SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Résultats d'Azéma en théorie générale des processus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 180-197
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__180_0>

RESULTATS D'AZÉMA EN "THEORIE GENERALE DES PROCESSUS"

exposé de P.A. Meyer

Les résultats exposés ici sont contenus dans un article d'AZÉMA intitulé " Quelques applications de la théorie générale des processus, I." Cet article a été plusieurs fois remanié depuis 2 ans, et doit paraître aux Inventiones Math. . J'en extrais la partie " générale" , qui me paraît extrêmement intéressante et originale, et qui tourne autour de l'idée suivante.

Nous nous donnons un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ muni d'une famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant aux conditions habituelles. Soit L une variable aléatoire positive, qui n'est pas nécessairement un temps d'arrêt ; à chaque instant on cherche à " localiser " L au moyen des informations dont on dispose. Si L était un temps d'arrêt, cette localisation donnerait une " tache" plus ou moins floue avant L, mais deviendrait exacte aussitôt après L. L n'en étant pas un, la localisation n'est jamais exacte et on se propose, par exemple, de borner la tache. D'autres questions sont traitées, par exemple la "théorie relative" liée à L, du §2 .

Le titre de l'article d'AZÉMA indique assez que la théorie précédente est justifiée par des applications (aux processus de Markov) : tout cela est omis ici, non seulement par paresse, mais aussi pour donner envie de lire l'article original.

§ 1. FINS D'ENSEMBLES PREVISIBLES

Nous convenons que $\underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{F}}_0$ pour $t<0$. L désigne une variable aléatoire positive sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$, qui peut prendre les valeurs 0 et $+\infty$. On introduit la surmartingale positive, bornée par 1

(1) $$c_t^L = P\{L>t|\underline{\underline{F}}_t\}$$

dont on prend une version continue à droite. Si aucune confusion n'en résulte, nous écrirons c au lieu de c^L. On a $c_t=1$ pour $t<0$, mais $P\{c_0=1\} = P\{L>0\}$. De même, $c_\infty=0$, mais $P\{c_{\infty-}=0\}=P\{L<\infty\}$. Dans ce paragraphe, nous allons essayer d'estimer L au moyen de l'information contenue dans la surmartingale c. Il faut remarquer que ce n'est pas toute l'information dont on dispose sur L : à l'instant t, on connaît en effet toute la loi conditionnelle $P\{L>a|\underline{\underline{F}}_t\}$ ($a\in\mathbb{R}_+$) , tandis que c détermine $P\{L>a|\underline{\underline{F}}_t\}=E[c_a|\underline{\underline{F}}_t]$ pour $a\geqq t$, mais seulement $P\{L>a|\underline{\underline{F}}_a\}=c_a$ pour $a<t$.

On peut associer à L une loi de probabilité ε_L sur $\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega$ muni de sa tribu produit naturelle :

(2) $\quad \varepsilon_L(Z) = E[X_L]$ pour tout processus mesurable borné Z

Soient Z^p et Z^w les projections respectivement prévisible et bien-mesurable de Z. Il existe deux lois de probabilité μ_L^p et μ_L^w sur $\overline{\mathbb{R}}^+\times\Omega$, définies par

(3) $\quad \mu_L^p(Z) = \varepsilon_L(Z^p) \quad , \quad \mu_L^w(Z) = \varepsilon_L(Z^w)$

Il est bien connu (voir [ ]) que la mesure μ_L^p se construit de la manière suivante : soit p^L le processus prévisible engendrant c^L (il peut avoir un saut en 0 et un saut à l'infini) ; alors

(4) $\quad \mu_L^p(Z) = E[\int_{[0,\infty]} Z_s dp_s^L]$

Ainsi, c^L, μ_L^p, p^L contiennent exactement la même information .

REMARQUE. AZÉMA n'utilise pas μ_L^w , qui s'est d'ailleurs avéré inutile. On peut cependant poursuivre le parallélisme avec le cas prévisible : il existe un processus croissant w^L tel que l'on ait

(5) $\quad \mu_L^w(Z) = E[\int_{[0,\infty]} Z_s dw_s^L]$

w^L engendre aussi c^L , et contient un tout petit peu plus d'information sur L que p^L - mais pas beaucoup plus : si l'on a $P\{L=T\}=0$ pour tout temps d'arrêt T, on a

$$E[\Delta w_T^L] = \mu_L^w([T])= \varepsilon_L([T])= P\{T=L\}=0$$

et w^L est alors continu, donc égal à p^L

PROPOSITION 1. <u>Soit</u> S_L^p (<u>ou simplement</u> S^p) <u>l'ensemble des points de croissance à gauche du processus croissant prévisible</u> p^L. <u>Alors</u> S^p <u>est</u> (<u>à un ensemble évanescent près</u>) <u>le plus petit ensemble prévisible fermé à gauche</u>[1] <u>contenant</u> [L].

---

[1] On rappelle que $A\subset\mathbb{R}$ est dit fermé à gauche si la limite de toute suite croissante d'éléments de A appartient à A. Un intervalle]a,b] est donc fermé <u>à gauche</u> (i.e. pour la topologie gauche) et non à droite !

DEMONSTRATION. Le processus p_s^L est prévisible, de même que le processus $p_{s-\varepsilon}^L$ (on prolonge p^L par 0 à gauche de 0). L'ensemble $\{(s,\omega) : p_s^L(\omega)>p_{s-\varepsilon}^L(\omega)\}$ est donc prévisible, et en faisant tendre ε vers 0 on voit que S_L^p est prévisible (ne pas oublier les points à l'infini, tout de même). L'ensemble S_L^p porte μ_L^p, donc ε_L - autrement dit, il contient $[L]$ à un ensemble évanescent près. Si U est un ensemble prévisible contenant $[L]$, U porte p^L, donc sa fermeture à gauche contient S_L^p à un ensemble évanescent près.

Nous dirons que S_L^p est le <u>support prévisible</u> de L

REMARQUE. L'ensemble des points de croissance à gauche de w^L est le plus petit ensemble bien-mesurable fermé à gauche contenant $[L]$.

PROPOSITION 2. <u>Soit</u> L^+ <u>la fin de</u> S_L^p ; <u>on a</u> $L\leqq L^+$, <u>et si</u> L <u>est la fin d'un ensemble prévisible on a</u> $L=L^+$.

DEMONSTRATION. On rappelle que la fin d'un ensemble mesurable $A\subset\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega$ est la v.a. $\sup\ \{ t : (t,\omega)\in A\}$, avec la convention $\sup\ \emptyset=0$. Par exemple, tout temps d'arrêt T est la fin de l'ensemble prévisible $[0,T]$.

