SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Remarques sur les hypothèses droites

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 205-209
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__205_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1971/72

REMARQUE SUR LES HYPOTHESES DROITES

P.A.Meyer

Soit (X_t) un processus de Markov à valeurs dans un espace d'états E. Autrefois la mode était d'écrire "LCD" (localement compact à base dénombrable) aussitôt après E, maintenant ce serait plutôt d'écrire " borélien dans un espace métrique compact F". On fera donc cette hypothèse, qui revient à dire que E est lusinien métrisable, et le caractère borélien de E interviendra effectivement dans la suite. Nous supposerons toujours que le processus admet une réalisation continue à droite[1] : nous pouvons donc construire sa réalisation continue à droite canonique à valeurs dans E, que nous noterons comme d'habitude

$$\Omega,\ \underline{\underline{F}}^{o},\ \underline{\underline{F}}_{t}^{o}\ ,\ X_t\ ,\ P^{\mu}\ \ldots\ldots$$

Ceci étant, considérons les assertions suivantes

- a) La réalisation canonique est fortement markovienne
- b) Les fonctions p-excessives ($p\geqq 0$) sont continues à droite (ps) sur les trajectoires de la réalisation canonique
- c) Les fonctions p-excessives ($p\geqq 0$) sont presque-boréliennes.

Il est bien connu que b)=>a), et qu'inversement a) et c) entraînent b). L'hypothèse c) fait partie du rituel de la théorie des processus de Markov, et elle est en général considérée comme anodine : il arrive si fréquemment que la résolvante transforme les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes ! Tout récemment, MAISONNEUVE est tombé sur un exemple de processus pour lequel la vérification de b) n'est pas très difficile, tandis que celle de c) ne paraît pas abordable. Cela m'a amené à contester le rituel, et à poser la question suivante, sur laquelle chacun est invité à organiser des sit-in, teach-in, etc, de façon à atteindre toutes les couches de la population

QU'EST CE QUI OBLIGE LES F.EXC. A ÊTRE PRESQUE-BORELIENNES ?

Revoyons d'abord la démonstration de l'implication a) => b). Il est bienconnu qu'il suffit, pour avoir b) dans toute sa force, de vérifier

1. Si le semi-groupe admet des points de branchement, on commencera par restreindre l'espace d'états à l'ensemble des points de non-branchement. On supposera aussi que le semi-groupe est markovien.

la continuité à droite du processus $(e^{-pt}f\circ X_t)$ lorsque f est un potentiel U_pg de fonction (borélienne) positive bornée, avec $p>0$.

Or soit μ la loi initiale, et soient T_n des temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$, qui tendent en décroissant vers un temps d'arrêt T. La propriété de Markov forte entraîne aussitôt que $e^{-pT_n}f\circ X_{T_n}$ converge P^μ-p.s. vers $e^{-pT}f\circ X_T$, et cela entraîne la continuité à droite du processus $(e^{-pt}f\circ X_t)$, par un argument qui n'a rien à voir avec les processus de Markov, sous réserve que la propriété suivante soit satisfaite :

c') Si f est p-excessive, le processus $(f\circ X_t)$ est, pour toute loi initiale μ , (P^μ-indistinguable d'un processus) bien-mesurable par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$.

L'hypothèse c') est une conséquence immédiate de c) [car le processus (X_t) lui même, adapté et continu à droite, est bien-mesurable, et il en est de même de $(f\circ X_t)$ si f est borélienne, puis presque-borélienne] et aussi de b) [car un processus adapté, p.s. continu à droite, est bien-mesurable]. Ainsi on a l'équivalence

(a) et c')) $\Longleftrightarrow$ (b)

Nous allons démontrer maintenant que sous l'hypothèse b) seulement, on a le théorème suivant, qui montre que les fonctions p-excessives sont "presque" presque-boréliennes :

THEOREME. <u>Soit</u> f <u>une fonction universellement mesurable positive sur</u> E, <u>telle que le processus</u> $(f\circ X_t)_{t\geqq 0}$ <u>soit</u> P^μ-<u>indistinguable d'un processus continu à droite</u>. <u>Il existe alors une fonction borélienne</u> f' <u>sur</u> E, <u>tel que l'ensemble</u> $A=\{f\neq f'\}$ <u>soit</u> μ-<u>négligeable et</u> μ-<u>polaire</u>.

