JACQUES AZÉMA

Une remarque sur les temps de retour. Trois applications

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 35-50
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__35_0>

UNE REMARQUE SUR LES TEMPS DE RETOUR

TROIS APPLICATIONS

par J. AZÉMA

8.0. - DEFINITIONS ET NOTATIONS. - Soit $(\Omega, X_t, \theta_t, \underline{\underline{F}}_t, \zeta, P_x)$ un processus de Hunt à valeurs dans l'espace d'états E, localement compact à base dénombrable. On utilisera dans ce travail des résultats de la théorie générale des processus dus à différents Strasbourgeois. Je me référerai à l'exposé de Dellacherie (qui est à paraître chez Springer) pour ce qui concerne ces résultats. Les références à ce travail seront notées [TGP]. Je renvoie aussi à la bibliographie de ce livre pour l'attribution des différents résultats utilisés à leurs pères respectifs. Je pense que les lecteurs Strasbourgeois s'y retrouveront d'eux-même.

Comme il est courant dans la théorie des processus de Markov, nous aurons à considérer l'espace $(\Omega, \underline{\underline{F}}_\infty)$, muni d'une famille de probabilités. Nous ferons donc les conventions suivantes :

Soit m une probabilité sur E. Nous dirons que deux processus Z et Z' sont P_m- indistinguables si Z et Z' sont indistinguables par rapport à l'espace probabilisé $(\Omega, \underline{\underline{F}}_\infty, P_m)$. Nous dirons que deux processus Z et Z' sont indistinguables si, quelle que soit la mesure initiale m, Z et Z' sont P_m-indistinguables. On fera une convention analogue pour la notion d'ensemble négligeable : deux variables aléatoires sont dites presque sûrement égales si, quelle que soit la mesure initiale m, elles sont P_m-presque sûrement égales.

Les tribus $\underline{\underline{H}}^g$ et $\underline{\underline{H}}^d$. Nous appellerons $\underline{\underline{H}}^g$ (resp. $\underline{\underline{H}}^d$) la tribu sur $\Omega \times R_+$ engendrée par les processus mesurables Z, continus à gauche et limités à droite (resp. continus à droite), nuls sur $]\zeta, \infty[$ (resp. sur $[\zeta, \infty[$) et vérifiant la propriété suivante

(*) $\forall t \in R_+$ les processus $s \to Z_{s+t}$ et $s \to Z_s \circ \theta_t$ sont indistinguables sur $]0, \infty]$.

(resp. (* *) les processus $s \to Z_{s+t}$ et $s \to Z_s \circ \theta_t$ sont indistinguables).

On remarquera que si Z est $\underline{\underline{H}}^g$ (resp $\underline{\underline{H}}^d$)-mesurable, Z est constant sur $]\zeta,\infty[$ (resp. sur $[\zeta,\infty[$), et que $Z\, 1_{]0,\zeta]}$ (resp. $Z\, 1_{[0,\zeta[}$) vérifie la propriété (*) (resp. (**)). Dans la suite tous les processus $\underline{\underline{H}}^g$ (resp. $\underline{\underline{H}}^d$)-mesurables seront supposés être à support dans $]0,\zeta]$ (resp. dans $[0,\zeta[$) .

On définirait de même les processus $\underline{\underline{H}}^g$ et $\underline{\underline{H}}^d$ mesurables parfaits : ce sont les processus engendrés par les processus mesurables continus à gauche limités à droite (resp. continus à droite) nuls sur $]\zeta,\infty)$ (resp. sur $[\zeta,\infty)$) et vérifiant la propriété suivante :

Il existe un sous-ensemble N de Ω tel que si $\omega \notin N$, alors $\forall\ t \geq 0\, \forall s > 0\ \ Z_{s+t}(\omega) = Z_s \circ \theta_t(\omega)$ (resp. $\forall t \geq 0\, \forall s \geq 0\, Z_{s+t}(\omega) = Z_s \circ \theta_t(\omega)$).

<u>TEMPS DE RETOUR</u>. Nous modifierons un peu la définition, due à NAGASAWA [6], d'un temps de retour. On appellera temps de retour une v.a. τ telle que $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $\tau \circ \theta_t = (\tau - t)^+$. p.s.

et on appellera temps de retour parfait ce que l'on appelle usuellement un temps de retour : il existe N, sous-ensemble négligeable de Ω, tel que

$$\forall\, \omega \notin N ,\ \ \tau(\theta_t(\omega)) = (\tau(\omega) - t)^+ \ \text{ quelque soit } t \text{ dans } \mathbb{R}_+ .$$

PROPOSITION. - <u>Une variable aléatoire</u> τ <u>est un temps de retour</u> $\leq \zeta$ <u>si et seulement si</u> τ <u>est la fin</u> *) <u>d'un ensemble</u> $\underline{\underline{H}}^g$ <u>mesurable</u> (<u>resp</u>. $\underline{\underline{H}}^d$<u>-mesurable</u>).

<u>DEMONSTRATION</u>. - Si τ est un temps de retour $\leq \zeta$, les ensembles $]0,\tau]$ et $[0,\tau[$ sont respectivement $\underline{\underline{H}}^g$ et $\underline{\underline{H}}^d$ - mesurables. Réciproquement il est facile de voir que la fin d'un ensemble $\underline{\underline{H}}^g$ ou $\underline{\underline{H}}^d$ mesurable est un temps de retour.

