Elisabeth Khalili-Françon

Processus de Galton-Watson

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 122-135
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__122_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

1972-73

PROCESSUS DE GALTON-WATSON

E. Khalili-Françon

I. Introduction

Dans ces notes on s'intéresse plus spécialement à des lois de probabilité conditionnelles associées à un processus de Galton-Watson unitypique.

Précisément, on considère un processus stochastique $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ ayant les propriétés suivantes :

(1) $X_o = 1$

(2) $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ est une suite de Markov homogène dont les états sont les entiers naturels. Si P représente la mesure de probabilité associée au processus, $P(X_1=i) = p_i$ $(i=0,1,2,\dots)$, $p_i \neq 1$ pour tout i et $p_o+p_1<1$.

(3) Les probabilités de transition $P_{ij} = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$ $(n=0,1,2,\dots)$ vérifient

$$P_{oo} = 1 \quad \text{et} \quad P_{oj} = 0 \quad (j=1,2,\dots)$$

$$P_{ij} = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_i=j} p_{k_1}\, p_{k_2} \cdots p_{k_i} \quad (i=1,2,\dots \quad \text{et} \quad j=1,2,\dots)$$

Comme d'ordinaire dans l'étude des processus de Galton-Watson le vocabulaire utilisé ici s'inspire d'une interprétation simple de ces processus qui rappelle le problème de l'extinction des noms de famille : la variable aléatoire X_n est interprétée comme la taille de la n-ième génération de particules descendant de l'ancêtre unique X_o ; il y a extinction du processus lorsque $X_n=0$.

On sait que les propriétés d'un processus de Galton-Watson dépendent essentiellement de la valeur de la moyenne $m = E(X_1)$ par rapport à l'unité et, suivant que m est inférieur, égal ou supérieur à 1, le processus est dit infracritique, critique ou supracritique ; le processus est explosif si m est infinie. Ainsi, la solution du problème fondamental, celui du comportement asymptotique de X_n, diffère suivant ces cas :

- dans les cas infracritiques ou critiques, X_n converge presque sûrement vers zéro lorsque $n \to \infty$. (Voir par exemple Harris [2]).
- dans le cas supracritique, c'est la variable aléatoire normée $\frac{X_n}{E(X_n)}$ qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire (dégénérée dans certains cas). De plus, pour une suite convenable $\{c_n, n = 0,1,2,\dots\}$, $\frac{X_n}{c_n}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire non dégénérée. (Seneta [16], Heyde [5]). C'est à la variable aléatoire $\frac{X_n}{c_n}$ plutôt qu'à X_n qu'on s'intéressera de préférence dans certains problèmes.
- Dans le cas explosif, avec une hypothèse faible sur la distribution de X_1, pour un $b > 1$, la variable aléatoire $\frac{\mathrm{Log}(1+X_n)}{b^n}$ converge en loi lorsque $n \to \infty$. (Darling [1]).

Principalement dans les cas infracritiques et critiques, où l'étude de la limite de la loi de X_n a moins d'intérêt, un autre problème très étudié est celui du comportement asymptotique de la distribution conditionnelle de X_n sachant que le processus n'est pas éteint à la n-ième génération. Ainsi, dans le cas critique, si la variance de X_1 (notée σ^2) est finie, la loi conditionnelle de $\frac{X_n}{n} \cdot \frac{2}{\sigma^2}$ sachant que $X_n > 0$, tend vers une loi exponentielle : c'est le très connu théorème de Yaglom [18].

L'étude de la distribution conditionnelle de X_n sachant qu'à un instant $n' > n$ le processus n'est pas éteint, donne également des résultats intéressants : dans le cas critique, avec une variance σ^2 finie, lorsque $n' \to \infty$ puis $n \to \infty$, la loi conditionnelle de $\frac{X_n}{n} \cdot \frac{2}{\sigma^2}$ sachant que $X_{n'} > 0$, tend vers une loi gamma d'ordre 2, carré de convolution de la loi exponentielle qui apparait dans le théorème de Yaglom. Dans la suite ce résultat est cité sous le nom de théorème de Harris [2].

