est identiquement nul...

Nous allons démontrer dans ce paragraphe un résultat de FUJISAKI et de KUNITA, qui donne une représentation des fonctionnelles du processus observé au moyen d'intégrales stochastiques par rapport au processus d'innovation.

THEOREME 3. <u>Supposons que</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>soit la famille de tribus naturelle du processus</u> (σ_t), <u>et que l'on ait</u> $\int_0^t \hat{Z}_s^2 ds < \infty$ <u>p.s. pour tout t</u> . <u>Alors toute v.a.</u> $Y \in L^2(\underline{\underline{F}}_\infty)$ <u>admet une représentation comme intégrale stochastique par rapport à</u> (I_t)

$$(6) \qquad Y = E[Y] + \int_0^\infty h_s dI_s$$

<u>où le processus</u> (h_s) <u>est prévisible par rapport à la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>et</u> $E[\int_0^\infty h_s^2 ds] < \infty$.

Si (η_t) désigne la martingale $E[Y|\underline{\underline{F}}_{t+}]$, on a alors $\eta_t=E[Y]+\int_0^t h_s dI_s$ - de sorte que cette martingale est continue - et

$h_s = d[\eta,I]_s/ds$. L'hypothèse concernant $\hat{Z}^2$ est désagréable : on a en effet établi l'existence du processus d'innovation sous une condition d'intégrabilité plus faible, mais on ne sait pas s'en servir !

DEMONSTRATION. Nous poserons

(7) $\hat{\alpha}_t = \exp\left(- \int_0^t \hat{Z}_s dI_s - \frac{1}{2}\int_0^t \hat{Z}_s^2 ds \right)$

LEMME. <u>Les deux processus</u> $(\hat{\alpha}_t)$ <u>et</u> $(\sigma_t\hat{\alpha}_t)$ <u>sont des martingales locales, et ce sont des intégrales stochastiques par rapport à</u> (I_t). <u>Plus généralement, si</u> (h_t) <u>est un processus prévisible tel que</u> $\int_0^t h_s^2 ds < \infty$ <u>p.s., et si</u> (H_t) <u>est le processus</u>

$$H_t = \int_0^t h_s d\sigma_s = \int_0^t h_s dI_s + \int_0^t h_s \hat{Z}_s ds$$

<u>alors le processus</u> $(H_t\hat{\alpha}_t)$ <u>est une martingale locale, et</u>

$$H_t\hat{\alpha}_t = \int_0^t (\hat{\alpha}_s h_s - \hat{\alpha}_s \hat{Z}_s H_s) dI_s$$

DEMONSTRATION. Il est bien connu(*) que si (X_t) est une martingale locale continue, (A_t) le processus croissant associé, le processus $\exp(\lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2}A_t)$ est une martingale locale. Si de plus on a $A_\infty \leq M$, on a $E[\exp(\lambda.\sup_s|X_s|)] \leq 5e^{M\lambda^2}$. Prenant $X_t = \int_0^t \hat{Z}_s dI_s$, on a $A_t = \int_0^t \hat{Z}_s^2 ds$; si $\lambda=-1$, on voit que $(\hat{\alpha}_t)$ est une martingale locale. Si les v.a. $\int_0^t \hat{Z}_s^2 ds$ sont bornées par des quantités $M(t)$ dépendant seulement de t, $(\hat{\alpha}_t)$ est une vraie martingale, bornée dans tout L^p ; comme $\hat{\alpha}_0=1$, on a alors $E[\hat{\alpha}_t]=1$ pour tout t. Noter aussi que $d\hat{\alpha}_s = -\hat{\alpha}_s\hat{Z}_s dI_s$.

Appliquons maintenant la formule d'intégration par parties pour les semimartingales continues(*)

$$d(\sigma_t\hat{\alpha}_t) = \sigma_t d\hat{\alpha}_t + \hat{\alpha}_t d\sigma_t + d[\sigma,\hat{\alpha}]_t = \sigma_t d\hat{\alpha}_t + \hat{\alpha}_t(dI_t + \hat{Z}_t dt) - \hat{\alpha}_t\hat{Z}_t dt$$

et il ne reste bien que la différentielle d'une martingale locale. Pour la dernière phrase de l'énoncé, on a un calcul analogue :

(*)Pour toutes ces questions, voir le séminaire de Strasbourg IV, p. 247 et p.101. Signalons ici une jolie formule qui n'y figure pas explicitement : si U et V sont deux semimartingales, continues ou non

$$d(UV)_t = U_{t-}.dV_t + V_{t-}.dU_t + d[U,V]_t$$

La "variation croisée" $[U,V]_t$ valant comme d'habitude $\langle U^c,V^c\rangle_t + \sum_{s\leq t}\Delta U_s\Delta V_s$ où U^c et V^c sont les parties martingales continues de U et V.

$dH_t = h_t dI_t + h_t \hat{Z}_t dt$; $d\hat{\alpha}_t = -\hat{\alpha}_t \hat{Z}_t dI_t$; $d[H,\hat{\alpha}]_t = -h_t \hat{\alpha}_t \hat{Z}_t dt$
et $d(H\hat{\alpha})_t = H_t d\hat{\alpha}_t + \hat{\alpha}_t dH_t + d[H,\hat{\alpha}]_t = (\hat{\alpha}_t h_t - \hat{\alpha}_t \hat{Z}_t H_t) dI_t$.

Nous abordons maintenant le théorème proprement dit. Il y a un cas particulier facile, que nous traiterons d'abord : celui où l'on a une majoration de la forme $\int_0^t \hat{Z}_s^2 ds \leqq M(t)$, ce qui entraîne que $(\hat{\alpha}_t)$ est une vraie martingale, et en particulier que $E[\hat{\alpha}_t]=1$ pour tout t.
Considérons alors <u>un processus</u> (η_t) , <u>adapté à la famille naturelle</u> $(\underline{\underline{F}}_{t+})$, <u>et tel que</u> $(\eta_t \hat{\alpha}_t)$ <u>soit une martingale locale</u>.
Je dis qu'alors on a

$$\eta_t \hat{\alpha}_t = c + \int_0^t h_s dI_s \quad (\text{ c constante, h prévisible, } \int_0^t h_s^2 ds < \infty \text{ p.s. pour tout } t<\infty\text{)}$$

Cela entraînera le résultat cherché : on l'appliquera au processus $\eta_t = E[Y|\underline{\underline{F}}_{t+}].\alpha_t^{-1}$, et la constante c s'identifie aussitôt comme $E[Y]$.