<u>Remarque</u>. - On peut énoncer la même proposition avec des ensembles $\underline{\underline{H}}^g$ et $\underline{\underline{H}}^d$ mesurables parfaits et des temps de retour parfaits.

---

*) La fin τ d'une partie A de $\Omega \times \mathbb{R}_+$ est définie par

$$\tau(\omega) = \sup \{t \geq 0 \ :\ (\omega,t) \in A\} \quad (\text{avec } \sup \emptyset = 0)$$

c'est une variable aléatoire si A est mesurable.

DEFINITION. - Si τ est un temps de retour, la tribu $\hat{\underline{\underline{F}}}_\tau$ des événements postérieurs à τ sera la classe des événements A de $\underline{\underline{F}}_\infty$ tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+ \quad \theta_t^{-1}(A) \cap \{\tau > t\} = A \cap \{\tau > t\} \quad \text{p.s.}$$

Si τ est un temps de retour $\leq \zeta$ et Z un processus $\underline{\underline{H}}^d$ ou $\underline{\underline{H}}^g$ mesurable (ou même simplement vérifiant la propriété (*)), Z_τ et $\hat{\underline{\underline{F}}}_\tau$ - mesurable ; en effet

$$Z_\tau \circ \theta_s \; 1_{\{\tau > s\}} \underset{\text{p.s.}}{=} Z_{(\tau - s)^+ + s} \; 1_{\{\tau > s\}} \underset{\text{p.s.}}{=} Z_\tau \; 1_{\{\tau > s\}}$$

DEFINITIONS. - Si $A \in \hat{\underline{\underline{F}}}_\tau$ et si τ est un temps de retour, $\tau 1_A$ est un temps de retour, que l'on notera τ^A. Si τ et τ' sont deux temps de retour $\leq \zeta$ on appellera cointervalle stochastique $]\tau, \tau']$ le sous-ensemble $\{(\omega, t) : \tau(\omega) < t \leq \tau'(\omega)\}$ de $\Omega \times \mathbb{R}_+$; on définit de même les intervalles $[\tau, \tau'[$, $]\tau, \tau'[$, etc... On peut toujours supposer $\tau \leq \tau'$ quitte à remplacer τ par τ^A ; avec $A = \{\tau \leq \tau'\}$.

8.1. - UNE HYPOTHESE DE TRANSIENCE

On fera l'hypothèse suivante :

Il existe une suite croissante σ_n de temps de retour parfaits tels que

a) $\forall_n \; \sigma_n < \infty$. p.s. b) $\lim\limits_n \uparrow \sigma_n = \zeta$. p.s. c) $\{\sigma_n < \zeta < \infty\} \downarrow \emptyset$ p.s.

Il est clair que cette hypothèse est vérifiée dès que ζ est fini (prendre $\sigma_n = \zeta$ pour tout n) ou même dès que le processus transie dans les compacts (prendre les derniers temps de visite d'une suite K_n de compacts convenable).

PROPOSITION. - La tribu $\underline{\underline{H}}^g$ (resp. $\underline{\underline{H}}^d$) est engendrée par les co-intervalles stochastiques fermés à droite ouverts à gauche (resp. fermés à gauche ouverts à droite) et par l'intervalle $]\zeta, \infty)$ (resp. $[\zeta, \infty)$) .

DEMONSTRATION. - Etudions le cas de $\underline{\underline{H}}^g$; il est clair que les co-intervalles $]\tau,\tau']$ sont dans $\underline{\underline{H}}^g$; il nous reste à montrer que tout processus $\underline{\underline{H}}^g$-mesurable Z continu à gauche, limité à droite, est engendré par les co-intervalles. Etudions tout d'abord le cas particulier suivant :

$$A \in \underline{\underline{\hat{F}}}_\tau \quad \text{et} \quad Z = (A \times R_+) \cap]0,\tau]$$

Dans ce cas $Z =]0,\tau^A]$, c'est donc un co-intervalle convenable ; on tire de là sans difficulté que si $(\tau_n)_{0 \le n \le \infty}$ est une suite décroissante de temps de retour et (Y_n) une suite de variables aléatoires $\underline{\underline{\hat{F}}}_{\tau_n}$ -mesurables, le processus $Z = \sum_n Y_n 1_{]\tau_{n+1},\tau_n]}$ est dans la tribu engendrée par les co-intervalles stochastiques fermés à droite ouverts à gauche. Donnons nous alors un processus $\underline{\underline{H}}^g$-mesurable Z continu à gauche et limité à droite, et définissons par récurrence les temps de retour suivant :

$$\tau_0 = \sigma_0 \ldots\ldots \tau_{n+1} = \sup\{t \,;\, t \le \tau_n \,;\, |Z_t - Z_{\tau_n}| > \varepsilon\}\,.$$

Le fait que les τ_n sont des temps de retour peut se montrer par récurrence de la manière suivante : supposons que τ_n soit un temps de retour et considérons τ_{n+1}. Le processus $|Z - Z_{\tau_n}|\, 1_{]0,\tau_n]}$ est $\underline{\underline{H}}^g$-mesurable ; τ_{n+1} est alors la fin d'un ensemble $\underline{\underline{H}}^g$-mesurable et est un temps de retour d'après la proposition 8.0. Comme Z est continu à gauche, $\tau_n > 0 \Rightarrow \tau_{n+1} < \tau_n$ p.s., et puisque Z est limité à droite, on a $\lim_n \tau_n = 0$ p.s. Posons $Z^\varepsilon = \sum_n Y_{\tau_n} 1_{]\tau_{n+1},\tau_n]}$; Z^ε étant mesurable par rapport à la tribu engendrée par les co-intervalles, il en est de même pour le processus $Z\, 1_{]0,\sigma_0]} = \lim_{\varepsilon \to 0} Z^\varepsilon$. Un raisonnement analogue prouverait le même résultat pour $Z\, 1_{]0,\sigma_n]}$ quelque soit n, donc pour $Z = \lim_{n \to \infty} Z\, 1_{]0,\sigma_n]}$.