Les théorèmes de Yaglom et de Harris mettent en évidence l'existence d'une relation entre les limites des lois conditionnelles de la forme $\mathcal{L}(X_n|X_n>0)$ et $\mathcal{L}(X_n|X_{n'}>0)$ dans le cas critique. Il est naturel de s'interroger sur l'existence d'une relation du même genre entre ces lois dans les cas non critiques : dans cet exposé, on se propose de comparer les lois de la forme $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{L}(X_n|X_n>0)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} (\lim\limits_{n'\to\infty} \mathcal{L}(X_n|X_{n'}>0))$; on s'intéressera également à la loi intermédiaire, de la forme $\lim\limits_{n'\to\infty} \mathcal{L}(X_n|X_{n'}>0)$. Suivant les cas la variable aléatoire X_n pourra être remplacée par $\frac{X_n}{n}\cdot\frac{2}{\sigma^2}$, $\frac{X_n}{c_n}$ ou $\frac{\mathrm{Log}(1+X_n)}{b^n}$.

Dans une première partie (paragraphe III), la proposition 1 affirme, que, <u>dans tous les cas</u>, les lois de la forme $\lim\limits_{n'\to\infty} \mathcal{L}(X_n|X_{n'}>0)$ coïncident avec celles de processus de Galton-Watson avec immigration. (Il s'agit de processus de Galton-Watson unitypiques dans lesquels, à chaque génération et avec la même loi, vient s'ajouter un nombre aléatoire de particules du même type et se reproduisant de la même façon que les particules déjà existantes).

Les paragraphes IV à VI précisent quelle relation simple lie les lois $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{L}(X_n|X_n>0)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} (\lim\limits_{n'\to\infty} \mathcal{L}(X_n|X_{n'}>0))$ dans les différents cas.

II. Notations

Soit $f(s) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i s^i$, pour $|s| \le 1$, la fonction génératrice de la variable X_1. On sait que la fonction génératrice de X_n est alors f_n, la n-ième itérée de f pour $n=1,2,\ldots$, et $f_0(s)=s$.

Soit q la probabilité d'extinction du processus ; c'est la plus petite raciene de l'équation $s=f(s)$, et $q=1$ seulement dans les cas infra-critiques ou critiques. De plus, la suite $\{f_n(s),\ n=0,1,2,\ldots\}$ croit vers q pour $0\le s<q$ et décroit vers q pour $q<s\le 1$.

Les distributions conditionnelles de X_n sont étudiées par l'intermédiaire des fonctions génératrices $y_n(s) = E\{s^{X_n}|X_n>0\}$ et $h_{nn'}(s)=E\{s^{X_n}|X_{n'}>0\}$ $(s\in[0,1],\ n=0,1,2,\ldots)$. Le calcul montre que, dans tous les cas, ces fonctions génératrices s'expriment en fonction de $f(s)$ par

$$y_n(s) = \frac{f_n(s) - f_n(0)}{1 - f_n(0)}$$

et

$$h_{nn'}(s) = \frac{f_n(s) - f_n(f_{n'-n}(0)s)}{1 - f_{n'}(0)} \ . \tag{II.1}$$

Rappelons enfin la forme de la fonction génératrice d'un processus de Galton-Watson avec immigration : si les lois de reproduction et d'immigration qui caractérisent un processus avec immigration ont respectivement pour fonction génératrices $a(s)$ et $b(s)$, alors la fonction génératrice de la taille de la n-ième génération est de la forme

$$P_n(s) = a_n(s) \prod_{j=o}^{n-1} b(a_j(s)) \qquad s \in [0,1], \ n = 0,1,2,\ldots,$$

$a_n(s)$ étant la n-ième itérée de $a(s)$. La fonction génératrice

$$Q_n(s) = s \prod_{j=o}^{n-1} b(a_j(s)) \qquad s \in [0,1], \ n = 0,1,2,\ldots,$$

décrit également un processus avec immigration. Il est facile de vérifier que $P_n(s)$ et $Q_n(s)$ ont même comportement à l'infini.

III. Distribution de X_n conditionnellement à la non extinction

On nomme dans la suite "distribution de X_n conditionnellement à la non extinction" la limite de la loi conditionnelle $\mathcal{L}(X_n | X_{n'} > 0)$ lorsque $n' \to \infty$. Cette limite existe d'après la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - (i) Dans un processus de Galton-Watson infracritique ou critique, la loi de X_n, conditionnellement à la non extinction du processus, coïncide avec celle d'un processus de Galton-Watson avec immigration dans lequel la loi d'immigration, de fonction génératrice $\frac{f'(s)}{m}$, est liée à la loi de reproduction de fonction génératrice $f(s)$.