Pour démontrer cela, nous considérons la loi $P' = \hat{\alpha}_t.P$. Le fait que $(\sigma_s \hat{\alpha}_s)_{s\leqq t}$ soit une martingale pour la loi P - une vraie martingale, car les v.a. σ_s et $\hat{\alpha}_s$ sont bornées dans L^2 - s'exprime aussi en disant que $(\sigma_s)_{s\leqq t}$ est une martingale pour P' . Nous avons vu au § 1 que $[\sigma,\sigma]_s = s$ p.s. pour P : comme P' est absolument continue par rapport à P, ce résultat vaut aussi P'-p.s., et $(\sigma_s)_{s\leqq t}$ est un mouvement brownien de paramètre 1 pour P'. De même, le processus $(\eta_s)_{s\leqq t}$ est une martingale locale pour la loi P', et d'après un théorème classique sur le mouvement brownien, il s'écrit pour $s\leqq t$

$$\eta_s = c + \int_0^s h_u d\sigma_u \quad (\text{ c constante, h prévisible })$$

alors $\eta_s \hat{\alpha}_s = c + c(\hat{\alpha}_s - 1) + \hat{\alpha}_s \int_0^s h_u d\sigma_u$
qui d'après les lemmes se met sous la forme $c + \int_0^s h'_u dI_u$. Le processus h' ne dépend pas de t, car il s'écrit aussi $\frac{d}{dt}[\eta\hat{\alpha},I]_t$, et le résultat cherché en découle.

Nous allons ramener le cas général à ce cas particulier. Il y a là une difficulté technique qui ne me semble pas complètement éclaircie chez KUNITA-FUJISAKI. Tout d'abord, puisque nous voulons travailler sur la famille de tribus naturelle, nous pouvons supposer que Ω est l'espace de toutes les applications continues de $\mathbb{R}_+$, nulles en 0, et que les σ_t sont les applications coordonnées sur Ω . Nous posons $\underline{\underline{F}}_t^o=\underline{\underline{T}}(\sigma_s,s\leq t)$. Nous approchons le processus $(\hat{Z}_t)$ par des processus prévisibles étagés $(\hat{Z}_t^n)$, qui convergent vers $(\hat{Z}_t)$ p.p. pour la mesure dtdP. On peut supposer que les $\hat{Z}^n$ sont continus à gauche, adaptés à la famille $(\underline{\underline{F}}_{t-}^o)$ sans aucune complétion. Quitte à remplacer $(\hat{Z}_t)$ par $\liminf_n \hat{Z}_t^n$ - sans changer de notation - nous avons obtenu un processus $(\hat{Z}_t)$ prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t^o)$ sans complétion. Ensuite, nous remarquons que les trajectoires du processus $\int_0^t \hat{Z}_s^2 ds$ ne sont pas nécessairement continues : il peut y avoir un saut d'une valeur finie à la valeur $+\infty$. Nous évitons cela en remplaçant $\hat{Z}_t$ par

$$Z_t'(\omega)=0 \text{ s'il existe un } r<t, \text{ rationnel, tel que } \int_0^r \hat{Z}_s^2(\omega)ds = +\infty$$
$$Z_t'(\omega)=Z_t(\omega) \text{ sinon}$$

Nous enlevons ensuite le ' : après cette modification, le processus $\int_0^t \hat{Z}_s^2 ds$ est continu, et nous n'avons pas perdu la mesurabilité ci-dessus. Posons maintenant

$$T_n(\omega) = \inf \{ t : \int_0^t \hat{Z}_s^2(\omega)ds \geq n \}$$

En vertu de la continuité qui vient d'être établie, c'est un temps d'arrêt <u>strict</u> de la famille $(\underline{\underline{F}}_t^o)$, ni complétée ni rendue continue à droite.

Considérons maintenant le processus

$$\sigma_t^n = \sigma_t - \int_{t\wedge T_n}^t \hat{Z}_s ds = I_t + \int_0^{t\wedge T_n} \hat{Z}_s ds$$

sur l'ensemble $\Omega_0=\{\omega : \int_0^t \hat{Z}_s^2(\omega)ds<\infty \text{ pour tout } t \}$, auquel nous nous restreindrons. Soit τ l'application de Ω_0 dans Ω qui associe à $\omega\in\Omega_0$ la trajectoire $\sigma_\cdot^n(\omega)$. La famille de tribus naturelle du processus σ_t^n est la famille $(\tau^{-1}(\underline{\underline{F}}_t^o))$; comme T_n est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t^o)$, $T_n\circ\tau$ est un temps d'arrêt de cette famille. Mais si $\omega\in\Omega_0$, ω et $\tau(\omega)$ sont égales jusqu'à l'instant $T_n(\omega)$, donc $T_n\circ\tau(\omega)=T_n(\omega)$, et T_n lui-même est (sur Ω_0) un temps d'arrêt de cette famille. De même, si $A\in\underline{\underline{F}}_{T_n}^o$, on a $I_A=I_A\circ\tau$ sur Ω_0 , et $A\cap\Omega_0$ appartient à $\underline{\underline{T}}(\sigma_t^n,\ t\geq 0)$: pour plus de détails sur tout cela, voir COURREGE et PRIOURET [5]. On vérifie de même que le processus $\hat{Z}^n_t=\hat{Z}_t I_{\{t<T_n\}}$ sur Ω_0 est adapté à cette famille naturelle , et bien entendu $\int_0^\infty \hat{Z}^{n2}_s ds \leq n$ par définition de T_n . Enfin, $I_t=\sigma^n_t-\int_0^t \hat{Z}^n_s ds$ est dans cette famille.