b) En ce qui concerne le tribu $\underline{\underline{H}}^d$, la démonstration est plus simple : si Z est continu à droite $\underline{\underline{H}}^d$ - mesurable on posera

$Z^\varepsilon = \sum_n Y_{(\sigma_0 - n\varepsilon)^+} 1_{[(\sigma_0 - (n+1)\varepsilon)^+\,,\,(\sigma_0 - n\varepsilon)^+[}$, puis on montre que

$\lim_{\varepsilon \to 0} Z^\varepsilon = Z\, 1_{[0,\sigma_0[}$, d'où le résultat .

Remarque. - On montrerait de même que la tribu des ensembles $\underline{\underline{H}}^g$-mesurables parfaits est engendrée par les co-intervalles stochastiques formés de temps de retour parfaits.

COROLLAIRES. - 1) *Soit* Z *un processus* $\underline{\underline{H}}^g$-*mesurable ; il existe un processus* $\underline{\underline{H}}^g$-*mesurable* Y *parfait et prévisible tel que, quelle que soit la mesure initiale* m, *la projection prévisible de* Z *relativement à* $(\Omega, (\underline{\underline{F}}_t^m), P_m)$ *soit* P_m-*indistinguable de* Y.

DEMONSTRATION. - Etudions d'abord le cas où $Z = 1_{]0,\tau]}$ où τ est un temps de retour. Désignons par $e^\tau(x)$ la fonction excessive $x \to P_x[\tau > 0]$; je dis que le processus $Y(\omega,t) = e^\tau(X_t)_-$ répond à la question : il est bien clair que Y est prévisible, $\underline{\underline{H}}^g$-mesurable, parfait ; il reste à montrer que si m est une mesure initiale, la projection prévisible de Z est indistinguable de Y. Plaçons nous donc dans $(\Omega, (\underline{\underline{F}}_t^m), P_m)$ et considérons le potentiel d'équilibre de charge τ, c'est-à-dire la version continue à droite χ^t du potentiel $P[\tau > t \mid \underline{\underline{F}}_t^m]$. Pour tout t on a $\chi_t^\tau = e^\tau(X_t)$. p.s. et, comme les deux membres sont continus à droite, χ^τ est indistinguable du processus $t \to e^\tau(X_t)$. On a donc pour tout temps d'arrêt T, $\chi_T^\tau = e^\tau(X_T)$; mais d'après la proposition 1.2. de [1] $\chi_T^\tau = P_m[\tau > T \mid \underline{\underline{F}}_T^m]$. Soit maintenant T un temps d'arrêt prévisible ; il est clair que $\chi_{T-}^\tau = e^\tau(X_T)_- = P_m[\tau \geq T \mid \underline{\underline{F}}_{T-}^m]$, ce qui montre bien que Y est la projection prévisible de $1_{]0,\tau]}$; terminons alors la démonstration : l'ensemble des processus $\underline{\underline{H}}^g$-mesurables Z auxquels on peut associer un processus Y possédant les propriétés de l'énoncé est un espace vectoriel stable pour l'opération de limite croissante et contenant les co-intervalles stochastiques ; c'est donc l'ensemble de tous les processus $\underline{\underline{H}}^g$-mesurables. Il résulte en particulier du corollaire 1 que tout processus $\underline{\underline{H}}^g$- mesurable prévisible est indistinguable d'un processus $\underline{\underline{H}}^g$-mesurable prévisible parfait.

2) *Si* Z *est* H^d-*mesurable, il existe une fonction presque borélienne* f *telle que, quelle que soit la mesure initiale* m, *la projection de* Z *sur la*

tribu des bien mesurables est indistinguable des processus $(\omega,t) \to f(X_t(\omega))$.

DEMONSTRATION. - On refait le mouvement précédent avec cette fois ci des intervalles stochastiques de la forme $[0,\tau[$ dont la projection bien mesurable est $e^{\tau}(X)$

3) la restriction de $\underline{\underline{H}}^d$ à $\Omega \times]0,\infty[$ est contenue dans $\underline{\underline{H}}^g$.

DEMONSTRATION. - On peut en effet approcher un co-intervalle de la forme $[\tau,\tau'[$ par la suite $](\tau-\frac{1}{n})^+ , (\tau'-\frac{1}{n})^+]$.

8.2. - LE THEOREME DE SECTION

Soit Γ un ensemble $\underline{\underline{H}}^g$-mesurable, ϵ un réel >0 , et m une mesure initiale ; il existe un temps de retour τ tel que

1) le graphe de τ soit contenu dans Γ

2) $P[\pi(\Gamma)] < P\{\tau>0\} + \epsilon$

où π désigne la projection de $\Omega \times R_+$ sur Ω .

