SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DANIEL REVUZ

Le principe semi-complet du maximum

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 202-214
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__202_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LE PRINCIPE SEMI-COMPLET DU MAXIMUM

D. REVUZ(*)

(Paris)

Il est bien connu que le potentiel U d'un processus de Markov transient ou mieux d'une résolvante transiente vérifie le principe complet du maximum : si f et g sont des fonctions mesurables positives et si $a \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité

$$Uf \leq a + Ug \quad \text{sur} \quad \{f > 0\} \ ,$$

entraîne

$$Uf \leq a + Ug \quad \text{partout.}$$

De même le noyau potentiel G d'une chaîne de Markov transiente vérifie le principe plus fort dit principe complet du maximum renforcé :

$$Gf \leq a + Gg - g \quad \text{sur} \quad \{f > 0\}$$

entraîne

$$Gf \leq a + Gg - g \quad \text{partout.}$$

Le problème de savoir si ces propriétés sont caractéristiques, c'est-à-dire, étant donné un noyau ayant l'une de ces propriétés de construire une résolvante ou une chaîne transiente dont ce soit le potentiel a été traité par Hunt ([1]) puis par de nombreux auteurs dans le cas du principe complet du maximum et par Meyer ([5]) dans le cas du principe renforcé.

Notre propos est d'étudier comment le problème se transpose au

---

(*) Equipe de Recherche n° 1 "Processus stochastiques et applications" dépendant de la section n° 2 "Théories physiques et Probabilités" associée au C.N.R.S.)

cas récurrent et de dire les solutions partielles qui lui ont été apportées jusqu'à présent.

I. NOYAUX POTENTIELS DANS LE CAS RECURRENT. PRINCIPES SEMI-COMPLETS DU MAXIMUM

Dans le cas récurrent où il n'y a pas de noyau potentiel au sens classique il convient de lui définir un substitut. Ce problème a fait l'objet de nombreux travaux ([12],[2],[8],[3],[11]), et vient de recevoir une solution générale grâce à des résultats de Neveu ([7]) que nous allons d'abord décrire rapidement.

(1.1) Soit $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace mesurable de type dénombrable et X une chaîne de Markov sur E, de probabilité de transition P. On suppose X récurrente au sens de Harris, c'est-à-dire qu'il existe une mesure invariante μ telle que si $A\in\underline{\underline{E}}$ et $\mu(A)>0$,

$$P_x[\sum_{n=1}^{\infty} 1_A(X_n) = \infty] = 1 \quad \text{pour tout} \quad x\in E .$$

(Toutes les notations non précisées sont celles qui sont habituelles dans la théorie des chaînes et des processus de Markov).

En suivant Neveu ([7]) appelons $\underline{\underline{H}}$ l'espace des fonctions de $\underline{\underline{E}}$ comprises entre 0 et 1 et pour $h\in\underline{\underline{H}}$ définissons l'opérateur

$$U_h = \sum_{n=1Q}^{\infty} (PM_{1-h})^n P = \sum_{n=1}^{\infty} P(M_{1-h}P)^n$$

où M_g est l'opérateur de multiplication par g. En particulier pour $h=1$ on a $U_h = P$ et pour $h=1_A (A\in\underline{\underline{E}})$,

$$U_h f(x) = E_x[\sum_{n=1}^{n=T'_A} f(X_n)]$$

où T'_A est le temps de retour à A. On écrira U_A pour U_{1_A} et l'on a $U_A M_A = \Pi_A$ où $M_A\Pi_A$ est la probabilité de transition de la trace de X sur A.

Ces opérateurs sont très maniables à cause de l'équation résolvente suivante : pour $h,k \in \underline{\underline{H}}$ et $h \leq k$ on a

$$U_h - U_k = U_h M_{k-h} U_k = U_k M_{k-h} U_h \ .$$

Neveu montre qu'il existe une fonction $h_1 \in \underline{\underline{H}}$ telle que

$$U_{h_1} \geq 1 \otimes \mu,$$

et qu'en posant $V = U_{h_1} - 1 \otimes \mu$ et

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} (VM_{h_1})^n V = \sum_{n=1}^{\infty} V(M_{h_1} V)^n$$

on définit un noyau, <u>positif</u>, <u>propre</u>, et qui pour $h \in \underline{\underline{H}}$ et non négligeable vérifie les équations résolventes

(1.2) $$U_h + U_h M_h W = W + \frac{1}{\mu(h_1)} U_h(h_1) \otimes \mu$$

et $$U_h + W M_h U_h = W + \frac{1}{\mu(h_1)} 1 \otimes (h_1 \mu) U_h \ .$$

Nous poserons $G = I+W$. Le noyau G est un opérateur potentiel possible pour la chaîne X ce que nous allons justifier de deux manières différentes.