COROLLAIRE. <u>Si tout ensemble</u> μ-<u>polaire peut être enfermé dans un ensemble borélien</u> μ-<u>polaire</u>, <u>l'hypothèse</u> b) <u>entraîne que les fonctions p-excessives sont presque-boréliennes</u>.

En effet, enfermons A dans un tel borélien B, que nous pouvons aussi supposer μ-négligeable. Posons

$$f_1 = f'.I_B \quad , \quad f_2 = f'+(+\infty)I_B$$

alors f_1 et f_2 sont boréliennes, encadrent f, et on a $P^\mu\{\,\omega:\ \exists\, t\geqq 0,\ f_1\circ X_t(\omega)\neq f_2\circ X_t(\omega)\} = 0$: c'est la définition des fonctions presque-boréliennes.

Démontrons le théorème. L'application de Ω dans le compact métrisable $F^{\mathbb{Q}_+}$, qui à $\omega\in\Omega$ associe sa restriction aux rationnels, est injective, et nous permet d'identifier Ω à un sous-ensemble de $F^{\mathbb{Q}_+}$. Il est facile de vérifier que $\underline{\underline{F}}^\circ$ est alors la tribu borélienne induite par $F^{\mathbb{Q}_+}$.

Notons Y_t la coordonnée d'indice $t\in\mathbb{Q}_+$ sur $F^{\mathbb{Q}_+}$, et pour tout t réel posons sur $F^{\mathbb{Q}_+}$

$$X_t(w) = Y_{t+}(w) \text{ si cette limite existe dans } F$$
$$= \partial \text{ si elle n'existe pas}$$

où ∂ est un élément de $F\setminus E$ (on peut toujours supposer qu'il en existe !). Le processus (X_t) sur $F^{\mathbb{Q}_+}$ est mesurable, et Ω^cest la projection sur $F^{\mathbb{Q}_+}$ de l'ensemble mesurable $\{(t,w) : X_t(\omega)\notin E\}$. Autrement dit, Ω est un complémentaire d'analytique, il est en particulier universellement mesurable dans $F^{\mathbb{Q}_+}$: <u>nous choisissons un sous-ensemble borélien $\overline{\Omega}$ de Ω qui porte la mesure</u> P^μ. Noter que $\overline{\Omega}\in\underline{\underline{F}}^\circ$.

Regardons maintenant le processus $(f\circ X_t)$ sur Ω : il existe par hypothèse un processus (U_t), mesurable par rapport à $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^\circ$, et indistinguable de $(f\circ X_t)$. Il existe donc un ensemble $H\in\underline{\underline{F}}^\circ$, tel que H^c soit P^μ-négligeable, et que pour $\omega\in H$ on ait $f\circ X_\cdot(\omega)=U_\cdot(\omega)$. Quitte à réduire un peu $\overline{\Omega}$, on peut supposer que cette identité a lieu sur $\overline{\Omega}$.

Considérons l'espace de BLACKWELL $\mathbb{R}_+\times\overline{\Omega}$, muni de la tribu $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\overline{\underline{\underline{F}}}^\circ$, où $\overline{\underline{\underline{F}}}^\circ$ est la tribu induite par $\underline{\underline{F}}^\circ$. Notons aussi $\overline{X}_t$ la restriction de X_t à $\overline{\Omega}$, et $\underline{\underline{M}}$ la tribu sur $\mathbb{R}_+\times\overline{\Omega}$ engendrée par la fonction $(t,\omega)\mapsto\overline{X}_t(\omega)$: $\underline{\underline{M}}$ est séparable est contenue dans $\underline{\underline{T}}$. La restriction $\overline{U}$ du processus U à $\mathbb{R}_+\times\overline{\Omega}$ est $\underline{\underline{T}}$-mesurable, et constante sur les atomes de $\underline{\underline{M}}$ (du fait que $\overline{U}$ s'écrit $f\circ\overline{X}_t$) : d'après le théorème de BLACKWELL, elle est $\underline{\underline{M}}$-mesurable. Autrement dit, il existe f' borélienne sur E telle que $\overline{U}$ s'écrive $f'\circ\overline{X}$ sur $\overline{\Omega}$. Les processus $(f\circ X_t)$ et $(f'\circ X_t)$ sont alors indistinguables sur Ω , et le théorème est établi.