Nous pouvons appliquer le cas particulier précédent, sur Ω_0 (qui est de mesure 1 dans Ω) aux processus $\sigma^n_t, \hat{Z}^n_t, I_t$: toute variable aléatoire Y, $\underline{\underline{F}}^o_{T_n}$ -mesurable et de carré intégrable, admet une représentation

$$Y=E[Y] + \int_0^\infty h_s dI_s \quad \text{avec } E[\int_0^\infty h_s^2 ds]<\infty$$

Le processus (h_s), prévisible par rapport à la famille naturelle de (σ^n_t), l'est aussi par rapport à $(\underline{\underline{F}}^o_t)$. L'espace des $Y\in L^2(\underline{\underline{F}}_\infty)$ admettant une telle représentation, étant fermé et dense, c'est $L^2(\underline{\underline{F}}_\infty)$ tout entier, et le théorème est établi.

Noter que le théorème 3 entraîne que toutes les martingales de carré intégrable - donc toutes les martingales - de la famile naturelle de (σ_t) sont continues.

REMARQUES SUR LES HYPOTHESES DU TH.3

Il est assez déplaisant que l'hypothèse principale du th.3 fasse intervenir, non pas les données du problème (Z,B,σ), mais le processus inconnu $\hat{Z}$. Bien entendu, si l'on a $E[\int_0^t Z_s^2 ds] <\infty$, on a la même propriété pour $\hat{Z}$, et l'hypothèse du th.3 est satisfaite. Mais nous avons passé trop de temps à la fin du § 1 pour faire disparaître les restrictions d'intégrabilité pour nous contenter de cela. Sans aller très loin dans cette direction, nous allons examiner les conséquences de l'hypothèse suivante qui, elle. ne fait pas intervenir $\hat{Z}$

<u>pour tout</u> t <u>fini, la loi induite par</u> P <u>sur</u> $\underline{\underline{F}}_t$ <u>est absolument continue par rapport à la loi du mouvement brownien</u>.

D'une manière précise, nous supposerons que l'on se place sur l'espace canonique Ω de toutes les applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ nulles en 0, les σ_t étant les applications coordonnées et $(\underline{\underline{F}}_t)$ la famille naturelle. Cela exige en général un transport de structure, car il n'y a pas de place sur cet espace Ω pour B et Z ! Nous désignons par P' la mesure de WIENER sur Ω , et notre hypothèse sur la loi P est que pour tout t

$$P = \gamma_t . P' \text{ sur } \underline{\underline{F}}_t \qquad \gamma_t \ \underline{\underline{F}}_t\text{-mes.}$$

le processus (γ_t) est une martingale positive, on a $\gamma_0=1$. Comme toutes les martingales pour la loi P' ont une modification continue, on peut supposer que γ est continue. Nous allons commencer par supposer que γ ne s'annule jamais.

Nous introduisons maintenant la martingale locale $\beta_t = \int_0^t \frac{d\gamma_s}{\gamma_s}$; comme toute martingale locale du mouvement brownien, elle s'écrit $\int_0^t \hat{Z}_t d\sigma_t$, $\hat{Z}$ étant un processus prévisible tel que $\int_0^t \hat{Z}_s^2 ds < \infty$ p.s. Notons les formules

$$d\gamma_t = \gamma_t d\beta_t \quad , \text{ donc } \quad d[\gamma,\sigma]_t = \gamma_t \hat{Z}_t dt$$

Considérons alors le processus $(\sigma_t - \int_0^t \hat{Z}_s ds)\gamma_t$: sa différentielle est

$$(\sigma_t - \int_0^t \hat{Z}_s ds)d\gamma_t + \gamma_t d\sigma_t + (-\gamma_t \hat{Z}_t dt + d[\sigma,\gamma]_t)$$

Mais la dernière parenthèse est nulle, donc ce processus est une martingale locale pour P', ce qui s'énonce aussi en disant que le processus

$$I_t = \sigma_t - \int_0^t \hat{Z}_s ds$$

est une martingale locale pour P . D'autre part, I est une semi-martingale pour P', et on a $[I,I]_t = [\sigma,\sigma]_t = t$ P'-p.s., donc P-p.s.. Autrement dit, I est un mouvement brownien pour la loi P.

Passons au cas où γ peut s'annuler avec probabilité positive (pour P') : posons

$$T_n = \inf \{ t : \gamma_t = 1/n \}$$

C'est une suite croissante de temps d'arrêt, posons $T = \lim_n T_n$. Nous avons (E désignant une espérance prise pour P)

$$P = \gamma_{t\wedge T_n} . P' \text{ sur } \underline{\underline{F}}_{t\wedge T_n} \ , \ \gamma_{t\wedge T_n} \geqq 1/n \ , \text{ donc } P' = \gamma_{t\wedge T_n}^{-1} . P \text{ sur } \underline{\underline{F}}_{t\wedge T_n}$$

et par conséquent $E[\gamma_{t\wedge T_n}^{-1}]=1$, d'où (Fatou) $E[\gamma_{t\wedge T}] \leqq 1$. Comme $\gamma_T=0$ sur $\{T<\infty\}$, on a $T \geqq t$ p.s. pour P, et finalement $T=\infty$ P-p.s. .

Soit $\gamma_t^n = \gamma_{t\wedge T_n}$, et soit P^n l'unique mesure sur Ω qui induit $\gamma_t^n.P'$ sur chaque $\underline{\underline{F}}_t$. La théorie précédente s'applique aux martingales γ_t^n , qui ne s'annulent jamais , et nous donne des processus prévisibles $\hat{Z}_t^n$; nous avons

$$d[\gamma^n,\sigma]_t = \gamma_t^n\hat{Z}_t^n dt \quad P'\text{-p.s.}$$

ce qui nous montre que les processus $\hat{Z}_t^n$ s'induisent bien sur les intervalles $[0,T_n]$: il existe un unique processus prévisible $\hat{Z}_t$ tel que

$$d[\gamma,\sigma]_t = \gamma_t\hat{Z}_t dt \quad \text{pour } t<T \text{ , } \hat{Z}_t=0 \text{ pour } t\geqq T$$

On a aussi $\int_0^t \hat{Z}_s^2 ds < \infty$ P'-p.s. pour $t<T_n$, quel que soit n , donc aussi P'-p.s. pour $t<T$: mais alors P-p.s. aussi, et comme $T=+\infty$ p.s., $\hat{Z}$ est tel que $\int_0^t \hat{Z}_s^2 ds < \infty$ p.s. pour tout t . Le calcul déjà fait plus haut montre qu'alors le processus $I_t = \sigma_t - \int_0^t \hat{Z}_s ds$ est un mouvement brownien pour la loi P .