DEMONSTRATION. - On recopie la démonstration donnée par Dellacherie dans (TGP IV paragraphe 2) pour les théorèmes de section par des temps d'arrêt, en remplaçant début par fin .

a) on appelle $\underline{\underline{J}}$ le pavage sur $\Omega \times R_+$ constitué par les réunions finies de co-intervalles stochastiques $]\tau,\tau']$; $\underline{\underline{J}}$ est une algèbre de Boole sur $\Omega \times R_+$. Puis on montre que la fin d'un élément de $\underline{\underline{J}}_\delta$ est un temps de retour. Le théorème IV - T 9 de [TGP] est encore valable :

il existe une variable aléatoire Y positive vérifiant les conditions suivantes :

a) $[Y] \subset \Gamma$

b) $P_m[\pi(\Gamma)] = P_m\{Y < +\infty\}$.

On désigne par μ la mesure bornée sur $\Omega \times R_+$ définie par la formule

$$\mu(f) = \int_{\{Y<\infty\}} f(\omega, Y(\omega)) \, P_m(d\omega)$$

où f est un processus mesurable borné.

La mesure μ, portée par Γ, a pour masse $\mu(\Gamma) = P_m[Y<\infty]$, et si B est $\underline{\underline{H}}^g$-mesurable $\mu(B) = P_m[\pi(\Gamma \cap B)]$. Comme $\underline{\underline{J}}$ engendre $\underline{\underline{H}}^g$, il existe $B \in \underline{\underline{J}}_\delta$ inclus dans Γ tel que $\mu(\Gamma) < \mu(B)+\varepsilon$; on a alors $P[\pi(\Gamma)] = \mu(\Gamma) < \mu(B)+\varepsilon = P[\pi(B)]+\varepsilon$. La fin τ de B est un temps de retour et son graphe $[\tau]$ est inclus dans B puisque B est intersection dénombrable d'ensembles qui sont des réunions finies de co-intervalles $]\tau' \tau'']$; τ vérifie les conditions du théorème.

Remarque. - On aurait un théorème analogue avec un ensemble $\underline{\underline{H}}^g$-mesurable parfait et des temps de retour parfaits.

COROLLAIRE 1. - <u>Plaçons nous sous l'hypothèse d'absolue continuité</u> (L) <u>de Meyer, et désignons par</u> ξ <u>la mesure de base</u>.

<u>Soient</u> Z^1 <u>et</u> Z^2 <u>deux processus</u> $\underline{\underline{H}}^g$-<u>mesurables, et supposons que</u> Z^1 <u>et</u> Z^2 <u>soient</u> P^ξ-<u>indistinguables, alors les processus</u> Z^1 <u>et</u> Z^2 <u>sont indistinguables</u>. (Nous supposons, comme il a été indiqué, que $Z_0^1 = Z_0^2 = 0$).

DEMONSTRATION. - Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $x \in E$ tel que l'ensemble aléatoire $\{Z^1 \neq Z^2\}$ ne soit pas P_x-évanescent. Il existerait d'après le théorème de section un temps de retour τ tel que $[\tau] \subset \{Z^1 \neq Z^2\}$ et $P_x\{\tau>0\}>0$. Mais d'après l'hypothèse faite, on a $P_\xi\{\tau>0\} = 0$; comme la fonction $x \to P_x\{\tau>0\}$ est excessive, on a en vertu de l'hypothèse (L) $P_x\{\tau>0\} = 0$ pour tout $x \in E$, d'où la contradiction.

COROLLAIRE 2. - <u>Soient</u> Z^1 <u>et</u> Z^2 <u>deux processus</u> $\underline{\underline{H}}^g$-<u>mesurables bornés</u>, m <u>une mesure initiale</u>. <u>Si</u> $E_m[Z_\tau^1 ; \tau>0] = E_m[Z_\tau^2 ; \tau>0]$, <u>quelque soit le temps de retour</u> τ, Z_τ^1 <u>et</u> Z_τ^2 <u>sont</u> P_m-<u>indistinguables</u>.

8.2. - PROPOSITION. - <u>Soient</u> m <u>une mesure initiale</u>, A <u>et</u> B <u>deux fonctionnelles additives (non nécessairement adaptées)</u> P^m-<u>intégrables telles que, pour tout temps</u>

<u>de retour</u> τ, $E_m(A_\tau) = E_m(B_\tau)$; <u>alors</u> A <u>et</u> B <u>sont</u> P_m - <u>indistinguables</u> .

DEMONSTRATION. - Les processus $A - A_-$ et $B - B_-$ sont $\underline{\underline{H}}^g$ - mesurables, et l'on a pour temps de retour τ,

$$E_m(A_\tau - A_{\tau-} ; \tau > 0) = E_m(A_\tau - A_{\tau-}) = E_m(B_\tau - B_{\tau-}) = E_m(B_\tau - B_{\tau-} ; \tau > 0)$$

$A - A_-$ est donc indistinguable de $B - B_-$ et A et B ont donc même partie purement discontinue ; on peut donc se ramener au cas ou A et B sont continues. Soit σ un temps de retour pris dans la suite σ_n introduite en 8.1. ; introduisons les tribus $\hat{\underline{\underline{F}}}_t = \hat{\underline{\underline{F}}}_{(\sigma-t)^+}$, et posons $\hat{A}_t = A_\sigma - A_{(\sigma-t)^+}$, $\hat{B}_t = B_\sigma - B_{(\sigma-t)^+}$. $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont deux processus croissants continus adaptés à la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$. D'autre part si T est un temps d'arrêt de la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$, $(\sigma - T)^+$ est un temps de retour ; on peut donc écrire

$$E_m[\hat{A}_T] = E_m(A_\sigma - A_{(\sigma-T)^+}) = E_m[B_\sigma - B_{(\sigma-T)^+}] = E_m[\hat{B}_T] .$$

On a alors $A = B$ d'après [TGP] V - T 36 et T 37 . Faisons tendre t vers l'infini, il vient $A_\sigma = B_\sigma$ P_m - presque sûrement. Les processus A et B coincident alors sur $]0,\sigma]$, et ceci quelque soit σ pris dans la suite (σ_n) ; d'où le résultat.

