PAUL-ANDRÉ MEYER

Limites médiales d'après Mokobodzki

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 198-204
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__198_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1971/72

LIMITES MEDIALES, D'APRES MOKOBODZKI

exposé de P.A.Meyer

Il s'agit d'une application de l'axiome du continu à la théorie de la mesure, encore plus belle que l'invention des " filtres rapides" . On n'en dira pas plus, afin de ménager les effets de surprise qui font le charme du sujet.

§ 1 . UN THEOREME DU TYPE DE HAHN-BANACH

Notations et rappels. X est un sous-ensemble compact métrisable d'un e.v.t. localement convexe E.

On va d'abord rappeler quelques résultats sur les fonctions convexes. Nous convenons ici qu'une fonction convexe sur X ne prend jamais la valeur $-\infty$, mais peut prendre la valeur $+\infty$. A toute fonction convexe u on associe l'ensemble des points situés au dessus de son graphe

$$A_u = \{ (t,x) \in \mathbb{R}\times X : u(x) \leqq t \}$$

C'est un ensemble convexe, fermé si et seulement si u est s.c.i. (et alors l'ensemble $A_u^b = A_u \cap \{(t,x) : t \leqq b \}$ est convexe compact pour tout b). En appliquant à A_u le théorème de Hahn-Banach, on voit que u (convexe s.c.i.) est enveloppe supérieure de fonctions affines continues. Elle satisfait donc à l'inégalité

$$(1) \qquad u(b) \leqq \int_X u(x)\mu(dx)$$

pour toute mesure de probabilité μ sur X, de barycentre b.

Soient u_1 et u_2 deux fonctions convexes s.c.i., dont l'une est bornée par une constante b. Un petit dessin montrera que l'enveloppe convexe de A_{u_1} et A_{u_2} est la réunion de $[b,\infty]\times X$ et de l'enveloppe convexe de $A_{u_1}^b$ et $A_{u_2}^b$. Mais ces ensembles sont convexes compacts, leur enveloppe convexe est donc compacte, et l'enveloppe de $A_{u_1} \cup A_{u_2}$ est fermée. On peut donc définir une fonction convexe $u = u_1 \overline{\wedge}\, u_2$ par

$$(2) \qquad A_u = \text{enveloppe convexe de } A_{u_1} \cup A_{u_2}$$

et u est encore s.c.i.; u est évidemment le sup des formes affines continues minorant à la fois u_1 et u_2, d'où l'associativité de cette opération. Mais ce qui apparaît sur cette construction, c'est que si v est convexe quelconque , et $v \leqq u_1$, $v \leqq u_2$, alors $v \leqq u_1 \overline{\wedge}\, u_2$.

On n'en dira pas plus, car on a tout ce qu'il faut pour poser la première définition importante

DEFINITION. *La classe* Γ_+ *est formée des fonctions convexes bornées* v, *enveloppes inférieures dénombrables de fonctions convexes s.c.i.*.

Soit (v_n) une suite de fonctions convexes s.c.i. telle que $v=\inf_n v_n$, et soit b une constante majorant v ; v est aussi la limite de la suite *décroissante* $b\overline{\wedge}v_1\overline{\wedge}\ldots\overline{\wedge}v_n$ de fonctions convexes s.c.i. *bornées* . On en déduit que v satisfait à l'inégalité (1).
Nous poserons $\Gamma_- = -\Gamma_+$. C'est une classe de fonctions concaves s.c.s..

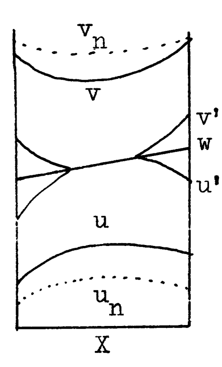
La seconde définition importante est la suivante

DEFINITION. *Une fonction universellement mesurable bornée* w *sur* X *est dite* fortement affine *si l'on a* $w(b)=\int w(x)\mu(dx)$ *pour toute mesure de probabilité* μ *sur* X, *de barycentre* b.