Si l'on regarde maintenant la démonstration du th.3, on s'aperçoit qu'elle repose uniquement sur le caractère brownien de I, et le fait que $\int_0^t \hat{Z}_s^2 ds < \infty$ p.s. pour tout t : elle reste donc valable sans modification.

Quant à savoir si (en revenant à la situation initiale avec un signal et un bruit) $\hat{Z}_s$ peut être interprété comme une espérance conditionnelle de Z_s , c'est une autre affaire. On peut seulement dire la chose suivante : supposons que Z satisfasse aux hypothèses de la fin du paragraphe 1 , et associons lui comme nous l'avions fait alors,une projection prévisible, que nous noterons $\hat{Z}_t^1$ pour éviter les confusions . Nous savons qu'alors le processus $I_t^1 = \sigma_t - \int_0^t \hat{Z}_s^1 ds$ est un mouvement brownien de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$: le processus $I-I^1$ est donc une martingale continue de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, dont les trajectoires sont des fonctions à variation bornée. Elle est donc identiquement nulle, et nous pouvons donc bien identifier $\hat{Z}$ et $\hat{Z}^1$.

UNE REMARQUE SUPPLEMENTAIRE

Revenons à la démonstration précédente, en supposant que γ ne s'annule pas (P'-p.s.). Par définition de $\hat{Z}$, on a

$$d\gamma_s = \gamma_s \hat{Z}_s d\sigma_s \qquad , \quad \gamma_0 = 1$$

et par conséquent, cette équation différentielle ayant une solution unique (voir par ex. C. DOLEANS-DADE, quelques applications de la formule de changement de variables, Z. für W. , ▯▯ , 19▯▯, p.▯▯▯▯▯▯), nous avons

$$\gamma_t = \exp[\int_0^t \hat{Z}_s d\sigma_s - \frac{1}{2}\int_0^t \hat{Z}_s^2 ds]$$

Comme le processus (γ_t) ne s'annule pas par hypothèse, les mesures P et P' sont équivalentes sur $\underline{\underline{F}}_t$, et on a $P' = \gamma_t^{-1}.P$. Le processus γ_t^{-1} vaut

$$\exp[-\int_0^t \hat{Z}_s d\sigma_s + \frac{1}{2}\int_0^t \hat{Z}_s^2 ds] = \exp[-\int_0^t \hat{Z}_s dI_s - \frac{1}{2}\int_0^t \hat{Z}_s^2 ds]$$

C'est le processus que nous avions noté $\hat{\alpha}_t$ plus haut, et c'est ici une vraie martingale pour la loi P, puisque c'est la densité en question.

Lorsque γ_t s'annule, le processus $\hat{\alpha}_t$ ne représente que la densité de la partie absolument continue de P' par rapport à P sur $\underline{\underline{F}}_t$, les mesures n'étant pas équivalentes, son intégrale ne peut valoir 1, et c'est une martingale locale qui n'est pas une vraie martingale. Nous n'insisterons pas sur ce cas.

Enfin, une partie des résultats de la fin de ce paragraphe s'étend au cas où il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt, croissant P'-p.s. vers $+\infty$, et telle que la mesure P soit absolument continue par rapport à P' sur chaque tribu $\underline{\underline{F}}_{T_n}$: le processus (γ_t) n'est alors qu'une martingale locale, mais en procédant par arrêt comme on l'a fait plus haut, on arrive encore à établir le théorème de représentation au moyen d'intégrales stochastiques.

§ 3 . UNE FORMULE DE KALLIANPUR-STRIEBEL

Nous faisons dans ce paragraphe les hypothèses suivantes : le bruit (B_t) est un mouvement brownien de paramètre 1. Le signal S_t s'écrit $\int_0^t Z_s ds$, avec un processus Z tel que $\int_0^t Z_s^2 ds < \infty$ pour tout t (p.s.), et <u>le signal et le bruit sont indépendants</u>. Sous ces hypothèses très fortes, nous allons voir que l'on peut donner une formule " explicite" donnant la loi conditionnelle du signal, connaissant le processus observé jusqu'à l'instant t : c'est un très joli résultat.

Nous adopterons les notations suivantes

Signal et bruit étant indépendants, nous pouvons supposer que l'espace de base - que nous noterons $(W,\underline{\underline{G}},P)$ - est de la forme $U\times V$, muni d'une tribu produit $\underline{\underline{G}}=\underline{\underline{U}}\times\underline{\underline{V}}$ et d'une loi produit $P=\pi\otimes\xi$. Les processus (Z_t) et (B_t) nous sont donnés sur U et V respectivement, nous faisons l'hypothèse que

$$\text{pour tout u et tout t, } \int_0^t Z_s^2(u)ds < \infty$$

et que $(B_t(v))$ est un mouvement brownien sur V. Nous prolongeons ces définitions à W en convenant que

$$\text{si } w=(u,v) \quad , \ Z_t(w)=Z_t(u) \ , \quad B_t(w)=B_t(v) \ ,$$

$$\text{et} \qquad \Theta_t(w) = B_t(w)+\int_0^t Z_s(w)ds$$

La famille $(\underline{\underline{F}}_t^o)$ est la famille naturelle de (Θ_t). Nous conviendrons aussi de noter $\underline{\underline{U}}$ la tribu sur W formée des ensembles $A\times V$ $(A\in\underline{\underline{U}})$.