Comme $[L]\subset S_L^p$, on a $L\leqq L^+$. Si L est la fin d'un ensemble prévisible K, L est aussi la fin de sa fermeture à gauche $\overline{K}$, qui est un ensemble prévisible[1] contenant $[L]$, donc S_L^p . La fin de $\overline{K}$ (c'est à dire L) majore donc la fin L^+ de S_L^p , d'où l'égalité.

REMARQUE. On a un résultat tout à fait analogue pour les ensembles bien-mesurables : L est majoré par la fin de l'ensemble S_L^w des points de croissance à gauche de w^L, avec égalité si L est la fin d'un ensemble bien-mesurable.

Nous allons placer maintenant une autre fin d'ensemble prévisible <u>à gauche</u> de L (prop.4). Nous aurons besoin pour cela des jolies formules de dualité suivantes .

PROPOSITION 3. <u>Soit</u> M <u>une seconde variable aléatoire positive</u>. <u>Alors</u>

(6) $$E[c_{M-}^L] = E[p_L^M]$$

---

[1] On trouvera plus loin une jolie démonstration de ce fait, due à AZEMA .

<u>et plus généralement, si</u> (Z_s) <u>est prévisible borné</u>

(6') $$E[Z_M c^L_{M-}] = E[\int_{[0,L]} Z_s dp^M_s]$$

DEMONSTRATION. Nous savons que pour tout temps d'arrêt T, $c^L_T = P\{L>T|\underline{\underline{F}}_T\}$. Il en résulte que si T est prévisible, $c^L_{T-}=P\{L\geqq T|\underline{\underline{F}}_{T-}\}$ Autrement dit, le processus (c^L_{s-}) est la projection prévisible du processus $I_{[0,L]}$, et par conséquent $(Z_s c^L_{s-})$ est la projection prévisible de $ZI_{[0,L]}$. On a alors, en utilisant des notations abrégées dont le sens est clair

$$E[Z_M c^L_{M-}] = < Zc^L_- \ , \ \varepsilon_M > = < Zc^L_- \ , \ \mu^p_M > = E[\int_{[0,L]} Z_s dp^M_s]$$

REMARQUE. On a de même, Z étant cette fois bien-mesurable

(7) $$E[Z_M c^L_M] = E[\int_{[0,L[} Z_s dw^M_s]$$

PROPOSITION 4. <u>Soit</u> U <u>l'ensemble prévisible</u> $\{(t,\omega) : c^L_{t-}(\omega)=1\}$. <u>Alors</u> U <u>est</u> (<u>à un ensemble évanescent près</u>) <u>le plus grand ensemble prévisible situé à gauche de</u> L. <u>Soit</u> L^- <u>la fin de</u> U ; <u>on a</u> $L^- \leqq L$, <u>et</u> $L^-=L$ <u>si</u> L <u>est la fin d'un ensemble prévisible</u>.

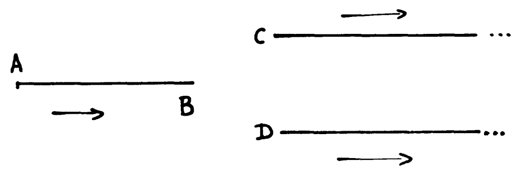
DEMONSTRATION. Conservons la notation c^L_- ou c_- pour le processus (c^L_{s-}). Si V est un ensemble prévisible situé à gauche de L, nous avons $I_V \leqq I_{[0,L]}$, donc en projetant sur la tribu prévisible $I_V \leqq c_-$, et enfin $V \subset U$ à ensemble évanescent près.

Montrons que U est effectivement à gauche de L : soit M la fin de U . Comme $c^L_{0-}=1$, les coupes de U sont non vides, et on a $c^L_{M-}=1$. D'après (6) on a $E[p^M_L]=1=E[p^M_\infty]$, donc p^M ne varie plus après L, ce qui signifie $M^+ \leqq L$, donc $M \leqq L$. $M=L^-$ par définition.

Si L est la fin d'un ensemble prévisible V, V est à gauche de L, donc U est plus gros que V et à gauche de L, et L est aussi la fin de U.

COROLLAIRE. L <u>est la fin d'un ensemble prévisible si et seulement si</u> $c^L_{L-}=1$ (cela équivaut à $L^-=L$) .

REMARQUE. La proprosition 4 ne semble pas avoir d'analogue pour les fins d'ensembles bien-mesurables : en tout cas, il est faux que pour une telle fin L, L soit la fin de l'ensemble $\{(t,\omega) : c_t(\omega)=1\}$. AZEMA donne l'exemple suivant : considérons le processus de Markov de translation uniforme avec saut en B



le processus est issu de A, et hésite en B un temps exponentiel avant de se décider pour C ou D, chacun avec probabilité 1/2. Soit alors L l'instant de dernier passage en C : c'est une fin d'ensemble bien-mesurable, et on a $c_t \leq 1/2$ pour tout $t \geq 0$. Si l'on y réfléchit, ce n'est pas tout à fait étonnant : il y a moins d'information dans c^L que dans w^L (processus qui, lui, détermine L, fin de S^W_L) .

REMARQUE. Soit L la fin d'un ensemble prévisible, et soit M une variable aléatoire positive quelconque.
Si l'on a $c^L \leq c^M$, on a $c^L_- \leq c^M_-$ et $L=L^- \leq M^- \leq M$.
Si l'on a $c^L=c^M$, on a $p^M=p^L$, donc $M \leq M^+=L^+=L$, et donc l'égalité.

REMARQUE. La proposition 4 entraîne bien que, si L est la fin d'un ensemble prévisible, toute l'information concernant L est contenue dans la surmartingale c. En effet, plaçons nous à l'instant t, et introduisons la variable aléatoire $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable

$$L_t = \sup \{ s \leq t \ : \ c_{s-}=1 \}$$

Nous avons pour $a \geq t$ $P\{L>a|\underline{\underline{F}}_t\} = E[c_a|\underline{\underline{F}}_t]$, et pour $a<t$

$$(8) \qquad P\{L>a|\underline{\underline{F}}_t\} = P\{L>t|\underline{\underline{F}}_t\} + P\{a<L\leq t|\underline{\underline{F}}_t\}$$
$$= c_t + P\{ a \leq L_t \ , \ L \leq t|\underline{\underline{F}}_t \}$$
$$= c_t + (1-c_t)I_{\{L_t \leq a\}}$$

ainsi, toute la loi conditionnelle de L par rapport à $\underline{\underline{F}}_t$ peut se déduire de la loi du processus c^L . Il faut noter l'allure de l'estimation de L à l'instant t : probabilité $1-c_t$ pour que le "phénomène" ait eu lieu à l'instant L_t précisément (estimation exacte) , probabilité c_t pour qu'il n'ait pas encore eu lieu, avec estimation " floue" vers l'avant .