Toute fonction affine continue (ou s.c.i., ou s.c.s.) est fortement affine, mais il existe des fonctions affines boréliennes qui ne le sont pas [exemple : X={mesures de probabilité sur [0,1]}, muni de la topologie vague ; $w(\mu)$= masse totale de la partie atomique de μ]. Mais si pour tout μ on peut encadrer w entre deux fonctions $u\in\Gamma_-$, $v\in\Gamma^+$ telles que $\mu(v-u)<\varepsilon$, w est fortement affine.

Et voici le résultat principal de cette première partie :

THEOREME 1. *Soient* $u\in\Gamma_-$, $v\in\Gamma_+$ *telles que* $u\leq v$. *Il existe alors une fonction fortement affine* w *telle que* $u\leq w\leq v$.



On établit d'abord un lemme :

LEMME. *Soit* μ *une mesure de probabilité sur* X. *Il existe deux fonctions* $u'\in\Gamma_-$, $v'\in\Gamma_+$ *telles que* $u\leq u'\leq v'\leq v$ *et que* $u'=v'$ μ-*p.p.*.

DEMONSTRATION. Choisissons une suite $u_n\uparrow u$ (resp. $v_n \downarrow v$) de fonctions bornées concaves s.c.s. (resp. convexes s.c.i.). Le théorème de HAHN-BANACH ordinaire, appliqué aux ensembles situés respectivement au dessus du graphe de $v_n+\frac{1}{n}$ et au dessous du graphe de $u_n-\frac{1}{n}$, montre que l'ensemble A_n des formes affines continues h telles que $u_n-\frac{1}{n}\leq h\leq v_n+\frac{1}{n}$ est non vide pour tout n . A_n décroît, et son adhérence $\overline{A}_n$ dans $L^1(\mu)$ faible est compacte. Il existe donc $a\in L^1(\mu)$ appartenant à tous les $\overline{A}_n$. Mais comme A_n est convexe, $\overline{A}_n$ en est aussi l'adhérence *forte*, et nous pouvons trouver $a_n\in A_n$ tel que $\|a_n-a\|_1\leq 2^{-n}$.

La suite (a_n) converge alors μ-p.p., et nous obtenons les fonctions désirées en posant

$$u' = \lim_n \inf a_n \quad , \quad v' = \lim_n \sup a_n$$

DEMONSTRATION DU THEOREME. Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble de tous les ordinaux dénombrables : $\mathfrak{S}$ a la puissance du continu (axiome du continu !) et il existe une bijection $\alpha \mapsto \mu_\alpha$ de $\mathfrak{S}$ sur l'ensemble des mesures de probabilité sur X. On construit alors par récurrence transfinie, au moyen du lemme précédent, deux applications

$\alpha \mapsto u_\alpha$ croissante, de $\mathfrak{S}$ dans Γ_-

$\alpha \mapsto v_\alpha$ décroissante , de $\mathfrak{S}$ dans Γ_+

telles que $u \leqq u_\alpha \leqq v_\alpha \leqq v$ et $u_\alpha = v_\alpha$ μ_α-p.p. pour tout α . Toute mesure ε_x figurant dans l'énumération, ces fonctions ont une limite commune w . Celle-ci est évidemment universellement mesurable. Enfin, si μ est une mesure de probabilité, x son barycentre, $(\mu+\varepsilon_x)/2$ figure dans l'énumération, d'où résulte aussitôt que w est fortement affine.

§ 2 . LIMITE MEDIALE D'UNE SUITE BORNEE

Nous appliquons les résultats précédents à $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, X étant le cube $[-1,1]^{\mathbb{N}}$, et en prenant pour u et v les deux fonctions sur X

$$u = \lim_n \inf \xi_n \quad , \quad v = \lim_n \sup \xi_n$$

où les ξ_n sont les applications coordonnées (qui sont affines continues sur X). Nous choisissons une fois pour toutes une fonction fortement affine ℓ sur X, comprise entre u et v : ℓ se prolonge par homogénéité au sous-espace $\mathbb{R}_+.X = \ell^\infty$ de E.

DEFINITION. <u>Si</u> $x=(x_n)$ <u>est une suite bornée</u>, <u>le nombre</u> $\ell(x)$ <u>sera appelé</u> limite médiale <u>de</u> x, <u>et noté</u> $\lim_n \text{méd}\ x_n$.