<u>8.3. - THEOREME DE MOTOO. - Plaçons nous sous l'hypothèse (L) de Meyer et appelons ξ la mesure de base</u>

<u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>deux fonctionnelles additives naturelles admettant des potentiels</u> U_A <u>et</u> U_B ξ - <u>presque partout finis</u>. <u>Supposons que</u> U_B <u>soit spécifiquement majoré par</u> U_A . <u>Il existe un processus</u> $Z \leq 1$, $\underline{\underline{H}}^g$ - <u>mesurable et prévisible parfait</u>, <u>tel</u> $B_t = \int_0^t Z(\omega,s)\,d A_s$. <u>Si</u> A <u>est continue</u>, <u>il existe une fonction</u> f , <u>presque borélienne</u>, <u>telle que</u> $B_t = \int_0^t f(X_s)\,d A_s$.

DEMONSTRATION. - On peut remplacer la mesure de base ξ par une probabilité équivalente à ξ telle U_A et U_B soient intégrables. Nous appellerons toujours ξ cette nouvelle mesure. On peut associer à A et B deux mesures sur $(\Omega \times \mathbb{R}_+ , \underline{\underline{H}}^g)$ en posant, si Y est $\underline{\underline{H}}^g$ - mesurable,

$$\int Y \, d\mu = E_\xi [\int_0^\infty Y(\omega,t) \, dA_t] \quad \text{et} \quad \int Y \, d\nu = E_\xi [\int_0^\infty Y(\omega,t) \, dB_t] .$$

Appelons Z' une densité de Randon - Nikodym $\underline{\underline{H}}^g$ - mesurable inférieure à 1 de ν par rapport à μ , et comparons les fonctionnelles additives B et $Z' * A = C$ *). On a $E_\xi [C_T] = E_\xi [B_T]$ pour tout temps de retour ; d'après la proposition précédente $B = C = (Z' * A) = (Z' * A)^3 = {}^3Z' * A$ *). Enfin, en appliquant le corollaire 1) de la proposition 8.1. , il existe un processus prévisible $\underline{\underline{H}}^g$ - mesurable Z , parfait, indistinguable de ${}^3Z'$; Z répond à la question.

Il reste à examiner le cas où A (et donc B) est continue ; on peut alors faire le raisonnement précédent sur $\underline{\underline{H}}^d$ au lieu de $\underline{\underline{H}}^g$; on aura encore

$$E_\xi [C_T] = E_\xi [\int_0^\infty 1_{]0,T]}(t) \, dC_t] = E_\xi [\int_0^\infty 1_{[0,T[}(t) \, dC_t]$$

$$= E_\xi [\int_0^\infty 1_{[0,T[}(t) \, dB_t] = E_\xi [\int_0^\infty 1_{]0,T]}(t) \, dB_t] = E_\xi [B_T]$$

Projetant la densité $\underline{\underline{H}}^d$ - mesurable Z' ainsi construite sur la tribu des bien - mesurables, on obtient le théorème de Motoo d'après le corollaire 2 de la proposition 8.1.

---

*) Rappelons les notations de [TGP] : $Z' * A$ désigne le processus croissant défini par $(Z' * A)_t = \int_0^t Z'_s \, A_s$, $(Z' * A)^3$ désigne la projection duale de ce processus croissant sur la tribu $\underline{\underline{T}}_3$ des ensembles prévisibles, et, enfin, ${}^3Z'$ désigne la projection du processus borné Z' sur $\underline{\underline{T}}_3$.

8.4. - UNE REMARQUE SUR LE RETOURNEMENT

Soit σ un temps de retour fini ; on peut définir une famille croissante et continue à droite de $\hat{\underline{\underline{F}}}_t^\sigma$ de la manière (classique) suivante

$$A \in \hat{\underline{\underline{F}}}_t^\sigma \Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{R}_+ \quad \theta_s^{-1}(A) \cap \{\sigma > s+t\} \underset{p.s.}{=} A \cap \{\sigma > s+t\}$$

(l'ensemble exceptionnel de mesure nulle sur lequel l'égalité précédente n'a pas lieu pouvant éventuellement dépendre de t) ; on appellera $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t^{\sigma,m})$ la famille de tribus obtenue en complétant la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t^\sigma)$ par rapport à $\underline{\underline{F}}_\infty$ et à la probabilité P_m ; si Z est un processus mesurable, on notera $\hat{Z}$ le processus

$$Z_{(\sigma(\omega)-t)^+}(\omega)$$

on a la proposition suivante :

PROPOSITION. - <u>Soit</u> Z <u>un processus mesurable</u> ; <u>supposons que</u> $Z.1_{]0,\sigma]}$ <u>soit</u> H^g - <u>mesurable</u> ; <u>alors</u> $\hat{Z}$ <u>est bien-mesurable relativement à la famille de tribus</u> $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t^\sigma)$. <u>Si</u> $Z\, 1_{[0,\sigma[}$ <u>est</u> $\underline{\underline{H}}^d$ - <u>mesurable</u>, <u>le processus</u> $\hat{Z}\, 1_{]0,\infty]}$ <u>est prévisible relativement à la famille</u> $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t^\sigma)$.