DEUX PETITS RESULTATS

1) Lorsque L est une fin d'ensemble prévisible, AZEMA indique comment on peut obtenir la décomposition de p^L en sa partie continue et sa partie discontinue.

L est la fin de l'ensemble fermé à gauche $\{c_-=1\}=U$: cet ensemble porte p^L, et il est donc possible d'épuiser les sauts de p^L au moyen d'une suite de temps d'arrêt prévisibles T dont le graphe passe dans U. Si T est un tel temps, on a $p^L_T - p^L_{T-} = c^L_{T-} - E[c^L_T|\underline{\underline{F}}_{T-}] = c^L_{T-} - \bar{c}^L_T$, $\bar{c}^L$ désignant la projection prévisible de c^L . Le graphe de T passant dans U, on a simplement $p^L_T - p^L_{T-} = 1-\bar{c}^L_T$.

Ainsi, l'ensemble des sauts de p^L est identique à l'ensemble $\{\, c^L_- <1,\ \bar{c}^L=1\,\}$. L'ensemble $\{c^L_- \neq 1\}$ est de toute façon négligeable pour p^L, et on en déduit que

<u>La partie discontinue de</u> p^L <u>est</u> $I_{\{\bar{c}^L<1\}}.p^L$

Lorsque la famille de tribus est quasi-continue à gauche, les ensembles $\{\bar{c}^L<1\}$ et $\{c^L<1\}$ ne diffèrent que par une réunion de graphes de temps d'arrêt totalement inaccessibles, donc un ensemble p^L-négligeable. La partie discontinue de p^L est donc simplement $I_{\{c<1\}}.p^L$.

2) Supposons que L soit la fin d'un ensemble prévisible, et que l'on ait pour tout temps d'arrêt prévisible T (en particulier pour $T=+\infty$)

(9) $$P\{L=T>0\}=0$$

alors le processus croissant p^L ne peut avoir de saut qu'en 0. Nous l'écrivons $p^L_s = P\{L=0|\underline{\underline{F}}_0\} + q_s$ ($s\geq 0$) où q est croissant, continu et nul en 0. Nous avons

$$E[\int_0^\infty e^{-\lambda q_s}\,\varepsilon_L(ds)|\underline{\underline{F}}_0] = E[\int_{[0,\infty]} e^{-\lambda q_s}\,dp^L_s\,|\underline{\underline{F}}_0\,]$$

$$= P\{L=0|\underline{\underline{F}}_0\} + E[\int_0^\infty e^{-\lambda q_s}\,dq_s|\underline{\underline{F}}_0]$$

Le premier membre vaut $E[e^{-\lambda q_L}|\underline{\underline{F}}_0]$, mais L est la fin d'un ensemble prévisible, et p^L (donc aussi q) ne croît donc plus après L, et $q_L=q_\infty$. L'intégrale au second membre vaut $\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda q_\infty})$, puisque q_s est croissant, continu et nul en 0. Il en résulte

(10) $$E[e^{-\lambda q_\infty}|\underline{\underline{F}}_0] = \frac{1+\lambda P\{L=0|\underline{\underline{F}}_0\}}{1+\lambda}$$

On en déduit, en inversant la transformation de LAPLACE, la loi conditionnelle de q_∞ relativement à $\underline{\underline{F}}_0$: c'est $P\{L=0|\underline{\underline{F}}_0\}\varepsilon_0 + (1-P\{L=0\,|\underline{\underline{F}}_0\})\ell$ (ℓ, loi exponentielle de paramètre 1).

Ce résultat généralise un résultat bien connu de S.WATANABE sur les temps d'arrêt totalement inaccessibles.

§ 2 . LA "THEORIE RELATIVE"

On est souvent amené, en théorie des processus , à faire une construction du type suivant (cf. la " théorie relative du potentiel" dans le livre de BLUMENTHAL et GETOOR , et le travail de H.FÖLLMER exposé dans le dernier volume du séminaire).

On forme l'ensemble $\Omega^* = \bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, muni de sa tribu produit naturelle ; on note π la projection de Ω^* sur Ω, et ζ la projection sur $\bar{\mathbb{R}}_+$. Si Y est une v.a. sur Ω, on convient de noter aussi Y (si cela ne crée pas trop de confusion) la v.a. $Y \circ \pi$ sur Ω^*. Dans ces conditions, il est tout naturel de noter $\underline{\underline{F}}_t$ la tribu sur Ω^* dont les fonctions mesurables sont les $Y \circ \pi$, où Y sur Ω est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable. On munit Ω^* d'une loi P^* dont la projection sur Ω est absolument continue par rapport à P, et on complète la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ de la manière usuelle. Il n'y a aucune difficulté à montrer qu'un processus bien-mesurable (prévisible) par rapport à la famille complétée $(\underline{\underline{F}}_t^*)$ est indistinguable, pour P^* , d'un processus de la forme $(X_t \circ \pi)$, où X est bien-mesurable (prévisible) par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$.

On introduit maintenant une seconde famille de tribus , celle qui est due à BLUMENTHAL et GETOOR, p.105-106

$$\underline{\underline{G}}_t^* = \{ A \in \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \times \underline{\underline{F}} \ : \ \exists \ A_t \in \underline{\underline{F}}_t^* \ , \ A \cap \{t<\zeta\} = A_t \cap \{t<\zeta\} \ \}$$

Dans les cas les plus fréquents, la loi P^* est de la forme

$$E^*[Z] = E[\int_{[0,\infty]} Z_s db_s] \quad (\text{Z mesurable positive sur } \Omega^*)$$

(b_s) étant un processus croissant sur Ω, et on se propose d'étudier l'espace probabilisé $(\Omega^*, P^*, (\underline{\underline{G}}_t^*))$, et de rattacher ses propriétés à celles de $(\Omega, P, (\underline{\underline{F}}_t))$. Noter que si l'on pose

$$E[b_\infty - b_t | \underline{\underline{F}}_t] = c_t$$

on a aussi $P^*\{\zeta > t | \underline{\underline{F}}_t^*\} = c_t \ (= c_t \circ \pi)$.

Cette théorie n'est pas particulièrement agréable : les notations sont lourdes, il y a de multiples identifications... nous allons revenir aux idées plus simples du paragraphe précédent. En appliquant la théorie qui va suivre à $(\Omega^*, P^*, (\underline{\underline{F}}_t^*), (\underline{\underline{G}}_t^*), \zeta)$, et en gardant en mémoire la correspondance entre $\underline{\underline{F}}_t^*$ sur Ω^* et $\underline{\underline{F}}_t$ sur

Ω, on obtiendra sans fatigue des résultats valables pour la situation précédente. Nous écrirons L et non ζ : c'est la seule différence de notation appréciable.