(ii) Dans un processus de Galton-Watson supracritique ou explosif, la loi de X_n conditionnellement à la non extinction du processus coïncide avec celle d'un processus de Galton-Watson avec immigration, dans lequel, si la loi de reproduction a pour fonction génératrice $f(s)$, la loi d'immigration a pour fonction génératrice $\frac{f(s)-f(qs)}{s-qs}$.

DEMONSTRATION. - Pour démontrer (i) il suffit de décomposer l'expression de $h_{nn'}(s)$ dans l'expression (II.1) sous la forme

$$h_{nn'}(s) = \frac{f_n(s)-f_n(f_{n'-n}(0)s)}{s-f_{n'-n}(0)s} \cdot \frac{1-f_{n'-n}(0)}{1-f_n(f_{n'-n}(0))} \cdot s$$

et de remarquer que, lorsque $n'\to\infty$, $f_{n'-n}(0)$ tend vers 1, le premier facteur vers $f_n'(s)$ et le second facteur vers $\frac{1}{f_n'(1-)} = \frac{1}{m^n}$. D'autre part, la dérivation par rapport à s de $f_n(s) = f_{n-1}\circ f(s)$ donne

$$f_n'(s) = \prod_{j=o}^{n-1} f'(f_j(s))$$

d'où la conclusion

$$\lim_{n'\to\infty} h_{nn'}(s) = s\prod_{j=o}^{n-1} \frac{f'(f_j(s))}{m} \qquad s\in[0,1],\ n\geq 1\,.$$

La démonstration de (ii) à partir de l'expression de $h_{nn'}(s)$ dans (II.1) est immédiate : si $q<1$,

$$\lim_{n'\to\infty} h_{nn'}(s) = s\prod_{j=o}^{n-1} b(f_j(s)) \qquad s\in[0,1],\ n\geq 1$$

avec $b(s) = \frac{f(s)-f(qs)}{s-qs}$.

La première partie de cette proposition, démontrée dans [9], est en fait implicitement contenue dans des résultats de Lamperti et Ney [11] et mise en évidence récemment par Kiyoshi et Watanabe [10] ; Pakes [13] l'a déduite, sous cette même forme, de raisonnements approchants de Seneta et Vere-Jones [15].

IV. Limite de la distribution de X_n conditionnellement à la non extinction ; cas infracritique

Dans le but d'étudier comparativement les lois conditionnelles de la forme $\mathcal{L}(X_n|X_n>0)$ et $\mathcal{L}(X_n|X_{n'}>0)$ $(n'>n\geq 0)$, rappelons tout d'abord le théorème de Yaglom [18]. (Pour une démonstration simple avec les hypothèses minimales voir Joffe [6], Heathcote, Seneta et Vere-Jones [4]) :

Théorème de Yaglom relatif au cas infracritique : Dans un processus de Galton-Watson infracritique, pour tout $i=1,2,\ldots$

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=i|X_n>0) = \pi_i$$

et $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1$.

En d'autres termes, si $y_n(s) = E\{s^{X_n}|X_n>0\}$, la limite $g(s) = \lim_{n\to\infty} y_n(s)$ existe pour tout $s\in[0,1]$ et est une fonction génératrice. De plus, $g(s)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$1-g\circ f(s) = m(1-g(s)),$$

la dérivée $g'(1-)$ est finie si et seulement si $E(X_1\log X_1)$ est finie. Cette dernière affirmation est établie par [4] qui précisent que, lorsque $n\to\infty$, $\Phi_n(s) = \frac{1-f_n(s)}{m^n}$ tend vers une limite $\Phi(s)\geq 0$ pour tout $s\in[0,1]$, avec l'équivalence

$$\Phi(0)>0 \Leftrightarrow E(X_1\log X_1)<\infty$$

et l'égalité $\Phi(0) = [g'(1-)]^{-1}$ dans le cas $E(X_1\log X_1)<\infty$.