La loi conditionnelle sur $\underline{\underline{G}}$ connaissant $u\in U$ est tout simplement $\varepsilon_u\otimes\xi$. Nous allons la calculer plus explicitement sur $\underline{\underline{F}}_t^o$. Notons la $Q_t(u,dw)$, noyau de $(U,\underline{\underline{U}})$ (ou de $(W,\underline{\underline{U}})$) dans $(W,\underline{\underline{F}}_t^o)$. Pour cette loi, le processus Θ_t coïncide p.s. avec le processus $B_t(w)+\int_0^t Z_s(u)ds$, où le second terme est une fonction certaine. D'après les résultats du § 2 (dans un cas ici très particulier), si nous posons

$$\begin{aligned}\alpha_t(u,\omega) &= \exp[-\int_0^t Z_s(u)dB_s(\omega)- \tfrac{1}{2}\int_0^t Z_s^2(u)ds] \\ &= \exp[-\int_0^t Z_s(u)d\Theta_s(\omega) + \tfrac{1}{2}\int_0^t Z_s^2(u)ds]\end{aligned}$$

alors la mesure $Q_t(u,d\omega)\alpha_t(u,\omega)$ est une loi de probabilité sur $\underline{\underline{F}}^o_t$, pour laquelle le processus $(\theta_s)_{s\leq t}$ est un mouvement brownien. Mais il existe une seule loi sur $\underline{\underline{F}}^o_t$ possédant cette propriété . Notons la β_t . Ainsi

pour tout u, $Q_t(u,d\omega)$ admet une densité par rapport à β_t, égale à

$$q_t(u,\omega) = 1/\alpha_t(u,\omega) = \exp[\int_0^t Z_s(u)d\theta_s(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^t Z_s^2(u)ds\ ]$$

Il faut ici faire un peu attention : pour chaque u fixé, le processus $\alpha_.(u,.)$ est, non pas uniquement défini, mais un élément arbitraire d'une classe de martingales continues indistinbles. Pour l'instant, nous fixerons t, et nous choisirons q_t comme une version de $Q_t(u,d\omega)/\beta_t(d\omega)$, positive, mesurable sur $\underline{\underline{U}}\times\underline{\underline{F}}^o_t$ - version qui existe, car $\underline{\underline{F}}^o_t$ est séparable. Nous lui appliquons le lemme suivant, pour lequel nous gardons les notations précédentes, en les débarrassant de quelques indices.

LEMME. Soient $(W,\underline{\underline{G}},P)$ un espace probabilisé, $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{F}}$ deux sous-tribus de $\underline{\underline{G}}$, π la loi induite par P sur $\underline{\underline{U}}$, β une loi sur $\underline{\underline{F}}$, $q(u,\omega)$ une fonction positive $\underline{\underline{U}}\times\underline{\underline{F}}$-mesurable telle que l'on ait , pour toute v.a. positive $\underline{\underline{F}}$-mesurable Y

$$E[Y|\underline{\underline{U}}] = \int q(.,\omega)Y(\omega)\beta(d\omega) \quad \text{p.s.}$$

Alors la restriction γ de P à $\underline{\underline{F}}$ est absolument continue par rapport à β , avec la densité $\int\pi(du)q(u,.)$ (qui est donc γ-ps finie et non nulle). Si nous posons

$$c(\omega,u) = q(u,\omega)/\int\pi(du)q(u,\omega) \text{(0 si le dénominateur vaut 0 ou } +\infty\text{)}$$

nous avons pour toute v.a. positive $\underline{\underline{U}}$-mesurable Y

$$E[Y|\underline{\underline{F}}] = \int c(.,u)Y(u)\pi(du) \qquad \text{p.s.}$$

Nous laisserons ce lemme au lecteur . Si nous l'appliquons ici, nous obtenons la loi conditionnelle du signal connaissant le processus observé jusqu'à l'instant t

$$(8) \qquad C_t(\omega,du) = \frac{\exp[\ \int_0^t Z_s(u)d\theta_s(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^t Z_s^2(u)ds\ ]\pi(du)}{\int\exp[\dots]\pi(du)}$$

C'est la formule de KALLIANPUR-STRIEBEL. Pour l'instant, elle est relative à une valeur <u>fixée</u> de t. Nous noterons $q_t(u,\omega)$ le numérateur, et $D_t(\omega)$ le dénominateur. Nous allons maintenant faire une digression, en cherchant à définir de bonnes versions de q_t et D_t qui rendent la formule vraie pour tous les t simultanément. C'est plutôt ennuyeux, et personne n'en voudra au lecteur s'il omet ce qui suit.

Nous commençons par fixer un nombre τ , et travailler uniquement pour les $t\leqq\tau$: noter par exemple qu'il n'existe peut être pas de loi β sur Ω induisant β_t sur $\underline{\underline{F}}_t^o$ pour tout t ! Nous désignons par $\underline{\underline{F}}_t^\tau$ la tribu obtenue en complétant $\underline{\underline{F}}_\tau^o$ pour β_τ , et en adjoignant à $\underline{\underline{F}}_t^o$ tous les ensembles β_τ-négligeables de cette complétion. Cette famille est continue à droite, et pour elle les ensembles bien-mesurables et prévisibles coïncident : ce sont des propriétés bien connues du mouvement brownien. On obtiendrait la même famille en complétant par rapport à n'importe quelle mesure $Q_\tau(u,.)$ au lieu de β_τ (par équivalence).

Pour tout t rationnel $\geqq 0$, choisissons une v.a. $\overline{q}_t(u,\omega)$, $\underline{\underline{U}}\times\underline{\underline{F}}_t^o$-mesurable, et telle que pour chaque u $\overline{q}_t(u,.)$ soit $Q_t(u,.)$ -p.s. égale au numérateur de (8), c.à.d. à $1/\alpha_t(u,.)$. Nous poserons pour $t\notin\mathbb{Q}$ $\overline{q}_t(u,\omega) = \liminf_{s\in\mathbb{Q},\, s\uparrow t} \overline{q}_s(u,\omega)$. Le processus $(\overline{q}_t(u,.))$ est alors prévisible pour tout u, et en tant que fonction de ses trois variables, est mesurable sur $U\times(\mathbb{R}_+\times\Omega)$, ce dernier espace muni de la tribu prévisible.