NOTATIONS. Celles du paragraphe 1. On ne suppose pas que L soit la fin d'un ensemble prévisible. On désigne par $\underline{\underline{G}}_\infty$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_\infty$ et L, et on pose

(11) $\qquad \underline{\underline{G}}_t = \{ A\in\underline{\underline{G}}_\infty \ : \ \exists\ A_t\in\underline{\underline{F}}_t \ , \ A\cap\{t<L\}=A_t\cap\{t<L\} \}$

Noter : que $\underline{\underline{F}}_t\subset\underline{\underline{G}}_t$; que la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$ satisfait aux conditions habituelles ; que L est un temps d'arrêt de cette famille. On n'a cependant pas défini $(\underline{\underline{G}}_t)$ comme la plus petite famille de tribus possédant ces propriétés ; il faut plutôt concevoir $(\underline{\underline{G}}_t)$ de la manière suivante : à partir de l'instant L, les lumières sont éteintes et on ne peut plus faire aucune observation (bien qu'il continue à se produire beaucoup d'événements dans le noir). On se borne donc à constater que l'événement A est antérieur à t sur les trajectoires qui sont encore éclairées à cet instant.

Nous noterons $\bar{L}$ la variable aléatoire

(12) $\qquad \bar{L} = \inf \{ t \ : \ c_t^L=0 \}$

Nous avons $E[c_{\bar{L}} \ ,\bar{L}<\infty]=0$, donc $p_{\bar{L}}^L = p_\infty^L$, et enfin $\bar{L}\geqq L^+\geqq L$ (prop.2). $\bar{L}$ est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ qui majore L, et inversement, si T est un tel temps d'arrêt, $]T+\varepsilon,\infty[$ est prévisible et négligeable pour ε_L, donc pour dp^L, donc $p_T^L=p_\infty^L$ et $c_T=0$, de sorte que $T\geqq\bar{L}$.

[Bien entendu, $\bar{L}$ peut aussi être défini comme la borne inférieure essentielle des temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$ majorant L].

LEMME 1 . <u>Soit</u> T <u>un temps d'arrêt de la famille</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$, <u>et soit</u> $\bar{T}$ <u>le plus petit temps d'arrêt de</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>majorant</u> T <u>sur</u> $\{T\leqq L\}$. <u>On a alors</u> $T=\bar{T}$ <u>sur</u> $\{T<L\}$, $\bar{T}\leqq\bar{L}$ <u>partout</u>.

<u>Si</u> T <u>est prévisible, il existe un temps d'arrêt prévisible</u> T' <u>de</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>tel que</u> T=T' <u>sur</u> $\{T\leqq L\}$, $T\leqq T'$ <u>partout</u>.

DEMONSTRATION. 1) Il suffit de démontrer le résultat suivant : si S est un temps d'arrêt, $S\leqq L$, et si $\bar{S}$ est le plus petit temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$ majorant S, alors $S=\bar{S}$ sur $\{S<L\}$. On appliquera cela à $S=T\wedge L$, et comme $\bar{T}\leqq\bar{S}$, $T\leqq\bar{T}$ sur $\{T<L\}$, on aura bien sur $\{T<L\}$ l'égalité $T=\bar{T}$ (l'inégalité $\bar{T}\leqq\bar{L}$ est évidente).

Nous commençons par supposer que S est de la forme

$S=a$ sur A , $S=L$ sinon ($A \in \underline{\underline{G}}_a$, $A \subset \{a<L\}$)

nous choisissons alors A' tel que $A \in \underline{\underline{F}}_a$, $A=A\cap\{a<L\}=A'\cap\{a<L\}$, et nous posons

$S'=a$ sur $A'\cap\{a<\bar{L}\}$, $S'=\bar{L}$ sinon

nous avons alors $S=S'$ sur $\{S<L\}$, donc aussi $S=\bar{S}$ sur $\{S<L\}$. Et maintenant nous remarquons que tout temps d'arrêt $S\leq L$ est enveloppe inférieure d'une suite de tels temps d'arrêt "élémentaires" (approcher S par des étagés, et tronquer à L).

Si maintenant T est prévisible pour $(\underline{\underline{G}}_t)$, choisissons une suite (T_n) annonçant T. Les temps d'arrêt $\bar{T}_n$ croissent vers une limite S. On pose alors

$T'=S$ si $\bar{T}_n<S$ pour tout n (événement qui appartient à $\bigvee_n \underline{\underline{F}}_{\bar{T}_n}$)

$T'=+\infty$ sinon

alors T' est prévisible , et $T'=T$ sur $\{T\leq L\}$.

COROLLAIRE. <u>Si</u> $A \in \underline{\underline{G}}_T$, <u>il existe</u> $\bar{A} \in \underline{\underline{F}}_{\bar{T}}$ <u>tel que</u> $A\cap\{T<L\}=\bar{A}\cap\{T<L\}$. <u>Si</u> T <u>est prévisible</u>, <u>et</u> $A \in \underline{\underline{G}}_{T-}$, <u>il existe</u> $\bar{A} \in \underline{\underline{F}}_{T'-}$ <u>tel que</u> $A\cap\{T\leq L\}= \bar{A}\cap\{T\leq L\}$.

DEMONSTRATION. Soit $S=T_A$; alors $\bar{S}=S=T$ sur $\{T_A<L\}=A\cap\{T<L\}$, et il suffit de prendre $\bar{A}=\{\bar{S}=\bar{T}\}$. Le cas prévisible se traite de même.

Dans l'énoncé suivant, nous notons c_- le processus (c^L_{s-}), et $\{c_-=0\}$ l'ensemble $\{(s,\omega) : c^L_{s-}(\omega)=0\}$. On note au moyen d'un ^{w} ou d'un ^{p} les opérateurs de projection bien-mesurable ou prévisible de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$.

PROPOSITION 5. <u>Soit</u> X <u>un processus mesurable borné</u>

1) <u>Si</u> X <u>est bien-mesurable par rapport à la famille</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$, <u>il existe un processus</u> $\bar{X}^w$, <u>bien-mesurable par rapport à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>tel que</u>

(13) $$X=\bar{X}^w \text{ sur }]-\infty,L[\quad , \quad \bar{X}^w=0 \text{ sur } \{c=0\}$$

<u>Ce processus est unique, et donné par la formule</u>

(14) $$\bar{X}^w = \frac{1}{c}(XI_{]-\infty,L[})^w$$

2) <u>De même</u>, <u>si</u> X <u>est prévisible pour</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$, <u>il existe</u> $\bar{X}^p$ <u>prévisible pour</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>unique</u> , <u>tel que</u>

(15) $$X = \bar{X}^p \text{ sur }]-\infty,L] \quad , \quad \bar{X}^p=0 \text{ sur } \{c_-=0\}$$

$\overline{X}^p$ <u>est donné par la formule</u>

(16) $$\overline{X}^p = \frac{1}{c_-}(XI_{]-\infty,L]})^p$$

DEMONSTRATION. <u>Unicité</u>. Soit Z un processus bien-mesurable pour $(\underline{\underline{F}}_t)$, nul sur $]-\infty,L]$ et sur $\{c=0\}$. Alors Z est évanescent. En effet, cela revient à prouver que si T est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$ tel que $Z_T\neq 0$ sur $\{T<\infty\}$, on a $T=\infty$ p.s.. Or Z est nul sur $]-\infty,L[$, donc $T\geqq L$ sur $\{T<\infty\}$, ce qui entraîne $T\geqq\overline{L}$, donc $c_T=0$ et le résultat.