<u>Réciproquement soit</u> m <u>une mesure initiale</u>, <u>et</u> Z' <u>un processus bien mesurable</u> (<u>resp. prévisible</u>) <u>relativement à la famille</u> $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t^{\sigma,m})$; <u>il existe un processus</u> Z P_m - <u>indistinguable de</u> Z' <u>tel que</u> $\hat{Z}$ <u>soit</u> $\underline{\underline{H}}^g$ (<u>resp</u>. $\underline{\underline{H}}^d$ - <u>mesurable</u>).

DEMONSTRATION. - Soit Z un processus tel que $Z\, 1_{]0,\sigma]}$ soit $\underline{\underline{H}}^g$ - mesurable. Il suffit de raisonner dans le cas où Z est continu à gauche et limité à droite, $\hat{Z}$ est alors continu à droite limité à gauche ; montrons qu'il est adapté à la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t^\sigma)$; on a

$$(\hat{Z}_t \circ \theta_s)\, 1_{\{\sigma > s+t\}} = (Z_{(\sigma-t)^+} \circ \theta_s)\, 1_{\{\sigma > s+t\}} \underset{p.s.}{=} \hat{Z}_t\, 1_{\{\sigma > s+t\}}$$

Le processus $\hat{Z}$ est donc bien-mesurable ; on démontrerait de même que si $Z\,1_{[0,\sigma[}$ est $\underline{\underline{H}}^d$ - mesurable, $\hat{Z}\,1_{]0,\infty]}$ est prévisible relativement à la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}{}^{\sigma}_t)$.

Démontrons maintenant la réciproque. Supposons tout d'abord que Z' soit un intervalle stochastique $[T'_1, T'_2[$ (T'_1 et T'_2 sont deux temps d'arrêt de la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}{}^{\sigma,m}_t)$) ; il existe deux temps d'arrêt T_1 et T_2 de la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}{}^{\sigma}_t)$ tels que $P_m[T_1 \neq T'_1] = P_m[T_2 \neq T'_2] = 0$. Les variables aléatoires $(\sigma - T)^+$ et $(\sigma - T_2)^+$ sont des temps de retour, et le processus $1_{](\sigma - T_2)^+\,,\,(\sigma - T_1)^+]}$ répond à la question.

Remarque. - On peut évidemment déduire le théorème de section 8.2. de la proposition précédente.

8.5. - PROPOSITION. - <u>Soit</u> A <u>une fonctionelle additive</u> (<u>non nécessairement adaptée</u>) <u>intégrable</u>. <u>Le processus croissant continu à gauche</u> $\hat{A}$ <u>défini par l'égalité</u> $\hat{A}_t = A_\sigma - A_{(\sigma - t)+}$ <u>est adapté à la famille</u> $(\hat{\underline{\underline{F}}}{}^{\sigma}_t)$. <u>Réciproquement si un processus croissant</u> $\hat{A}$, <u>continu à gauche</u>, <u>intégrable</u>, <u>est adapté à</u> $(\hat{\underline{\underline{F}}}{}^{\sigma,m}_t)$, <u>alors le processus croissant</u> A <u>défini par la formule</u> $A_t = \hat{A}_\sigma - \hat{A}_{(\sigma-t)+}$ <u>est</u> P_m - <u>indistinguable d'une fonctionnelle additive</u>.

DEMONSTRATION. - La première partie de cette proposition a déjà été vue en 8.2. Pour démontrer la réciproque, considérons le processus $A_\infty - A_t$; on a $A_\infty - A_t = \hat{A}_\sigma - (\hat{A}_\sigma - \hat{A}_{(\sigma-t)+}) = \hat{A}_{(\sigma-t)+}$. D'après la proposition précédente $A_\infty - A_t$ est P_m - indistinguable d'un processus $\underline{\underline{H}}^d$ - mesurable, ce qui montre que A est indistinguable d'une fonctionnelle additive.

8.6. - PROPOSITION. - <u>Soit</u> A <u>une fonctionnelle additive non adaptée admettant un potentiel fini</u>. <u>Il existe une fonctionnelle additive naturelle</u> B <u>telle que</u>, <u>quelle que soit la mesure initiale</u>, <u>la projection duale prévisible du processus croissant</u> A <u>soit indistinguable de</u> B .

DEMONSTRATION. - Cette proposition n'est rien d'autre que le théorème de représentation de Meyer : la fonction $x \to E_x[A_\infty]$ est un potentiel fini de la classe (D). La fonctionnelle additive naturelle B engendrant ce potentiel répond à la question.

8.7. - THEOREME. - Plaçons nous sous l'hypothèse (L) de Meyer, et désignons par ξ la mesure de base. Soit B un borélien finement parfait de l'espace d'état E d'un processus de Hunt ; B est le support fin d'une fonctionnelle additive continue, adaptée, de potentiel borné.