Soit H_τ l'ensemble des (u,ω) tels que l'application $\overline{q}_.(u,\omega)$ sur $\mathbb{Q}\cap[0,\tau]$ soit prolongeable à $[0,\tau]$ en une application continue, finie et strictement positive : les propriétés de (α_t) entraînent que, pour chaque u, la coupe $H_\tau^c(u)$ est $Q_\tau(u,.)$-négligeable, donc β_τ-négligeable. D'autre part, H_τ est $\underline{\underline{U}}\times\underline{\underline{F}}_\tau^o$-mesurable (écrire la continuité uniforme sur $\mathbb{Q}$). On pose alors si $t\leqq\tau$

$$q_t^\tau(u,\omega) = \overline{q}_t^\tau(u,\omega) \text{ si } (u,\omega)\in H_\tau \text{ , sinon } q_t^\tau(u,\omega)=1$$

Pour tout u, ce processus $(q_t^\tau)_{t\leqq\tau}$ est continu, adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t^\tau)$, donc prévisible . Si T est un temps d'arrêt de cette famille, borné par un nombre $s<\tau$, $q_T^\tau(u,\omega)$ est $\underline{\underline{F}}_T^\tau$-mesurable pour tout u . D'autre part, soit N l'ensemble des ω tels que $\int\pi(du)I_{H^c}(u,\omega) \neq 0$: N est $\underline{\underline{F}}_\tau^\tau$-mesurable et β_τ-négligeable, et si $\omega\notin N$ on a $\int\pi(du)q_t^\tau(u,\omega) = \int\pi(du)\overline{q}_t(u,\omega)$ pour <u>tout</u> $t\leqq\tau$.

Ce dernier processus est prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}^{\circ}_t)_{t\leq\tau}$, donc le premier est prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}^{\tau}_t)_{t\leq\tau}$, et en particulier $\int\pi(du)q^{\tau}_T(u,\omega)$ est $\underline{\underline{F}}^{\tau}_T$-mesurable. Résultats analogues pour des processus $\int\pi(du)Y(u)q^{\tau}_t(u,\omega)$.

Les mesures $Q(u,d\omega)$ et $q^{\tau}_T(u,\omega)\beta_{\tau}(d\omega)$ coïncidant sur $\underline{\underline{F}}_T$ (c'est, pour chaque u , la propriété de martingale de (α_t)), le lemme nous donne que l'on a, pour toute v.a. $Y(u)$ positive

$$E[Y|\underline{\underline{F}}^{\tau}_T] = \frac{\int\pi(du)Y(u)q^{\tau}_T(u,\omega)}{\int\pi(du)q^{\tau}_T(u,\omega)}$$

Il est intéressant d'évaluer le dénominateur. Chacune des lois $Q(u,d\omega)$ étant absolument continue par rapport à β_{τ} sur $\underline{\underline{F}}^{\tau}_T$, avec densité $q^{\tau}_T(u,\omega)$, la loi $P=\int\pi(du)Q(u,.)$ est aussi absolument continue, avec densité $\int\pi(du)q^{\tau}_T(u,.)$. Noter que les mesures $Q(u,d\omega)$ sont équivalentes à P sur $\underline{\underline{F}}^{\tau}_T$, les densités q^{τ}_T sont strictement positives, leur intégrale l'est aussi, et P et β_{τ} sont <u>équivalentes</u> sur $\underline{\underline{F}}^{\circ}_{\tau}$, $\underline{\underline{F}}^{\tau}_T$.

Pour tout temps d'arrêt $T\leq s<\tau$, le dénominateur $D^{\tau}_T(\omega)$ de la formule de KALLIANPUR-STRIEBEL est donc densité de P par rapport à β_{τ} sur $\underline{\underline{F}}^{\tau}_T$. Comme c'est par ailleurs un processus prévisible, le processus $(D^{\tau}_t)_{t<\tau}$ est version <u>continue</u>[1] de la martingale $E_{\beta_{\tau}}[D^{\tau}_{\tau}|\underline{\underline{F}}^{\tau}_t]$, β_{τ} -p.s., donc P-p.s.. Il faut noter aussi que la fin du §2 nous permet de calculer cette densité : d'après l'équivalence des mesures P et β_{τ} sur $\underline{\underline{F}}^{\circ}_{\tau}$, il existe un processus prévisible $(\hat{Z}_t)$, tel que $\int_0^{\tau}\hat{Z}^2_s ds<\infty$ β_{τ}-p.s. pour tout τ , et que la densité de P par rapport à β_t sur $\underline{\underline{F}}^{\tau}_t$ soit

$$\exp\left[\int_0^t\hat{Z}_s d\sigma_s - \frac{1}{2}\int_0^t\hat{Z}^2_s ds\right] \qquad \text{p.s.}$$

Cette intégrale stochastique est donc égale à D^{τ}_t sur l'intervalle $[0,\tau]$, les deux processus étant, de manière précise, β_{τ}-indistinguables.

Il est temps de faire disparaître τ .

Soit $\underline{\underline{F}}_{\infty}$ la tribu complétée de $\underline{\underline{F}}^{\circ}_{\infty}$ pour P, et soit $\underline{\underline{F}}_t$ la tribu obtenue en adjoignant à $\underline{\underline{F}}^{\circ}_t$ tous les ensembles négligeables . Il résulte du th.3 que cette famille est continue à droite, et que ses tribus prévisible et bien-mesurable coïncident.