De même, supposons que Z soit prévisible, nul sur $]-\infty,L]$ et sur $\{c_-=0\}$. Alors $Z.I_{\{c>0\}}$ est évanescent d'après ce qui précède, et $Z=Z.I_{\{c=0,\ c_->0\}}$. L'ensemble $\{Z\neq 0\}$ doit donc être réduit à un graphe de temps d'arrêt prévisible T, tel que $c_T=0$, $c_{T-}>0$ sur $\{T<\infty\}$. Mais $E[c_{T-}-c_T]=P\{L=T\}=0$ puisque Z est nul sur $[L]$. Donc $T=\infty$ p.s. et l'unicité est établie.

<u>Existence</u>. Nous allons traiter seulement le cas bien-mesurable, le cas prévisible étant tout analogue. Il s'agit de vérifier que (14) [avec la convention usuelle 0/0 = 0] définit bien un processus satisfaisant à (13). On peut supposer X nul sur $[L,\infty[$.

Nous commençons par remarquer que c est la projection bien-mesurable (pour $(\underline{\underline{F}}_t)$) du processus $I_{]-\infty,L[}$, ceci signifiant simplement que l'on a, pour tout temps d'arrêt T de $(\underline{\underline{F}}_t)$

$$P\{T<L|\underline{\underline{F}}_T\} = c_T I_{\{T<\infty\}}$$

Ainsi la formule (14) s'écrit $\overline{X}^w = \dfrac{(XI_{]-\infty,L]})^w}{(I_{]-\infty,L]})^w}$. Il est alors évident que le numérateur est nul là où le dénominateur s'annule, et donc que $\overline{X}^w=0$ sur $\{c=0\}$. Reste à voir que $\overline{X}^w=X$ sur $]-\infty,L[$. Il suffit de montrer que $\overline{X}^w_S=X_S$ p.s. pour tout temps d'arrêt S de la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$, sur $\{S<L\}$. D'après le lemme 1, cela revient à établir la même propriété pour le temps d'arrêt $\overline{S}$ de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. Or d'après le corollaire de ce lemme, il existe une v.a. $\underline{\underline{F}}_{\overline{S}}$-mesurable V telle que $X_{\overline{S}}=V$ sur $\{\overline{S}<L\}$; X étant nul sur $[L,\infty[$ on a $X_{\overline{S}}=VI_{\{\overline{S}<L\}}$, donc $E[X_{\overline{S}}|\underline{\underline{F}}_{\overline{S}}]=Vc_{\overline{S}}$ et

$$\frac{E[X_{\overline{S}}|\underline{\underline{F}}_{\overline{S}}]}{c_{\overline{S}}} = V = X_{\overline{S}} \quad \text{sur } \{\overline{S}<L\}$$

Autrement dit, en tenant compte de la définition de l'opérateur de projection bien-mesurable, $\overline{X}^w_{\overline{S}} = X_{\overline{S}}$ sur $\{\overline{S}<L\}$. cqfd.

REMARQUE. Les applications $X \mapsto \overline{X}^w$ ou $\overline{X}^p$ peuvent se "dualiser". Soit A un processus croissant intégrable de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. A tout processus bien-mesurable $X \geq 0$ de la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$ associons le nombre $E[\int_0^\infty \overline{X}_s^w dA_s]$. Nous définissons ainsi une mesure ≥ 0 sur la tribu bien-mesurable de $(\underline{\underline{G}}_t)$, qui ne charge pas les ensembles évanescents. Autrement dit, il existe un processus croissant de la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$, que nous noterons $\hat{A}^w$, tel que

$$(17) \qquad E[\int_0^\infty X_s d\hat{A}_s^w] = E[\int_0^\infty \overline{X}_s^w dA_s]$$

Le calcul de $\hat{A}^w$ n'est pas difficile : il ne charge pas $[L,\infty[$, et sur $]-\infty,L]$ on a $\hat{A}_t^w = \int_0^t \frac{1}{c_s} dA_s$.

On définit de manière analogue, si A est prévisible, un processus croissant prévisible de la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$, noté $\hat{A}^p$, tel que l'on ait pour tout X prévisible de la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$ $E[\int_0^\infty X_s d\hat{A}_s^p] = E[\int_0^\infty \overline{X}_s^p dA_s]$.

Nous passons maintenant à un calcul d'espérances conditionnelles par rapport à la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$. Le résultat suivant est l'analogue, en théorie générale des processus, d'un théorème sur les processus de Markov qui figure dans " Birth and death of Mkv processes" (MEYER-SMYTHE-WALSH : Proc. 6-th Berkeley Symposium).

LEMME 2. <u>Soit X une v.a. $\underline{\underline{G}}_t$-mesurable positive, et soit Y une v.a. $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable positive telle que</u> $X=Y$ <u>sur</u> $\{t<L\}$. <u>Alors si</u> $s<t$

$$(18) \qquad E[XI_{t<L}|\underline{\underline{G}}_s] = \frac{1}{c_s} I_{\{s<L\}} E[c_t Y|\underline{\underline{F}}_s]$$

DEMONSTRATION. On peut supposer que $X=0$ sur $\{t \geq L\}$; alors $X = XI_{\{t<L\}} = YI_{\{t<L\}}$. Soit ϕ une fonction $\underline{\underline{G}}_s$-mesurable ≥ 0. Il existe une fonction ϕ_s, $\underline{\underline{F}}_s$-mesurable ≥ 0, telle que $\phi = \phi_s$ sur $\{s<L\}$. On a $E[\phi XI_{\{t<L\}}] = E[\phi_s XI_{\{t<L\}}] = E[\phi_s YI_{\{t<L\}}] = E[\phi_s Y c_t]$ (on a pris une espérance conditionnelle par rapport à $\underline{\underline{F}}_t$). On conditionne maintenant par $\underline{\underline{F}}_s$:

$$= E[\phi_s E[Yc_t|\underline{\underline{F}}_s]] = E[\phi_s c_s \frac{E[Yc_t|\underline{\underline{F}}_s]}{c_s}] \quad (E[Yc_t|\underline{\underline{F}}_s]=0 \text{ sur } \{c_s\}=0)$$

$$= E[\phi_s I_{\{s<L\}} \frac{E[Yc_t|\underline{\underline{F}}_s]}{c_s}] = E[\phi I_{\{s<L\}} \frac{E[Yc_t|\underline{\underline{F}}_s]}{c_s}] \quad \text{cqfd}$$

PROPOSITION 6. <u>Soit</u> X <u>un processus positif, nul sur</u> $[L,\infty[$, <u>bien-mesurable pour la famille</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$. <u>Alors</u> X <u>est une surmartingale de la famille</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$ <u>si et seulement si</u> $c\overline{X}^w$ <u>est une surmartingale de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$.