Il résulte aussitôt du théorème que tout élément de la tribu engendrée par les fonctions excessives est égal à un ensemble borélien, à un ensemble μ-négligeable et μ-polaire près. Il est clair que cela permet de se passer du caractère presque-borélien des fonctions excessives, dans le déroulement d'une très grande partie de la théorie du potentiel. Il y a cependant un point où l'on a <u>vraiment</u> besoin d'un encadrement, semble t'il : cela se trouve à la page 154 de l'article [1] de WALSH-MEYER, et il s'agit là de plonger E dans un compactifié de RAY. Ce n'est pas tout à fait un point mineur : en effet, le théorème de SHIH sur les processus de Markov satisfaisant aux hypothèses droites, qui permet de leur étendre la théorie du balayage, n'a été établi par SHIH que pour des résolvantes boréliennes, et étendu au cas général dans [1] précisément au moyen de l'argument en question. Comment lever cette difficulté ? On va employer une méthode familière et ennuyeuse, dite " des épluchures "

CONSTRUCTION D'UNE RESOLVANTE BORELIENNE

Nous identifions les mesures sur E à des mesures sur F portées par E, nous désignons par (U_p) la résolvante, et choisissons un ensemble dénombrable $\underline{\underline{D}}$ dense dans $\underline{\underline{C}}(F)$, qui soit aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Puis nous choisissons n'importe comment, pour $p\in\mathbb{Q}$ et >0, et $f\in\underline{\underline{D}}$, une fonction borélienne sur E égale μ-q.p.[1] à U_pf, et nous la noterons $U_p'f$. Considérons maintenant l'ensemble H_1 des $x\in E$ tels que $f\longmapsto U_p'f(x)$ se prolonge en une forme linéaire positive de masse $\frac{1}{p}$ sur $\underline{\underline{C}}(F)$: H_1^c est μ-négligeable et μ-polaire, et borélien . Nous modifierons U_p' en posant sur H_1^c $U_p'(x,f)= f(x)/p$, de sorte que les U_p' sont de vrais noyaux de E dans F.

Un raisonnement de classes monotones, fondé sur le théorème VI. T16 de [2], montre alors que pour toute f borélienne bornée sur F , et tout p rationnel, on a $U_p'f=U_pf$ μ-q.p.. Prenant $f=I_{E^c}$, nous voyons que $U_p'(\cdot,E^c)=0$ μ-quasi-partout. D'où un second borélien exceptionnel H_2^c , sur lequel on transforme les noyaux U_p' de la même manière que plus haut.

Soit A un ensemble appartenant à la tribu engendrée par les fonctions p-excessives (p>0), tribu qui ne dépend pas de p et contient la tribu borélienne. Nous remarquons que si A est μ-négligeable et μ-polaire, et e_A désigne son potentiel d'équilibre, l'ensemble $\{e_A>0\}$ possède les mêmes propriétés, et en particulier $U_p(A)=0$ μ-qp. Donc $U_pU_qf=U_pU_q'f$ μ-q.p. pour chaque f ; les deux membres étant des mesures, et la tribu borélienne étant séparable, on a $\varepsilon_xU_pU_q=\varepsilon_xU_pU_q'$ μ-q.p. D'où il résulte que

$$\varepsilon_xU_p' - \varepsilon_xU_q' = (q-p)\varepsilon_xU_p'U_q' \quad \mu\text{-q.p.} \qquad (\text{ p et q rationnels})$$

Soit L_1 l'ensemble (borélien) où cette identité a lieu. Définissons par récurrence des ensembles L_n , n>1, en posant $L_{n+1}^c = L_n^c\cup\{x : \exists p\in\mathbb{Q}_+ ,U_p'(x,L_n^c)>0\}$, et soit H_3 l'intersection des L_n ; on a $H_3=E$ μ-q.p. , et si l'on remplace ε_xU_p' par ε_x/p pour $x\in H_3^c$, on obtient une vraie résolvante borélienne sur E (que l'on continuera à désigner par (U_p')). Pardon, on a été un peu vite : on a l'équation résolvante pour p rationnel, et le prolongement pour p

1. Pour alléger le langage, μ-q.p. signifiera ici " sauf sur un ensemble μ-négligeable et μ-polaire".

réel se fait par convergence uniforme, pour les fonctions bornées. On a $\varepsilon_x U_p = \varepsilon_x U'_p$ μ-qp .