Cette terminologie est très agréable, lorsqu'on met " lim méd" en rapport avec " lim inf" et"lim sup" , mais ce n'est pas une vraie opération de limite. Nous verrons plus loin que $\lim_n \text{méd}\ x_n$ peut être égal à 0 pour une suite x_n à valeurs ± 1 , de sorte que $\lim_n \text{méd}\ x_n$ n'est pas une valeur d'adhérence de la suite, en général. De plus, on n'a pas nécessairement $\lim_n \text{méd}\ x_n = \lim_n \text{méd}\ x_{n+1}$, ce qui est un peu choquant . Mais là le remède est bien facile : il suffirait de remplacer u et v par les fonctions

$$\lim \begin{matrix}\inf \\ \sup\end{matrix} \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n+1}$$

La limite médiale ainsi modifiée sera égale à la limite de Cesaro de la suite lorsque celle ci existera. A vrai dire, il n'y a pas de raison de s'arrêter en si bon chemin, et on peut trouver une fonctionnelle " lim méd" meilleure, par exemple, que tous les procédés de Cesaro. J'ignore à quoi cela peut servir. Ici, nous laisserons cela de côté, et nous reviendrons à une limite médiale quelconque.

Voici la propriété fondamentale des limites médiales. $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ désigne un espace mesurable, $\underline{\underline{F}}^*$ est la tribu complétée universelle de $\underline{\underline{F}}$.

THEOREME 2. Soit (f_n) une suite uniformément bornée de fonctions mesurables sur Ω, et soit f la fonction $\omega \mapsto \lim\text{méd}_n f_n(\omega)$ [on la notera $\lim_n\text{méd}\ f_n$ dans la suite]. Alors f est $\underline{\underline{F}}^*$-mesurable et l'on a pour toute mesure bornée μ sur Ω (non nécessairement positive)

$$(3) \qquad \mu(f) = \lim_n\text{méd}\ \mu(f_n)$$

et en particulier, $\mu(f)$ est comprise entre $\lim_n\inf \mu(f_n)$ et $\lim_n\sup \mu(f_n)$.

DEMONSTRATION. Nous pouvons supposer la suite à valeurs dans $[-1,1]$. L'application $F : (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ applique alors Ω dans X, et elle est mesurable . Elle est encore mesurable lorsque X est muni de sa tribu universellement mesurable, Ω de $\underline{\underline{F}}^*$. La fonction ℓ (= lim méd) sur X étant universellement mesurable sur X, la fonction $f=\ell\circ F$ est $\underline{\underline{F}}^*$-mesurable sur Ω. Lorsque μ est une loi de probabilité, (3) ne fait qu'exprimer le caractère fortement affine de ℓ : soit λ la loi image $F(\mu)$, le membre de gauche vaut $\int \ell d\lambda$, tandis que la suite $(\mu(f_n))$ est le barycentre de la mesure λ sur X. On passe alors au cas où μ est bornée par linéarité.

COROLLAIRE. Si pour une mesure bornée μ la suite (f_n) converge faiblement dans $L^1(\mu)$ vers une fonction g, on a $g=\lim_n\text{méd}\ f_n$ μ-p.p..

DEMONSTRATION. Si A est un élément de $\underline{\underline{F}}$, on a d'après (3)

$$\int_A f\, d\mu = \lim_n\text{méd} \int_A f_n d\mu$$

mais $\lim_n \int_A f_n d\mu$ existe et vaut $\int_A g\, d\mu$. Donc $g=f$ μ-p.p..

COMMENTAIRE. Le procédé qui a permis de trouver la limite g est indépendant de la mesure μ : ainsi, si la suite (f_n) converge faiblement dans quantité d'espaces $L^1(\mu_i)$ simultanément, la fonction $\lim_n\text{méd}\ f_n$ est une version de la limite faible pour toutes les μ_i à la fois.