La relation existant entre les limites des lois conditionnelles

$\mathcal{L}(X_n|X_n>0)$ et $\mathcal{L}(X_n|X_{n'}>0)$ est précisée dans l'énoncé suivant :

PROPOSITION 2. - Soit $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ un processus de Galton-Watson unitypique infracritique. Posons, pour $i=1,2,\dots$ $\lim_{n\to\infty} P(X_n=i|X_n>0)=\pi_i$ et pour $s\in[0,1]$ et $n'>n\geq 0$, $g(s)=\lim_{n\to\infty} E\{s^{X_n}|X_n>0\}$ et $h_{nn'}(s)=E\{s^{X_n}|X_{n'}>0\}$.

(i) Si $E(X_1\log X_1)<\infty$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{n'\to\infty} P(X_n=i|X_{n'}>0)\right)=\frac{i\,\pi_i}{\sum_{i\geq 1} i\,\pi_i}$$

C'est-à-dire que pour tout $s\in[0,1]$, $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{n'\to\infty} h_{nn'}(s)\right)$ existe et

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{n'\to\infty} h_{nn'}(s)\right)=s\,\frac{g'(s)}{g'(1-)}\,.$$

(ii) Si $E(X_1\log X_1)=\infty$, alors, pour tout $s\in[0,1[$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{n'\to\infty} h_{nn'}(s)\right)=0$$

DEMONSTRATION. - a) La démonstration la plus simple de ce résultat utilise la proposition I et un théorème de Heathcote [3] sur les processus de Galton-Watson avec immigration. En effet, d'après Heathcote, dans un processus avec immigration caractérisé par la fonction génératrice $P_n(s)=a_n(s)\prod_{j=0}^{n-1} b(a_j(s))$ (avec $b(s)=\sum_{k\geq 0} b_k s^k$, $n\geq 1$) définissant une chaîne de Markov apériodique et irréductible, les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) $P_n(s)$ tend vers une fonction génératrice $P(s)$ lorsque $n\to\infty$.

(2) $a'(1-)$ et $\sum_{k\geq 1} b_k\log k<\infty$.

Dans le processus avec immigration de fonction génératrice $\lim_{n'\to\infty} h_{nn'}(s)$, les conditions d'apériodicité et d'irréductibilité sont vérifiées en raison des hypothèses fondamentales (voir par exemple [15]) et les conditions (2) et

(3) $m<1$ et $E(X_1\log X_1)<\infty$

sont équivalentes. Dans la proposition 2 l'existence de la limite

$\lim\limits_{n\to\infty}\ (\lim\limits_{n'\to\infty}\ h_{nn'}(s))$ est donc une simple conséquence du théorème de Heathcote.
La détermination de la limite dans (i) se fait à partir de la relation

$$\lim_{n'\to\infty} h_{nn'}(s) = s\,\frac{f_n'(s)}{m^n} = s\ y_n\ (s)\,\Phi_n(0)\,.$$

après justification d'un passage à la limite.

b) Une démonstration directe de la proposition 2, utilisant la limite $\Phi(s) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-f_n(s)}{m^n} = \Phi(0)\,(1-g(s))$ suit la même démarche que la démonstration du théorème de Harris à partir des relations fondamentales de Kesten, Ney, Spitzer [8] relatives au cas critique.

c) Citons, en raison de son analogie avec le cas critique, une autre démonstration : elle utilise la fonction génératrice de la mesure invariante, soit $\varphi(s) = \sum_{i\geq 1} \mu_i s^i = \frac{\operatorname{Log}(1-g(s))}{\operatorname{Log} m}$, qui vérifie

$$\varphi(f_n(s)) = \varphi(s) + n \qquad s\in[0,1[,\ n\geq 0\,. \tag{IV.1}$$

Elle est basée sur la relation

$$\lim_{n'\to\infty} h_{nn'}(s) = s\,\frac{f_n'(s)}{m^n} = s\,\varphi'(s)\ \frac{1-f_n(s)}{m^n}\cdot\frac{1}{(1-f_n(s))\,\varphi'(f_n(s))}$$

déduite de (IV.1) par dérivation, et se déduit immédiatement du lemme suivant :