1. Deux processus bien-mes. égaux p.s. pour chaque T sont indistinguables.

Comme β_τ et P sont équivalentes sur $\underline{\underline{F}}^o_\tau$, on a $\underline{\underline{F}}^\tau_t \subset \underline{\underline{F}}_t$ pour $t<\tau$. Nous définissons

(9) $q_{\bullet}(u,\omega) = \overline{q}_{\bullet}(u,\omega)$ si cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$, finie et strictement positive

$q_{\bullet}(u,\omega) = 1$ sinon

Une comparaison avec la définition de $q^\tau_{\bullet}$ sur $[0,\tau]$ montre que les processus $q^\tau_{\bullet}$ et $q_{\bullet}$ sont P-indistinguables sur $[0,\tau]$, pour tout u fixé. Attention, ils ne sont pas β_τ-indistinguables, le second n'étant même pas mesurable par rapport aux complétions pour β_τ ! Si T est un temps d'arrêt borné de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$, $q_T(u,.)$ est, pour tout u fixé, P-p.s. égale à $q^\tau_T(u,.)$, si τ a été choisi assez grand : elle est donc $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable. De même, si Y(u) est une v.a. positive, les processus $\int\pi(du)Y(u)q^\tau_{\bullet}(u,.)$ et $\int\pi(du)Y(u)q_{\bullet}(u,.)$ sont P-indistinguables sur $[0,\tau]$, d'où l'on déduit que le second est <u>prévisible</u> par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$. La formule établie alors pour $E[Y|\underline{\underline{F}}^\tau_T]$ nous donne

(10) $$E[Y|\underline{\underline{F}}_T] = \frac{\int\pi(du)Y(u)q_T(u,\omega)}{\int \pi(du)q_T(u,\omega)} \qquad \text{P-p.s.}$$

Cela s'étend aussitôt à un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, borné ou non. Enfin

(11) le processus $\int\pi(du)q_t(u,\omega)$ est P-indistinguable de l'intégrale stochastique $\exp[\int_0^t \hat{Z}_s d\sigma_s - \frac{1}{2}\int_0^t \hat{Z}^2_s ds] = \exp[\int_0^t \hat{Z}_s dI_s + \frac{1}{2}\int \hat{Z}^2_s ds]$

En particulier, il est continu, strictement positif et fini. De la formule (10), on déduit aussitôt le résultat suivant par un argument de classes monotones : si l'on a un processus mesurable positif $(Y_t(u))_{t\in\mathbb{R}}$ (i.e., l'application $(t,u)\mapsto Y_t(u)$ est $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{U}}$-mesurable) sa projection prévisible sur la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, qui coincide avec la projection bien-mesurable, est

(12) $$\hat{Y}_t(\omega) = \int\pi(du)Y_t(u)q_t(u,\omega) \ / \int\pi(du)q_t(u,\omega)$$

Enfin, une dernière remarque : en tenant compte de (11), on obtient une jolie expression, sans dénominateur, pour la loi conditionnelle sur U relativement à $\underline{\underline{F}}_t$:

(13) $$\exp[\int_0^t (Z_s(u)-\hat{Z}_s(\omega))dI_s(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^t (Z_s(u)-\hat{Z}_s(\omega))^2 ds]\, \pi(du)$$

UN RESULTAT DE CLARK

Supposons que le processus Z, supposé mesurable, soit tel que Z_t soit intégrable pour tout t . La formule de KALLIANPUR-STRIEBEL permet alors de calculer la projection $\hat{Z}_t$:

$$\hat{Z}_t(\omega) = \frac{\int \pi(du) Z_t(u) \exp[\int_0^t Z_s(u)dI_s(\omega) + Z_s(u)\hat{Z}_s(\omega)ds - \frac{1}{2}Z_s^2(u)ds]}{\int \pi(du)\exp[\int_0^t \dots\;]}$$

C'est une relation entre Z et $\hat{Z}$: CLARK a montré qu'elle se prête bien à un calcul de $\hat{Z}$ par la méthode des approximations successives, lorsque le processus Z est borné par une constante M. La méthode montre alors que $\hat{Z}$ est mesurable par rapport à la famille de tribus naturelle du processus d'innovation, et il en est de même du processus $\sigma_t = I_t + \int_0^t \hat{Z}_s ds$. CLARK peut alors étendre ce résultat au cas où le processus Z est seulement localement borné (i.e., chaque trajectoire est une fonction bornée sur tout intervalle compact). Voici comment se démontre le théorème de CLARK .

Soit H un processus uniformément borné. Posons

$$R_t^H(u,\omega) = \int_0^t Z_s(u)dI_s(\omega) - \frac{1}{2}Z_s^2(u)ds + Z_s(u)H_s(\omega)ds$$

Nous supposons le processus Z borné par une constante M en module : il en est de même du processus $\hat{Z}$, et nous savons que le processus $R_t^{\hat{Z}}(u,\omega)$ admet des bonnes versions, partout finies et continues, etc. Il en est de même du processus $R_t^H(u,\omega)$, qui n'en diffère que par la quantité parfaitement régulière $\int_0^t Z_s(u)(H_s(\omega)-\hat{Z}_s(\omega))ds$. Ainsi, nous n'aurons aucune difficulté à définir R^H, non plus que le processus

$$(14) \quad T(H) : T_t(H,\omega) = \frac{\int \pi(du) Z_t(u) \exp(R_t^H(u,\omega))}{\int \pi(du)\exp(R_t^H(u,\omega))}$$

Le processus $\hat{Z}$ satisfait à $T(\hat{Z})=\hat{Z}$. Notons quelques propriétés de l'opérateur (non linéaire) T : supposons que H soit un processus uniformément borné, progressivement mesurable par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. Alors

- $R_t^H(u,\omega)$ est $\underline{\underline{U}}\times\underline{\underline{F}}_t$-mesurable ; $R_t^H(u,\omega)$ est fonction continue de t , et pour tout u et tout t

$$\int \exp(\lambda \sup_{s\leqq t} |R_s^H(u,\omega)|)P(d\omega) \leqq C < \infty$$

où C est une constante dépendant de λ et t, ainsi que de la constante majorant uniformément H, et de la constante M majorant Z, mais non de u.

- Le dénominateur de (14) est une fonction continue et strictement positive de t ; $T(H)$ est un processus progressivement mesurable par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, uniformément borné par M en module.