DEMONSTRATION. Nous avons $\overline{X}^w_t = X_t$ sur $\{t<L\}$. Le lemme 2 nous donne

$$E[X_t|\underline{\underline{G}}_s] = \frac{1}{c_s} I_{\{s<L\}} E[c_t \overline{X}^w_t | \underline{\underline{F}}_s]$$

tandis que

$$X_t = \frac{1}{c_s} I_{\{s<L\}} c_s \overline{X}^w_s$$

ainsi ($c\overline{X}^w$ surmart.) => (X surmart.) . Inversement, si X est une surmartingale , on a $c_s\overline{X}^w_s \leqq E[c_t\overline{X}^w_t|\underline{\underline{F}}_s]$ sur l'ensemble $\{c_s>0, s<L\}$. Les deux membres étant des fonctions $\underline{\underline{F}}_s$-mesurables, l'inégalité a lieu sur le plus petit ensemble $\underline{\underline{F}}_s$-mesurable contenant $\{c_s>0, s<L\}$, c'est à dire $\{c_s>0\}$. Elle a évidemment lieu aussi sur $\{c_s=0\}$, et la proposition est établie.

Nous arrêtons ici l'exposé de la " théorie relative" : il y a d'autres résultats, mais on ne peut encore dire lesquels s'avéreront importants par la suite. Voir aussi l'article de FÖLLMER " the exit measure of a supermartingale" (Z.f.W., 1972).

§ 3 . ENSEMBLES ADMISSIBLES ET REDUITES

Nous commencerons par remarquer que tout processus croissant (C_t) - continu à droite ou non - qui est progressivement mesurable par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, est aussi bien-mesurable : le processus croissant (C_{t+}) est en effet continu à droite, et le processus $(C_{t+}-C_t)$ s'exprime aisément en termes de temps d'arrêt.

DEFINITION. Un processus <u>admissible</u> est un processus croissant (C_t), progressivement mesurable (donc bien-mesurable) tel que $C_t \leqq t$ identiquement.

Deux exemples particulièrement intéressants : nous considérons un ensemble progressivement mesurable U, et nous posons

$$L_t = L^U_t = \sup \{ s<t : s\in U \} \tag{19}$$

ce processus est croissant, adapté, continu à gauche, donc prévisible : il est évidemment admissible. Il en est de même de

$$\overline{L}_t = \overline{L}^U_t = \sup \{ s\leqq t : s\in U \} = L_t \vee tI_U \tag{20}$$

qui est progressif (donc bien-mesurable) si U est progressif, prévisible si U est prévisible.

Les petites remarques qui précèdent ont de très jolies applications à la théorie générale des processus : elles permettent de redémontrer des théorèmes connus, mais fatigants, avec une facilité déconcertante.

L'ensemble $\{(t,\omega) : L_t^U(\omega)=t\}$ est prévisible. Si l'on remarque que tout processus progressif borné (X_t) est limite uniforme de combinaison linéaires d'indicatrices d'ensembles, on peut passer des ensembles aux fonctions et voir que[1]

si X est progressif, le processus $\limsup_{\substack{s\to t\\ s<t}} X_s$ est prévisible

De même, si U est progressif, le processus (L_{t+}^U) est bien-mesurable, donc l'ensemble $\{L_{t+}=t\}$ est b.m. : c'est l'adhérence de U

En passant comme ci-dessus des ensembles aux fonctions :

si X est progressif, le processus $\limsup_{s\to t} X_s$ est b.m..

Enfin, si U est progressif (resp. prévisible) l'ensemble $\{\bar{L}_t=t\}$ est b.m. (resp. prévisible), ce qui nous donne

si X est progressif (resp. prévisible) le processus $\limsup_{\substack{s\to t\\ s\leqq t}} X_s$ est bien-mesurable (resp. prévisible)

PROPOSITION 7. Si Z est bien-mesurable, C admissible, alors Z_C : $(t,\omega)\longmapsto Z_{C_t}(\omega)$ est bien-mesurable. Si Z et C sont prévisibles, Z_C l'est aussi.

DEMONSTRATION. Pour la première assertion, Z peut être supposé continu à droite. Le processus $Z_{C_{t+}}$ est alors continu à droite, et adapté du fait que $C_t\leqq t$, donc b.m.. Il ne diffère de Z_C que sur les graphes des temps d'arrêt de discontinuité de C. Il suffit donc de montrer que pour tout T , Z_{C_T} est $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable. Or c'est la composée de $(s,\omega)\longmapsto Z_{s\wedge T}(\omega)$, $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}_T$-mesurable, et de $\omega\longmapsto(c_T(\omega),\omega)$, mesurable de $\underline{\underline{F}}_T$ dans $\underline{\underline{B}}\times\underline{\underline{F}}_T$.

Dans le cas prévisible, on prend les bons générateurs : $Z_t(\omega) =I_{\{0\}}(t)z(\omega)$ (z $\underline{\underline{F}}_0$-mes.) ou $Z_t(\omega)=I_{]r,\infty]}(t)z(\omega)$ (z $\underline{\underline{F}}_r$-mes.). Regardons par exemple les seconds : $Z_{C_t} = I_{\{C_t>r\}}z = I_{\{C_t>r\}}I_{\{t>r\}}z$ qui est le produit de deux processus prévisibles.[2]

---

[1] Le passage aux processus non bornés est évident !

[2] La condition $C_t\leqq t$ a été essentielle, non la croissance.

BALAYEES ET REDUITES

D'après la thèse de Catherine DOLEANS, il existe une bijection naturelle entre les processus croissants intégrables (resp. les processus croissants intégrables prévisibles) et les mesures sur la tribu bien-mesurable (resp. prévisible) qui ne chargent pas les ensembles évanescents.