Dans le cas de la convergence forte dans L^1, ou simplement de la convergence en mesure par rapport aux μ_i, un théorème très utile de

MOKOBODZKI permettait déjà (depuis 1967) de construire de telles limites indépendantes de la famille de mesures. Il s'agissait du procédé des " filtres rapides" sur $\mathbb{N}$, qui reposait lui aussi sur l'axiome du continu. Nous verrons que le procédé des limites médiales permet de se passer complètement des filtres rapides, même pour l'étude de la convergence en mesure.

Si on applique le corollaire du th.2 à une suite de variables aléatoires indépendantes f_n de même loi , à valeurs dans $\{-1,1\}$, suite qui converge faiblement vers son espérance, on obtient des exemples de suites à valeurs ± 1 dont la limite médiale est un nombre quelconque de l'intervalle $]-1,1[$.

Nous allons maintenant étendre la notion de limite médiale à toutes les suites positives , et à certaines suites non bornées de signe quelconque.

§ 3 . EXTENSION AUX SUITES NON BORNEES

Soit $\beta(\mathbb{N})$ le compactifié de ČECH de $\mathbb{N}$: les points de $\beta(\mathbb{N})$ correspondent aux ultrafiltres non triviaux sur $\mathbb{N}$, et toute fonction x sur $\mathbb{N}$ (i.e. toute suite (x_n)) admet un prolongement unique $\overline{x}$ à $\beta(\mathbb{N})$, qui est une fonction continue sur cet espace à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ (si υ est un ultrafiltre, $\overline{x}(\upsilon)$ est tout simplement $\lim_\upsilon x$).

En particulier, l'application $x \mapsto \overline{x}$ est un isomorphisme de l'espace de Banach ℓ^∞ des suites bornées sur l'espace de Banach $\underline{C}(\beta(\mathbb{N}))$ des fonctions continues (bornées!) sur le compactifié. L'application linéaire positive de norme 1 $x \mapsto \lim_n \text{méd } x_n$ apparaît alors comme une mesure de probabilité θ sur $\beta(\mathbb{N})$[1] et on peut écrire

(4) $\quad$ pour $x \in \ell^\infty$, $\lim_n \text{méd } x_n = \int \overline{x} d\theta$

Cela nous permet de définir $\lim_n \text{méd } x_n$, pour des suites non bornées, comme $\int \overline{x}\, d\theta$ lorsque cette intégrale existe : lorsque x est positive, par exemple, ou lorsque $\int |\overline{x}| d\theta < +\infty$.

Cette définition abstraite, compte tenu du fait que $\overline{x \wedge m} = \overline{x} \wedge m$, se transforme aussitôt en les deux règles concrètes suivantes

a) si x est positive, $\lim_n \text{méd } x_n = \sup_m \lim_n \text{méd } x_n \wedge m$

b) en général, $\lim \text{méd } x = \lim \text{méd } x^+ - \lim \text{méd } x^-$ si $\lim \text{méd } |x| < \infty$
(et aussi $\lim_n \text{méd } x_n = \lim_m \lim_n \text{méd } ((-m) \vee (x_n \wedge m))$ dans ce cas)

---

[1] Cette mesure ne charge pas $\mathbb{N}$ (vérification immédiate).

THEOREME 3 . Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$, et soit μ une mesure bornée (positive ou non) sur Ω . On note f la fonction ($\underline{\underline{F}}^*$-mesurable) égale à $\lim_n \text{méd}\, f_n(\omega)$ là où $\lim_n \text{méd}\, |f_n(\omega)| < \infty$, non définie ailleurs.

a) Si $\sup_n \int |f_n| d|\mu| < \infty$, f est définie (et finie) μ-p.p., et $f \in L^1(\mu)$

b) Si la suite (f_n) est uniformément intégrable par rapport à $|\mu|$, on a

$$(5) \qquad \int f\, d\mu = \lim_n \text{méd} \int f_n\, d\mu$$

COROLLAIRE. Si la suite (f_n) converge faiblement vers f' dans $L^1(\mu)$, $\lim_n \text{méd}\, f_n$ existe μ-p.p. et est égale μ-p.p. à f'.