DEMONSTRATION. - Considérons l'ensemble aléatoire Γ fermeture de l'ensemble aléatoire $\{(\omega,t) ; X_t(\omega) \in B\}$ des impacts de X dans B. Il est facile de voir que Γ est $\underline{\underline{H}}^g$-mesurable. Raisonnons alors sur le triplet $(\Omega,(\hat{\underline{\underline{F}}}_t^{\zeta,\xi}), P_\xi)$ où ζ est la durée de vie du processus que l'on supposera finie, quitte à raisonner sur un λ-processus. L'ensemble $\hat{\Gamma}$ est alors bien mesurable relativement à la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t^{\zeta,\xi})$, et est parfait. D'après un théorème de Dellacherie (TGP, VI - T 38) il existe un processus croissant $\hat{A}$ continu, borné, adapté à la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t^{\zeta,\xi})$ et admettant $\hat{\Gamma}$ pour support ; la proposition 8.5. nous dit alors que le processus $A'_t = A_\sigma - A_{(\sigma-t)^+}$ est P_ξ-indistinguable d'une fonctionnelle additive A non adaptée. Comme $\hat{A}$ est borné, A' est borné et l'on peut prendre A bornée. On applique alors la proposition 8.6., et l'on voit qu'il existe une fonctionnelle additive naturelle C indistinguable de la projection duale prévisible de A. Regardons alors quelles sont les propriétés de C.

a) Il est clair que le processus croissant A' est P^ξ-presque sûrement continu ; il en est donc de même du processus A. Le processus $(A - A_-)$ est donc P^ξ indistinguable de 0 et est $\underline{\underline{H}}^g$-mesurable ; d'après le corollaire 1 du théorème de section il est évanescent, ce qui montre que la fonctionnelle additive A est continue. Le potentiel $x \to E_x[A_\infty]$ est alors régulier ; il en résulte que C est continue.

b) Comme A est continue, C est aussi la projection duale bien mesurable de A ; on peut en effet écrire si Z est un processus bien mesurable borné

$$E_\xi [\int_0^\infty Z_t \, dA_t] = E_\xi [\int_0^\infty {}^3Z_t \, dA_t] = E_\xi [\int_0^\infty {}^3Z_t \, dC_t] = E_\xi [\int_0^\infty Z_t \, dC_t]$$

(La première et la dernière égalité résultant du fait que l'ensemble $\{Z \neq {}^3Z\}$ est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt). Montrons alors que C admet Γ pour support, P_ξ - presque sûrement :

On a $1_\Gamma * A = A$. Projetons cette égalité sur la tribu des bien-mesurables et utilisons le théorème (V-T 31) de TGP, il vient : $1_\Gamma * C = C$, ce qui montre que C est porté par Γ. D'autre part si Γ' est un fermé bien mesurable strictement inclus dans Γ on a

$1_{\Gamma-\Gamma'} * A \neq 0$ d'où $1_{\Gamma-\Gamma'} * C \neq 0$, ce qui montre que Γ est bien le support de C relativement à P_ξ. Il en résulte que Γ et le support de C sont P^ξ - indistinguable ; comme il s'agit de deux $\underline{\underline{H}}^g$ - mesurables, c'est qu'ils sont indistinguables.

Il en résulte aisément que C admet B pour support fin.

8.8. - ENSEMBLES PROJECTIFS

Rappelons que Motoo a défini comme suit les ensembles projectifs : un sous-ensemble presque borélien Γ de E est dit projectif si la réduite sur Γ de tout λ - potentiel régulier de la classe (D) est encore régulière ; on sait que tout compact K tel que $K = K_r$ à un ensemble polaire près est projectif (cf. [3]). Nous allons supposer ici qu'il y a deux processus de Hunt X et $\hat{X}$ en dualité, et nous allons donner une condition plus faible pour qu'un ensemble soit projectif, et qui sera nécessaire et suffisante.

LEMME. - <u>Soit</u> A <u>un ensemble presque borélien finement fermé de</u> E. ; <u>notons</u> A^c <u>la fermeture cofine de</u> A, <u>et</u> Γ <u>l'ensemble aléatoire</u> $\{(\omega,t) ; X_{t-}(\omega) \in A\}$.

<u>L'ensemble aléatoire</u> $\Gamma' = \{(\omega,t) : X_{t-}(\omega) \in A^c\}$ <u>est alors le plus petit ensemble</u> $\underline{\underline{H}}^g$<u>-mesurable contenant la fermeture à gauche de</u> Γ.

DEMONSTRATION. - On sait d'après un résultat de Weil [8] que Γ' est fermé à gauche. Appelons Γ^g la fermeture à gauche de Γ ; on a donc $\Gamma' \supset \Gamma^g$. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'énoncé du lemme soit en défaut pour une mesure P_{x_o}. Il existerait alors un temps de retour τ dont le graphe serait contenu dans $\Gamma' - \Gamma^g$ et tel que $P_{x_o}\{\tau > 0\} > 0$; considérons alors la fonctionnelle additive naturelle B engendrant le potentiel $u(x) = P_x\{\tau > 0\}$. D'après les résultats de [1], B est portée par $A^c - A$; en effet on peut écrire

$$E_x\left[\int_o^\infty 1_{A^c}(X_t)\, dB_t\right] = P_x\left[X_{\tau^-} \in A^c ; \tau > 0\right] = u(x)$$

$$\text{et} \quad E_x \int_o^\infty 1_A(X_t)\, dB_t = P_x\left[X_{\tau-} \in A ;\ \tau > 0\right] = 0 .$$