Soient A un processus croissant intégrable, C un processus admissible. Nous définissons pour tout processus prévisible borné Z

(21) $$< A^C, Z > = < Z_C , A >$$

où Z_C a été défini plus haut. Alors A^C est une mesure sur la tribu prévisible, qui ne charge pas les ensembles évanescents, donc un processus croissant prévisible. On l'appellera le C-balayé de A. Si C est prévisible, et si A et B sont associés ($A \sim B$: cela signifie que A-B est une martingale), le fait que Z_C est prévisible entraîne $< Z_C, A > = < Z_C, B >$, et donc $A^C = B^C$.

Considérons maintenant une surmartingale X de la classe (D), et formons

$$X \longrightarrow (\text{A prévisible engendrant X}) \longrightarrow A^C \longrightarrow (\text{"potentiel" engendré par } A^C)$$

Le mot potentiel est entre guillemets, car il faut se rappeler que nous travaillons sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, et que A et A^C peuvent avoir un saut à l'infini. Il est facile d'expliciter ce potentiel, qu'on notera X^C :

(22) $$X^C_T = E[\int_0^\infty I_{\{C_s > T\}} dA_s \,|\underline{\underline{F}}_T] \quad (\text{tout t.d'a. } T)$$

(en effet, si $H \in \underline{\underline{F}}_T$, $\int_H X^C_T = < A^C, Z >$, où Z est le processus prévisible $Z_t(\omega) = I_{]T,\infty]}(t,\omega) I_H(\omega)$ - on rappelle que $X^C_\infty = 0$ par convention . Le calcul de Z^C est immédiat, et on applique (21)).

Si C est continu à gauche , la relation $(C_s > t)$ équivaut à $(T_t < s)$, où $T_t = \inf \{ s > t : C_s > t \}$, et on a

(23) $$X^C_t = E[A_\infty - A_{T_t} |\underline{\underline{F}}_t] = E[X_{T_t} |\underline{\underline{F}}_t]$$

Par exemple, si U est un ensemble progressif, le processus admissible $L_t = L^U_t$ est continu à gauche. Posons $D_t = \inf \{s > t : s \in U\}$. La réduite sera notée X^U et on aura , pour tout temps d'arrêt T

(24) $$X^U_T = E[X_{D_T} |\underline{\underline{F}}_T]$$

On utilisera aussi la notation $\mathcal{R}_U X$: cette surmartingale est appelée simplement la <u>réduite de X sur U</u> . Lorsqu'on a un processus de Markov Y, que l'on prend pour U l'ensemble $\{(t,\omega):Y_t(\omega)\in B\}$ (B borélien dans l'espace d'états), pour X la surmartingale $(e^{-\lambda t}u\circ Y_t)$, où u est λ-excessive, alors $\mathcal{R}_U X$ est la surmartingale $(e^{-\lambda t}v\circ Y_t)$, où v est la fonction λ-excessive $P_B^\lambda u$.

Cette définition s'étend aussitôt à des surmartingales qui n'appartiennent pas à la classe (D). Il n'en va pas de même pour la définition suivante.

REDUITE EXTERIEURE

Nous utilisons ici comme processus admissible le processus non continu à gauche

$$\overline{L}_t = \overline{L}_t^U = \sup \{ s\leqq t : s\in U \}$$

La réduite correspondante sera appelée <u>réduite extérieure</u> de X sur U, notée $\overline{X}^U$ ou $\overline{\mathcal{R}}_U X$. On déduit très facilement de (22) que

$$\overline{X}_T^U = X_T^U + E[(A_{D_T}-A_{D_T-})I_{\{D_T>T\}}|\underline{\underline{F}}_T] \tag{25}$$

<u>Justifions le mot de réduite extérieure</u> : comme plus haut, prenons un processus de HUNT (Y_t), un borélien B , et pour X la surmartingale $e^{-\lambda t}u\circ Y_t$, où u est engendrée par une fonctionnelle additive A. Nous prendrons un ensemble U différent

$$U = \{(t,\omega) : t>0,\ Y_{t-}(\omega)\in B \}$$

Posons $T_B' = \inf \{t : t>0,\ Y_{t-}\in B\}$. Il est alors facile de déduire de (22) que $\overline{\mathcal{R}}_U X$ est la surmartingale $e^{-\lambda t}w\circ Y_t$, où

$$w= E^{\cdot}[\int_{(T_B',\infty]} e^{-\lambda s}dA_s] \tag{26}$$

l'intervalle d'intégration est <u>fermé</u> si $T_B'>0$, $Y_{T_B'-}\in B$, <u>ouvert</u> sinon . Si B est ouvert, on a $T_B'=T_B$, et on n'a jamais $Y_{T_B-}\in B$, donc l'intervalle d'intégration est $]T_B,\infty]$, de sorte que $w=P_B^\lambda u$.

Ensuite, supposons que B soit compact. Prenons des ouverts G_n décroissants tels que $G_n\supset B=\cap\overline{G}_n$, et introduisons les fonctions w_n correspondantes : d'après la définition de la réduite extérieure en théorie du potentiel, tout revient à vérifier que w_n converge p.p. vers w. Si $x\notin B\cap\mathrm{irreg}(B)$, T_{G_n} converge vers T_B' P^x-p.s. (la quasi-continuité à gauche n'est pas nécessaire pour cela !) Si $Y_{T_B'-}\in B$, on a $T_{G_n}<T_B'$ pour tout n , et l'intersection des intervalles $]T_{G_n},\infty]^n$ est $[T_B',\infty]=(T_B',\infty]$ P^x-p.s. Si $Y_{T_B'-}\notin B$,

on a nécessairement saut à cet instant, $T_{G_n} = T'_B$ pour n assez grand (la quasi-continuité à gauche n'est pas non plus utilisée ici !) et l'intersection des $]T_{G_n},\infty]$ est $]T'_B,\infty]=(T'_B,\infty]$ P^x-p.s. Donc le passage à la limite est possible dans tous les cas.

Pour traiter le cas où B est borélien quelconque, l'hypothèse de continuité absolue semble nécessaire (elle est utilisée dans la définition même des réduites extérieures). Choisissons des B_n compacts contenus dans B tels que $\overline{P}^{\lambda}_{B_n}u \uparrow \overline{P}^{\lambda}_{B}u$, des B'_n ouverts contenant B tels que $\overline{P}^{\lambda}_{B'_n}u \downarrow \overline{P}^{\lambda}_{B}u$ p.p. (l'existence de tels B_n et B'_n est établie en théorie du potentiel). Introduisons les fonctions w_n et w'_n correspondantes : w et $\overline{P}^{\lambda}_{B}u$ étant comprises entre w_n et w'_n pour tout n, elles sont égales p.p., donc partout.