Nous partons maintenant du processus $\hat{Z}^0=0$, et nous formons les processus $T^n(\hat{Z})=\hat{Z}^n$, qui sont tous bornés par M en module. Si nous pouvons démontrer que ces processus convergent vers $\hat{Z}$ en un sens raisonnable, nous aurons démontré la première partie (le cas borné) du théorème de CLARK, car ces processus restent tous dans la famille de tribus naturelle <u>du processus d'innovation</u> (I_t) , comme on le vérifie aussitôt sur la formule - si H est progressivement mesurable par rapport à cette famille, il en est de même de R^H et $T(H)$. Afin de démontrer cela, CLARK introduit un paramètre $\alpha\in[0,1]$, et les opérateurs

$$R_t^{H,\alpha}(u,\omega) = R_t^{\alpha H+(1-\alpha)\hat{Z}}(u,\omega)$$

$$T_H^\alpha = T(\alpha H+(1-\alpha)\hat{Z})$$

Pour $\alpha=0$, $T_H^0 = \hat{Z}$, et pour $\alpha=1$, $T_H^1=T(H)$. Pour ω fixe, il n'y a aucune difficulté à dériver en α

$$D_\alpha R_t^{H,\alpha}(u,\omega) = \int_0^t (H_s(\omega)-\hat{Z}_s(\omega))Z_s(u)ds$$

$$D_\alpha(\exp(R_t^{H,\alpha}(u,\omega)) = \exp(R_t^{H,\alpha}(u,\omega)).\int_0^t \ldots$$

$$D_\alpha T_H^\alpha(t,\omega) =$$

$$\frac{\int \pi(du)Z_t(u)\exp(R_t^{H,\alpha}(u,\omega)\int_0^t (H_s(\omega)-\hat{Z}_s(\omega))Z_s(u)ds}{\int \pi(du)\ \exp(R_t^{H,\alpha}(u,\omega))} - T_H^\alpha(t,\omega)\ \frac{\int \pi(du)\exp(R_t^{H,\alpha}(u,\omega))\ \int_0^t (H_s(\omega)-\hat{Z}_s(\omega))Z_s(u)ds}{\int \pi(du)\exp(R_t^{H,\alpha}(u,\omega))}$$

et par conséquent, Z étant majoré par M

$$|D_\alpha T_H^\alpha(t,\omega)| \leqq 2M^2 \int_0^t |H_s(\omega)-\hat{Z}_s(\omega)|ds$$

et en intégrant de 0 à 1

$$|T(H)_t(\omega)-\hat{Z}_t(\omega)| \leqq 2M^2.\int_0^t |H_s(\omega)-\hat{Z}_s(\omega)|ds$$

Prenant $H=\hat{Z}^n$, $T(H)=\hat{Z}^{n+1}$

$$|\hat{Z}_t^{n+1}(\omega)-\hat{Z}_t(\omega)| \leqq 2M^2.\int_0^t |\hat{Z}_s^n(\omega)-\hat{Z}_s(\omega)|ds$$

d'où par une récurrence immédiate, en posant $2M^2=K$

$$|\hat{Z}_t^n(\omega)- \hat{Z}_t(\omega)| \leqq M \frac{K^n t^n}{n!}$$

et la convergence unifome des $\hat{Z}^n$ vers $\hat{Z}$, ce qui est le résultat cherché.

Nous ne démontrerons pas ici la seconde partie du théorème de CLARK, i.e. la possibilité d'affaiblir l'hypothèse faite sur Z , en la remplaçant par la condition $\sup_{s\leqq t} |Z_s(u)| < \infty$ p.s. pour tout t : cela nous entraînerait trop loin.

BIBLIOGRAPHIE

Pour la théorie générale des processus, consulter

[1]. C.DELLACHERIE . Capacités et processus stochastiques. Ergebnisse der M. , Springer, 1972

et pour les martingales locales, etc.

[2]. C. DOLEANS-DADE et P.A.MEYER. Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaire de Strasbg IV, p.77-107. Lecture Notes in M. 124, Springer 1970.

Les résultats du § 1 (existence du processus d'innovation) sont empruntés à

[3]. T. KAILATH. Some extensions of the innovations theorem. Bell System technical J. 50, 1971, p. 1487-1494.

Le théorème de représentation au moyen d'intégrales stochastiques (première partie du § 2) est emprunté à l'article suivant, qui couvre des situations plus générales

[4]. M. FUJISAKI et H.KUNITA . Non linear filtering problems in time continuous stochastic processes (à paraître)

Nous avons utilisé dans la démonstration les résultats sur les temps d'arrêt des familles naturelles donnés par

[5]. Ph. COURREGE et P. PRIOURET. Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire. Publ. ISUP , 14, 1965, p.245-274.

L'extension du th.3 à la fin du § 2 est liée à l'article

[6]. T.KAILATH. The structure of Radon-Nikodym derivatives with respect to Wiener and related measures. Ann.M.Stat., 42, 1971, p.1054-1057.

Toutefois, il semble que bien des variantes de ce résultat soient classiques (et par ailleurs, le sens du mot " continuité absolue" dans cet article, sans préciser sur quelles tribus, me laisse un peu perplexe).

Au § 3, la formule de KALLIANPUR-STRIEBEL provient de

[7]. G.KALLIANPUR et C.STRIEBEL. Estimation of stochastic systems : arbitrary system theorems with additive white noise observation errors. Ann.M.Stat., 39,1968, p.785-801.

Le résultat de CLARK est cité (avec un petit schéma de démonstration pour le cas borné) dans l'article

[8]. P.A.FROST et T.KAILATH. An innovations approach to least-squares estimation - part III : non linear estimation in white Gaussian noise. Trans.Inst. Electric. and Electron. Eng., vol. AC-16, 1971, p.217-226

en voici la référence, indispensable pour le cas non borné

[9]. J.M.C. CLARK. Conditions for the one-to-one correspondence between an observation process and its innovation. Center for computing and automation, Imperial College, London. Tech. Rep.1, 1969.

Il faut ajouter à tout cela que nous n'avons abordé qu'une petite partie du sujet : bruit blanc additif à une dimension ! Sur cette seule petite partie, la bibliographie de [8] donne 37 titres, et il y a bien d'autres sujets intéressants : il semble impossible de parvenir à de vrais résultats sans préciser la nature de la liaison stochastique entre signal et bruit (le § 3 concernant le cas le plus simple , l'indépendance). On a étudié divers types intéressants de liaisons plus ou moins markoviennes.