LEMME 1 [9]. - <u>Soit</u> $\varphi(s) = \frac{\operatorname{Log}(1-g(s))}{\operatorname{Log} m}$, <u>avec</u> $g(s) = \lim\limits_{n\to\infty} E(s^{X_n} | X_n > 0)$ <u>la fonction génératrice d'une mesure invariante d'un processus de Galton-Watson infra-critique</u>. <u>Alors</u>

$$\lim_{s\to 1-0}\ (1-s)\,\varphi'(s) = -1/\operatorname{Log} m\,.$$

V. Limite de la distribution de X_n conditionnellement à la non-extinction ; cas critique

Dans le cas critique avec $\operatorname{Var} X_1 = \sigma^2$ finie, des résultats explicites sur les limites des lois $\mathcal{L}(X_n | X_n > 0)$ et $\mathcal{L}(X_n | X_{n'} > 0)$ ont été obtenus par Yaglom et Harris. Ce sont les théorèmes cités dans l'introduction, énoncés dans ce paragraphe en terme de transformées de Laplace.

Théorème de Yaglom. - Soit $\{X_n,\ n\geq 0\}$ un processus de Galton-Watson critique de variance $\sigma^2=2\alpha$ finie. Si $Y_n(s)=E(e^{-s\frac{X_n}{n\alpha}}|X_n>0)$ alors, lorsque $n\to\infty$, $Y_n(s)$ tend vers une limite $Y(s)$ et

$$Y(s) = \frac{1}{1+s} \qquad (s\geq 0).$$

Théorème de Harris. - Soit $\{X_n,\ n\geq 0\}$ un processus de Galton-Watson critique de variance $\sigma^2=2\alpha$ finie. Si $H_{nn'}(s) = E\{e^{-s\frac{X_n}{n\alpha}}\ |\ X_{n'}>0\}$ alors lorsque $n'\to\infty$ puis $n\to\infty$, $H_{nn'}(s)$ tend vers une limite $H(s)$ et

$$H(s) = \lim_{n\to\infty}\ (\lim_{n'\to\infty} H_{nn'}(s)) = \frac{1}{(1+s)^2} \qquad (s\geq 0)$$

Démonstrations du théorème de Harris.

a) A la lumière de la proposition 1 le théorème de Harris apparaît comme une simple conséquence du théorème de Seneta [17] (ou Pakes [12]) sur les processus de Galton-Watson avec immigration dans lesquels la moyenne a de la loi de reproduction est 1, la variance 2α de la loi de reproduction et la moyenne b de la loi d'immigration sont finies. En effet, Seneta a montré que, dans de tels processus, lorsque $n\to\infty$, la loi de $\frac{X_n}{n\alpha}$ tend vers une loi gamma d'ordre $\Phi=b/\alpha$, de densité $p(x) = \frac{1}{\Gamma(\Phi)\alpha^\Phi}\ x^{\Phi-1}\ e^{-\frac{x}{\alpha}}\ (x\in(0,\infty))$.

Le théorème de Harris correspond du cas particulier $a=m=1$, $\alpha=\frac{\sigma^2}{2}<\infty$, $b=f''(1-)=\sigma^2<\infty$ et $\Phi=2$.

b) Une démonstrations du théorème de Harris à partir de la mesure invariante : On sait que, dans un processus de Galton-Watson critique, la fonction génératrice de la mesure invariante μ, soit $\varphi(s) = \sum_{i\geq 1} \mu_i s^i$, est analytique pour $|s|<1$ et vérifie l'équation fonctionnelle d'Abel

$$\text{(V.1)} \qquad \varphi\circ f_n(s) = \varphi(s)+n \qquad (n\geq 0)$$

à condition de normer les μ_i de sorte que $\varphi\circ f(0)=1$. (Voir par exemple Harris [2]).

La dérivation par rapport à s des deux membres de l'équation (V.1) permet d'écrire la fonction génératrice $\lim\limits_{n'\to\infty} h_{nn'}(s)$ sous la forme

$$\lim_{n'\to\infty} h_{nn'}(s) = s\, f_n'(s) = \left(\frac{1-f_n(s)}{1-s}\right)^2 \cdot \frac{(1-s)^2\,\varphi'(s)}{(1-f_n(s))^2\,\varphi'(f_n(s))}$$

La limite $H(s) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\lim\limits_{n'\to\infty} h_{nn'}(e^{-\frac{s}{n\alpha}})\right)$ apparait alors comme le produit de deux limites, la première valant $\left(\frac{1}{1+s}\right)^2$ et la seconde 1, déterminées respectivement grâce aux lemmes 2 et 3.