DEMONSTRATION. Pour établir a), nous supposons les f_n et μ positives. Nous avons pour tout m

$$\mu(\lim_n \text{méd}(f_n \wedge m)) = \lim_n \text{méd}\, \mu(f_n \wedge m) \leqq \lim_n \text{méd}\, \mu(f_n)$$

on fait tendre m vers $+\infty$, il vient

$$\mu(\lim_n \text{méd}\, f_n) \leqq \lim_n \text{méd}\, \mu(f_n)$$

d'où a) si la suite $\mu(f_n)$ est bornée.

Pour établir b), on considère les fonctions $f_n^m = (-m) \vee (f_n \wedge m)$, et on écrit de même pour tout m

$$\mu(\lim_n \text{méd}\, f_n^m) = \lim_n \text{méd}\, \mu(f_n^m)$$

Mais $\lim_n \text{méd}\, |f_n|$ est finie μ-p.p. et $|\mu|$-intégrable, $\lim_n \text{méd}\, f_n^m$ converge vers $\lim_n \text{méd}\, f_n$ en tout point où $\lim_n \text{méd}\, |f_n| < \infty$, et le premier membre converge donc vers $\mu(\lim_n \text{méd}\, f_n)$ lorsque $m \to \infty$, par convergence dominée. D'autre part, l'intégrabilité uniforme de la suite (f_n) entraîne la convergence uniforme de la suite $(\mu(f_n^m))$ vers $(\mu(f_n))$, d'où la formule (5). Le corollaire se démontre comme celui du th.2., en se rappelant qu'une suite faiblement convergente est uniformément intégrable.

REMARQUE. Si (f_n) est une suite uniformément intégrable, la fonction $\lim_n \text{méd}\, f_n$ appartient, pour tout n , à l'enveloppe convexe fermée de $(f_n, f_{n+1}, \ldots)$ dans L^1. Cela résulte de (5) et du théorème de HAHN-BANACH

Voici la forme du théorème précédent qui concerne la convergence en mesure. Elle montre que les limites médiales remplacent complètement les filtres rapides dans les applications.

THEOREME 4 . Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$, qui converge en mesure vers une fonction f (finie μ-p.p. !). Alors on a μ-p.p. $\lim_n \text{méd}\, |f_n| < \infty$, $\lim_n \text{méd}\, f_n = f$.

DEMONSTRATION. C'est presque évident : il suffit de démontrer le résultat pour les suites f_n^+ et f_n^- , qui convergent en mesure vers f^+ et f^-. Autrement dit, on peut supposer les f_n positives. On a alors, d'après le corollaire du th.2

$$\lim_n \text{méd}_n\, f_n \wedge m \quad = f \wedge m \qquad \mu\text{-p.p. pour tout } m$$

puisqu'il y a dans ce cas convergence forte dans $L^1(\mu)$. On fait tendre m vers $+\infty$ et on obtient le résultat cherché.

REMARQUE. La théorie du §1 est sans doute susceptible d'autres applications que celles des paragraphes 2-3. Considérons par exemple l'intervalle $[0,1[$, muni de la mesure de Lebesgue, et prenons pour X la boule unité de L^∞, munie de la topologie faible $\sigma(L^\infty,L^1)$. Pour $f\in X$, et pour tout intervalle $I=[a,b]\subset[0,1[$, on a

$$\sup_{x\in I} \text{ess } f(x) = \sup_{\substack{a<r<s<b \\ r,s\in\mathbb{Q}}} \frac{1}{s-r}\int_r^s f(x)dx$$

Si nous notons $v_I(f)$ le premier membre, v_I est donc une fonction convexe s.c.i. sur X. Les fonctions $v_{[0,1/n[}$ décroissent lorsque n croît, et la fonction sur X

$$v(f) = \lim_{x\to 0} \sup \text{ ess } f(x) = \lim_{n\to\infty} v_{[0,1/n[}(f)$$

appartient à la classe Γ_+ . De même , la fonction $\lim\inf_{x\to 0} \text{ess } f(x)$ $=u(f)$ appartient à Γ_- , et comme on a $u\leqq v$, le théorème 1 nous donne l'existence de " limites médiales essentielles" en 0 . C'est certainement une notion intéressante.

P.A.Meyer
Institut de Rech.Math. Alsancée
Laboratoire associé au CNRS
7 rue René Descartes, 67-Strasbourg