Or, d'après un résultat de Azéma - Duflo - Revuz [2] dont on trouvera une démonstration détaillée dans [7], on peut associer à B une mesure ν_B sur E telle que u soit le potentiel de la mesure ν_B. D'après ce qui précède ν_B est portée par les points co-réguliers de A ; il en résulte que $P_A u$ qui, d'après la formule de dualité de Hunt, est le potentiel de la mesure $\nu_B \hat{P}_A$, est égale à u ; à fortiori $\bar{P}_A u = u$ ($\bar{P}_A u$ désigne la réduite extérieure de u sur A). Mais si l'on se reporte à l'interprétation de la réduite extérieure donnée précédemment dans [1], on voit que u est le potentiel d'équilibre de charge $\bar{L}^A_\tau$ où l'on a posé

$$\bar{L}^A(\omega,t) = \sup\{s ;\ s \le t ; X_{s-}(\omega) \in A\} .$$

u serait donc à la fois le potentiel d'équilibre d'un temps de retour τ dont le graphe n'appartiendrait pas à Γ^g, et d'un temps de retour $\bar{L}^A_\tau$ dont le graphe est contenu dans Γ^g ; on en tire une contradiction, puisqu'on aurait alors pour la loi P_{x_o}

$$0 = E_{x_o}\left[\int_o^\infty 1_{\Gamma^g}(\omega,t)\, dB_t(\omega)\right] = P_{x_o}\{\bar{L}^A_\tau \in \Gamma^g ; \bar{L}^A_\tau > 0\} = P_{x_o}\{\tau > 0\} > 0 .$$

On peut alors énoncer le théorème suivant, qui caractérise les ensembles projectifs.

THEOREME. - Soit Γ un sous-ensemble presque-borélien de E ; Γ est projectif si et seulement si la fermeture cofine de sa fermeture fine ne diffère de l'ensemble Γ_r que par un ensemble polaire.

DEMONSTRATION. - Si $\tilde{\Gamma}$ est la fermeture fine de Γ la réduite d'une fonction excessive sur Γ est égale à la réduite sur $\tilde{\Gamma}$. D'autre part $\tilde{\Gamma}_r = \Gamma_r$; de ces deux remarques il résulte qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas ou Γ est un fermé fin ; ce que nous supposerons.

a) Supposons que la fermeture cofine Γ^c de Γ ne diffère de Γ_r que pour un ensemble polaire ; soit u un potentiel de fonctionnelle additive continue. D'après le résultat de Azéma - Duflo - Revuz rappelé précédemment u est le potentiel d'une mesure ν et $P^\lambda_\Gamma u$ est le potentiel de la mesure $\nu \hat{P}^\lambda_\Gamma$. Il en résulte que la fonctionnelle B associée à P^λ_Γ est portée par Γ^c et donc par Γ (d'après l'hypothèse). Il suffit alors d'appliquer le théorème 7 - 12 de [1] : Γ_r est contenu dans $\{P^\lambda_\Gamma u = u\}$, donc B est continue.

b) Réciproquement supposons que Γ soit un fermé fin projectif, montrons qu'il satisfait aux conditions de l'énoncé. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\Gamma^c - \Gamma_r$ n'est pas polaire ; comme on est sous l'hypothèse (B), cet ensemble n'est pas non plus polaire à gauche ; autrement dit, il existe $x_o \in E$ tel que pour la loi P_{x_o}, l'ensemble aléatoire $C = \{(\omega,t) ; X_{t^-}(\omega) \in \Gamma^c - \Gamma\}$ ne soit pas évanescent. Appelons alors e^λ_Γ la fonction $x \to E_x e^{-\lambda T_\Gamma}$. D'après l'hypothèse e^λ_Γ est un potentiel régulier de la classe (D).

On a vu que la surmartingale $e^{-\lambda t}\, e^\lambda_\Gamma(X_t)$ était la réduite extérieure de $e^{-\lambda t}$ sur l'ensemble aléatoire $H = \{(\omega,t)\}; X_{t^-}(\omega)$; c'est donc aussi la réduite extérieure de $e^{-\lambda t}$ sur la fermeture à gauche H^g de H.

On sait alors d'après [1] que $e^\lambda_\Gamma(X_t)_- = 1$ sur H^g et, d'après le lemme précédent, cela entraîne $\{e^\lambda_\Gamma(X)_- = 1\} \supset \{X_- \in \Gamma^c\}$, puisque $e^\lambda_\Gamma(X)_-$ est $\underline{\underline{H}}^g$-mesurable .

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. AZÉMA - Quelques applications de la théorie générale des processus (à paraître)

[2] J. AZÉMA, M. KAPLAN - DUFLO, D. REVUZ - Comptes rendus T-267 p. 313-315 (19 Août 1968)

[3] R.M. BLUMENTHAL and R.K. GETOOR - Markov Processes and potential theory (Academic Press 1968)

[4] C. DELLACHERIE - La théorie générale des processus. (à paraître) Springer

[5] P.A. MEYER - Processus de Markov. Lecture notes in Mathematics 26. Springer Heidelberg 1967

[6] NAGASAWA - Nagoya Journal of Mathematics T. 24 p. 177-204 (1964)

[7] D. REVUZ - Trans. Amer Math. Soc 148 1970 p. 517

[8] M. WEIL - Z. Wahrscheinlichkeits theorie Geb - 12 (1969) 75-86