Soit $f \in \underline{\underline{D}}$: on a $\lim_{p\to\infty} pU_p f = f$, donc $\lim pU'_p f = f$ μ-qp. Comme toutes les mesures sont portées par E, cela entraîne ($\underline{\underline{D}}$ étant dense dans $\underline{\underline{C}}(F)$) que $\varepsilon_x pU'_p$ converge étroitement vers ε_x μ-qp. En utilisant le procédé qui vient d'être utilisé, on construit une nouvelle résolvante sur E (toujours désignée par (U'_p)), telle que $\varepsilon_x pU'_p$ converge étroitement vers ε_x partout sur E.

Nous pouvons alors considérer le compactifié de RAY-KNIGHT de E pour la résolvante (U'_p) : nous le noterons $\overline{E}$. Il lui correspond un semi-groupe (P'_t) sur $\overline{E}$, et des processus canoniques

$$\Omega',\ X'_t\ \ldots\ P'^x$$

où Ω' est l'ensemble des applications continues à droite et pourvues de limites à gauche de $\mathbb{R}_+$ dans $\overline{E}$.

Soient $g \in \underline{\underline{D}}$, et p rationnel >0 ; posons $A_{p,g} = \{U_p g \neq U'_p g\}$, ensemble μ-négligeable et μ-polaire, appartenant à la tribu engendrée par les fonctions excessives. Soit $B_{p,g} = \{ e_{A_{p,g}} > 0\}$, qui possède les mêmes propriétés, et soit B la réunion de tous les ensembles $B_{p,g}$ et $A_{p,g}$. Si $x \in B^c$, les processus $(U_p g \circ X_t)$ et $(U'_p g \circ X_t)$ sont P^x-indistinguables, et le processus (X_t) est donc P^x-p.s. continu à droite et pourvu de limites à gauche dans $\overline{E}$. En particulier, si l'on convient d'identifier mesures sur E et mesures sur $\overline{E}$ portées par E, la fonction $t \mapsto P_t(x,f) = E^x[f \circ X_t]$ est continue à droite si $f \in \underline{\underline{C}}(\overline{E})$. Les fonctions $P_\cdot(x,f)$ et $P'_\cdot(x,f)$ ont même transformée de Laplace et sont continues à droite , elles sont donc identiques, et l'on voit que si $x \in B^c$, on a $P_t(x,.) = P'_t(x,.)$ pour tout t. Mais le processus (X_t) ne rencontre P^x-p.s. jamais B si $x \in B^c$, et nous avons prouvé que

<u>si</u> $x \in B^c$ (B <u>étant</u> μ-<u>polaire et</u> μ-<u>négligeable</u>), <u>le processus</u> $(\Omega,(X_t),P^x)$ <u>est un processus continu à droite à valeurs dans</u> $\overline{E}$, <u>admettant</u> (P'_t) <u>comme semi-groupe de transition</u>.

Comme (P'_t) est un semi-groupe de RAY, on a là un moyen de ramener l'étude du semi-groupe (P_t), qui ne satisfait pas à l'hypothèse c), à la théorie " classique " comportant cette hypothèse. Il faudra seulement se fatiguer un peu à traîner des ensembles négligeables-et-polaires... il faudra s'y habituer, si l'hypothèse c) s'avère trop gênante.

[1]. J.B.WALSH et P.A.MEYER. Quelques applications des résolvantes de RAY. Invent.Math. 14, 1971, p.143-166.

[2]. P.A.MEYER. Probabilités et potentiels, Hermann Blaisdell 1966.