LEMME 2. - Si $f(s)$ est la fonction génératrice d'un processus de Galton-Watson de moyenne 1 et de variance $\sigma^2 = 2\alpha$ finie, alors $\psi_n(s) = \dfrac{1-f_n(s)}{1-s}$ $(n \geq 0)$ est la fonction génératrice d'un processus avec immigration. La variable aléatoire correspondante Y_n est telle que $\dfrac{Y_n}{n\alpha}$ tend en loi vers une loi exponentielle lorsque $n\to\infty$.

La démonstration de ce lemme est simple. Précisément, on établit à l'aide d'un théorème de Kesten, Ney et Spitzer [8] que $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(e^{-\frac{s}{n\alpha}}) = \dfrac{1}{1+s}$.

LEMME 3. - Soit $\varphi(s) = \sum\limits_{i\geq 1} \mu_i\, s^i$ la fonction génératrice de la mesure invariante d'un processus de Galton-Watson de moyenne 1 et de variance $\sigma^2 = 2\alpha$ finie. Alors, lorsque $s \to 1-0$

$$\lim (1-s)^2\, \varphi'(s) = 1/\alpha$$

Ce lemme se démontre d'abord pour la suite $\{s_n = f_n(0),\ n \geq 0\}$ croissante, de limite 1, à partir de la relation

$$\varphi'(s_n) f_n'(0) = \varphi'(0)$$

déduite de l'équation fonctionnelle (V.1) par dérivation. Cette relation s'écrit encore

$$(1-s_n)^2\, \varphi'(s_n)\, n^2\, P(X_n=1)\, [\alpha n(1-f_n(0))]^{-2}\, \alpha^2 = \mu_1$$

Lorsque $n \to \infty$, on sait d'après Kesten, Ney, et Spitzer que $\alpha n(1-f_n(0))$ tend vers 1 et que, $n^2 P(X_n = 1)$ tend vers μ_1/α, d'où le lemme si $\mu_1 \neq 0$. Dans le cas où μ_1 est nul, après de nouvelles dérivations des deux membres de (V.1), on reprend le même raisonnement pour μ_k, où $\mu_k \neq 0$. Le lemme se démontre ensuite sans difficulté pour s quelconque tendant vers $1-0$ (cf [9]).

Remarque. - On notera que les limites des fonctions caractéristiques $Y_n(s) = E\{e^{-\frac{X_n}{n\alpha}} \mid X_n > 0\}$ et $H_{nn'}(s) = E\{e^{-s\frac{X_n}{n\alpha}} \mid X_{n'} > 0\}$, dans les théorèmes de Yaglom et de Harris, sont liées par les relations

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{n'\to\infty} H_{nn'}(s)\right) = -\frac{d}{ds}\left(\lim_{n\to\infty} Y_n(s)\right).$$

Dans les cas non critiques c'est ce type de relation qui est conservé entre les fonctions génératrices $y_n(s) = E\{s^{X_n} \mid X_n > 0\}$ et $h_{nn'}(s) = E\{s^{X_n} \mid X_{n'} > 0\}$. Ainsi, dans le cas infracritique, la proposition 2 (i) exprime que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{n'\to\infty} h_{nn'}(s)\right) = K s \frac{d}{ds}\left(\lim_{n\to\infty} y_n(s)\right).$$

où K est une constante, mais, au contraire du cas critique, la fonction génératrice $\lim_{n\to\infty} y_n(s)$ n'a pas une forme particulière .

VI. Limite de la distribution de X_n conditionnellement à la non extinction ; cas supracritique et cas explosif

Dans les cas $m > 1$ et $m = \infty$, c'est-à-dire lorsque $q < 1$, il est toujours possible de se ramener au cas infracritique en ne s'intéressant, dans la fonction génératrice $f(s)$, qu'aux valeurs de $s \leq q$, par l'intermédiaire de la fonction génératrice $e(s) = f(qs)/q$, de moyenne $\beta = f'(q) < 1$. On obtient ainsi sans difficulté une généralisation du théorème de Yaglom relatif au cas $m < 1$ et de la proposition 2 ainsi que de tous les théorèmes cités dans le paragraphe IV. Ces théorèmes sont énoncés dans [9].