Il est important de noter que la réduite extérieure peut être définie, en théorie du potentiel , pour des fonctions excessives qui n'appartiennent pas à la classe (D), alors qu'en théorie des processus on ne considère que des surmartingales de la classe (D). AZEMA a annoncé que l'emploi des mesures de FÖLLMER lui permet de lever cette difficulté.

Le théorème suivant est analogue au célèbre théorème de HUNT sur les réduites ordinaires.

PROPOSITION 8 . <u>Si</u> U <u>est prévisible</u>, <u>la plus petite surmartingale</u> Y <u>telle que</u> $Y_- \geqq X_-$ <u>sur</u> U <u>est égale à</u> $\overline{R}_U X$.

DEMONSTRATION. Quitte à transformer l'intervalle $[0,\infty]$ en $[0,1]$, et à prolonger les surmartingales par 0 après 1, nous pouvons supposer que X est un <u>potentiel</u> de la classe (D) : le processus croissant A qui l'engendre n'a pas de saut à l'infini. Soit Y une surmartingale telle que $Y_- \geqq X_-$ sur U . Nous voulons montrer qu'elle majore $\overline{R}_U X = \overline{X}^U$. Quitte à remplacer Y par $Y \wedge X$, nous pouvons supposer que Y est aussi un potentiel de la classe (D), engendré par B. Nous allons montrer que $\overline{Y}^U \geqq \overline{X}^U$, et il suffit de montrer pour cela que $\overline{Y}^U_{t-} \geqq \overline{X}^U_{t-}$ p.s. pour tout t . Or nous avons, en posant $D = \inf \{ s \geqq t : s \in U \}$, début de $U' = U \cap [[t,\infty[[$

$$\overline{X}^U_{t-} = E[\int_0^\infty I_{\{\overline{L}_s \geqq t\}} dA_s | \underline{\underline{F}}_{t-}] = E[\int_{(D,\infty[} dA_s | \underline{\underline{F}}_{t-}]$$

où l'intervalle d'intégration $(D,\infty[$ est $[D,\infty[$ si $D \in U'$, $]D,\infty[$ sinon . On a bien entendu la même formule pour $\overline{Y}^U_{t-}$, avec B au lieu de A.

L'ensemble $U' \setminus]D,\infty[$ est prévisible, c'est un graphe, donc c'est le graphe d'un temps d'arrêt prévisible J. L'ensemble $[D]\setminus[J]=[K]$ est alors un graphe de temps d'arrêt, adhérent à U' pour la topologie droite, mais disjoint de U'. Grâce au théorème de section prévisible, on construit sans peine des temps d'arrêt prévisibles K_n dont le graphe est contenu dans U', qui tendent vers K en décroissant (évidemment par valeurs $>K$). Soit $D_n=J\wedge K_n$: ce sont des temps d'arrêt prévisibles, dont le graphe passe dans U', qui décroissent vers D, sont égaux à D là où $D\in U'$ et strictement supérieurs à D là où $D\notin U'$: l'intervalle $(D,\infty[$ est alors la réunion des intervalles $[D_n,\infty[$, et on a

$$\begin{aligned}\overline{X}^U_{t-} &= \lim_n E[\int_{[D_n,\infty[} dA_s|\underline{\underline{F}}_{t-}]\\ &= \lim_n E[\int_{[D_n,\infty[} dA_s|\underline{\underline{F}}_{D_n-}|\underline{\underline{F}}_{t-}]\\ &= \lim_n E[X_{D_n-}|\underline{\underline{F}}_{t-}]\end{aligned}$$

et une formule analogue pour $\overline{Y}^U_{t-}$. Mais le graphe de D_n passe dans U , et on a donc $X_{D_n-}\leqq Y_{D_n-}$, d'où aussitôt le résultat désiré.

Inversement, a t'on $\overline{X}^U_-\geqq X_-$ sur U ? D'après le théorème de section prévisible, il suffit de montrer que $\overline{X}^U_{T-}\geqq X_{T-}$ p.s. si T est prévisible et passe dans U. Mais

$$\overline{X}^U_{T-}=E[\int_0^\infty I_{\{L_s\geqq T\}}dA_s|\underline{\underline{F}}_{T-}]=E[A_\infty-A_{T-}|\underline{\underline{F}}_{T-}]=X_{T-}$$

et on a même l'égalité sur U.

REMARQUE. Il y a une relation entre la théorie des réduites sur un ensemble admissible, et la théorie relative du § 2 . Reprenons les notations de l'introduction du § 2 . X étant une surmartingale de la classe (D), engendrée par A, munissons Ω^* de la loi P^* ainsi définie

$$E^*[Z]=\frac{1}{E[X_0]}E[\int_0^\infty Z_s dA_s]$$

(Z, fonction mesurable $\geqq 0$ sur Ω^*). Un processus admissible C peut être considéré comme une variable aléatoire positive L sur Ω^* , la condition $C_t\leqq t$ s'écrivant $L\leqq\zeta$.

On a maintenant :

(27) $$P^*\{L>t\mid\underline{\underline{G}}^*_t\}=\frac{X^C_t}{X_t}I_{\{t<\zeta\}}\qquad P^*\text{-p.s.}$$

(comme d'habitude, on écrit X_t , X^C_t pour $X_t\circ\pi$, $X^C_t\circ\pi$). Démontrons cette formule.

Soit ϕ une fonction $\underline{\underline{G}}_t^*$-mesurable positive, et soit ϕ_t une fonction $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable positive égale P^*-p.s. à ϕ sur $\{t<\zeta\}$. Nous avons, du fait que $L\leqq\zeta$

$$E^*[\phi,\ t<L]= E^*[\phi_t,\ t<L] = \int_{\Omega^*} \phi_t(\omega)I_{\{C_s(\omega)>t\}}\ dP^*(s,\omega)$$

$$= \frac{1}{E[X_0]}E[\ \int_0^\infty \phi_t(\omega)I_{\{C_s(\omega)>t\}}dA_s(\omega)]$$

$$= \frac{1}{E[X_0]}\ E[\phi_t X_t^C] = E^*[\phi_t\ \frac{X_t^C}{X_t}I_{\{t<\zeta\}}] \qquad (0/0=0)$$

$$= E^*[\ \phi\ \frac{X_t^C}{X_t}\ I_{\{t<\zeta\}}]$$

ce qui est la formule désirée. AZEMA étudie, et exploite, les relations de ce genre entre la théorie des réduites et la théorie relative. A ce propos, il faut noter aussi la jolie formule $P^*\{t<\zeta|\underline{\underline{F}}_t\} = X_t$. Ici encore, l'introduction de la mesure de FÖLLMER permettrait de raisonner sur des surmartingales qui n'appartiennent pas à la classe (D).

P.A.Meyer
I.R.M.A.
Laboratoire Associé au CNRS
7 rue René Descartes, 67-Strasbourg