Dans les cas $1 < m \leq \infty$, l'intérêt se porte davantage sur l'étude de la variable aléatoire $\frac{X_n}{c_n}$ (où $\{c_n, n \geq 0\}$ est une suite de nombres positifs) si $m>1$, et de la variable aléatoire $\frac{\mathrm{Log}(1+X_n)}{b^n}$ (où $b>1$) si $m=\infty$. A propos des variables aléatoires conditionnelles correspondantes on démontre la proposition suivante :

PROPOSITION 3. - (i) <u>Soit</u> $\{X_n, n\geq 0\}$ <u>un processus de Galton-Watson supracritique</u>. <u>Si</u> $\{c_n, n\leq 0\}$ <u>est une suite croissante de nombres positifs</u>, <u>alors</u>, <u>pour tout réel</u> x, <u>les expressions</u>, $\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{X_n}{c_n}\leq x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{X_n}{c_n}\leq x \mid X_n>0)$ <u>et</u> $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{n'\to\infty} P(\frac{X_n}{c_n}\leq x \mid X_{n'}>0))$ <u>convergent ou non en même temps</u>. <u>De plus</u>, <u>si</u> $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{X_n}{c_n}\leq x)$ <u>alors</u>

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_n}{c_n}\leq x \mid X_n>0) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{n'\to\infty} P(\frac{X_n}{c_n}\leq x \mid X_{n'}>0)) = \frac{F(x)-q}{1-q} .$$

(ii) <u>Soit</u> $\{X_n, n\geq 0\}$ <u>un processus de Galton-Watson explosif</u>. <u>Si</u> $b>1$ <u>les limites</u> $\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{\mathrm{Log}(1+X_n)}{b^n}\leq x \mid X_n>0)$ <u>et</u> $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{n'\to\infty} P(\frac{\mathrm{Log}(1+X_n)}{b^n}\leq x \mid X_{n'}>0))$ <u>existent si et seulement si</u> $\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{\mathrm{Log}(1+X_n)}{b^n}\leq x)$ <u>existe</u>.

<u>De plus</u>, <u>si</u> $g(x)$ <u>est la fonction inverse de</u> $1-f(1-x)$ $(x\in[0,1])$ <u>et s'il existe</u> $a>0$, $b>0$ <u>et</u> $\delta>0$ <u>tels que</u>, <u>lorsque</u> $x\to 0+$,

$$g'(x) = a\,x^{b-1}(1+0(x^{\delta}))$$

<u>alors</u>, <u>en notant</u> $v(x) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{\mathrm{Log}(1+X_n)}{b^n}\leq x)$,

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{\mathrm{Log}(1+X_n)}{b^n}\leq x \mid X_n>0) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{n'\to\infty} P(\frac{\mathrm{Log}(1-X_n)}{b^n}\leq x \mid X_{n'}>0))$$
$$= \frac{v(x)-q}{1-q} .$$

DEMONSTRATION. - Dans le cas $1<m<\infty$, il est clair que

$$\lim_{n\to\infty} y_n(e^{-\frac{s}{c_n}}) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{n'\to\infty} h_{nn'}(e^{-\frac{s}{c_n}})) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f_n(e^{-\frac{s}{c_n}})-q}{1-q} \quad (s\geq 0)$$

la même relation reste vraie entre les fonctions de répartition correspondantes.

Dans le cas $m=\infty$, la démonstration de (ii) ne présente pas de difficulté.

VII. Remarque sur les processus de Galton-Watson multitypiques

Les différentes propriétés des processus de Galton-Watson unitypiques citées dans les paragraphes précédents s'étendent de façon inégale aux cas multitypiques.

On connait par exemple la généralisation aux cas multitypiques infracritiques et critiques des théorèmes de Yaglom relatifs aux cas $m<1$ et $m=1$; ils sont démontrés avec les méthodes de Joffe et Spitzer dans [7] : par exemple, si $\{X_n, n\geq 0\}$ est un processus de Galton-Watson multitypique critique, positivement régulier, non dégénéré, dont les moments du second ordre sont finis, la loi conditionnelle de $\frac{X_n}{n}$ sachant que $X_n>0$ tend vers une loi exponentielle lorsque $n\to\infty$. Avec les mêmes hypothèses, le théorème de Harris se généralise également : la loi limite $\lim_{n\to\infty}(\lim_{n'\to\infty} \mathcal{L}(\frac{X_n}{n} \mid X_{n'}>0))$ est une loi gamma d'ordre deux, carré de convolution de la loi exponentielle $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(\frac{X_n}{n} \mid X_n>0)$ ([9]). Quine [14] a établi dans le cas multitypique infracritique un équivalent du théorème de Heathcote sur l'immigration dans le cas infracritique. De même, le théorème de Seneta sur l'immigration dans le cas critique trouve une généralisation dans le cas multitypique. Enfin, les propositions 2 et 3 (i) sur la relation entre les lois $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(X_n \mid X_n>0)$ et $\lim_{n\to\infty}(\lim_{n'\to\infty} \mathcal{L}(X_n|X_{n'}>0))$ se généralisent sans difficulté ([9]).

Par contre la proposition 1 comparant la loi $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(X_n|X_{n'}>0)$ à la loi d'un processus avec immigration ne trouve une extension que dans le cas multitypique supracritique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DARLING D.A. — The Galton-Watson process with infinite mean, J. Appl. Prob.7 (1970), 455-456.

[2] HARRIS T.E. — The theory of branching processes, Springer Verlag, Berlin 1963.

[3] HEATHCOTE C.R. — A branching process allowing immigration, J. Roy Statist. Soc. Ser B 27 (1965), 138-143 .

Corrections and comments on the paper "A branching process allowing immigration", J. Roy. Statist. Soc. Ser B 28 (1966),213-217.

[4] HEATHCOTE C.R., SENETA E., VERE-JONES D. — A refinement of two theorems in the theory of branching processes, Theor. Prob. Applic.12 (1967), 297-301.

[5] HEYDE C.C. — Extension of a result of Seneta for the supercritical Galton-Watson process, Ann. Math. Statist.41 (1970), 739-742.

[6] JOFFE A. — On the Galton-Watson branching processes with mean less than one, Ann. Math. Statist. 38 (1967), 264-266.

[7] JOFFE A., SPITZER F. — On multitype branching process with $\rho \leq 1$, J. Math. Anal. Appl. 19 (1967), 409-430.

[8] KESTEN H. , NEY P., SPITZER F. — The Galton-Watson process with mean one and finite variance, Theor. Prob. Applic. 11 (1966), 513-540.

[9] KHALILI-FRANÇON E. — Le processus de Galton-Watson : généralisation d'un théorème de Harris à tous les cas unitypiques ou multitypiques,Thèse de spécialité, Université de Strasbourg I, 1972 .

[10] KIYOSHI K., WATANABE S., — Branching processes with immigration and related limit theorems, Theor. Prob. Applic. 16 (1971), 36-55.

[11] LAMPERTI J., NEY P. — Conditioned branching processes and their limiting diffusions,Theor. Prob. Applic.13 (1968),128-139.

[12] PAKES A.G. — On the critical Galton-Watson process with immigration, J. Austral. Math. Soc.12 (1971), 476-482.

[13] PAKES A.G. — Some limit theorems for the total progeny of a branching process, Advances Appl. Prob.3(1971), 176-192.

[14] QUINE M.P. — The multitype Galton-Watson process with immigration, J. Appl. Probability 7 (1970), 411-422.

[15] SENETA E., VERE-JONES D. — On quasi-stationary distributions in discrete time Markov chains with a denumerable infinity of states, J.Appl. Prob.3 (1966), 403-434.

[16] SENETA E. — On recent theorems concerning the supercritical Galton-Watson process, Ann.Math. Stat. 39 (1968), 2098-2102.

[17] SENETA E. — An explicit-limit theorem for the critical Galton-Watson process with immigration, J. Roy Statist. Soc. Ser B 32 (1970), 149-152.

[18] YAGLOM M.A. — Certain limit theorems of the theory of branching random processes, Reports of the Academy of Sciences of USSR 56 (1947), 795-798.