(1.3) Neveu définit les <u>fonctions spéciales</u> comme les fonctions f bornées positives telles que $U_h f$ soit bornée pour une fonction h telle que $U_h \geq 1 \otimes m$ pour une mesure m positive non nulle ; les fonctions $U_h f$ sont alors bornées quelle que soit h . Le cône des fonctions spéciales est évidemment héréditaire à gauche, il est stable par les opérateurs U_h et donc en particulier par P ; Wf est borné pour toutes les fonctions spéciales.

Nous dirons que f est une <u>charge</u> si $|f|$ est spéciale, non négligeable et si $<\mu, f> = 0$. On désignera par $\underline{\underline{N}}$ l'espace des charges. Le noyau G permet de résoudre l'équation de Poisson pour les charges.

PROPOSITION (Neveu).- <u>Si</u> $f \in \underline{\underline{N}}$, <u>alors</u>

$$(I-P)Gf = f$$

(1.4) D'autre part, pour $A \in \underline{\underline{E}}$, si on note P_A l'opérateur de balayage associé à A et G^A l'opérateur potentiel de la chaîne tuée à l'entrée dans A , on a entre G, G^A, P^A une relation semblable à celle du cas transient.

PROPOSITION.- Si A n'est pas négligeable, on a

$$P_A G = G - G^A + \frac{M_A c U_A(h_1)}{\mu(h_1)} \otimes \mu \quad .$$

Démonstration. Comme $P_A = M_A + M_A c U_A M_A$, on a

$$P_A G = P_A + P_A W = P_A + M_A W + M_A c\, U_A M_A W$$

et en utilisant l'équation résolvente (1.2)

$$P_A G = P_A + M_A W + M_A c(W - U_A + \frac{1}{\mu(h_1)} U_A(h_1) \otimes \mu) \; .$$

On a d'autre part

$$P_A + G^A = \sum_{n \geq 0} (M_A c\, P)^n = I + M_A c(\sum_{n \geq 0} (M_A c P)^n) = I + M_A c U_A$$

ce qui donne finalement

$$P_A G = M_A W + M_A c W + I - G^A + \frac{M_A c U_A(h_1)}{\mu(h_1)} \otimes \mu$$

$$= G - G^A + \frac{M_A c U_A(h_1)}{\mu(h_1)} \otimes \mu \quad .$$

On en déduit facilement

(1.5) THEOREME.- Le noyau G satisfait au principe semi-complet du maximum renforcé suivant : si $f \in \underline{\underline{N}}$, et $m \in \mathbb{R}$, l'inégalité

$$Gf \leq m \quad \text{sur } \{f > 0\}$$

entraîne $\quad Gf \leq m - f^- \quad$ partout.

Démonstration. L'ensemble $A=\{f>0\}$ n'est pas négligeable puisque f ne l'est pas. En appliquant à A la proposition précédente, on trouve que $Gf\leq m+G^A f$ partout et comme $G^A\geq M_A$ on a le résultat souhaité.

(1.6) Les résultats précédents permettent aussi d'obtenir des résultats pour les processus et les résolventes récurrentes. Soit (U^α_α) $\alpha\geq 0$ une résolvente de noyaux sous-markoviens sur E. Nous dirons que U_α est récurrente au sens de Harris si il existe une mesure invariante μ $(\mu U_1=\mu)$ telle que pour $A\in \underline{\underline{E}}$ et $\mu(A)>0$, on aie

$$U^o(x,A)=\infty \quad \forall x\in E \quad .$$

Cela entraîne que toutes les chaînes de Markov sur E de probabilité de transition αU_α sont récurrentes au sens de Harris.

Soit alors W l'opérateur défini par Neveu pour la chaîne de probabilité de transition U^1_1 ; on a

$$U_1+U_1W=W+\frac{1}{\mu(h_1)}\, U_1(h_1)\otimes\mu \;.$$

Si pour $\alpha>0$ on calcule $U_\alpha W$, en utilisant l'équation résolvante on trouve

$$U_\alpha+\alpha U_\alpha W=W+\frac{1}{\mu(h_1)}\, U_\alpha(h_1)\otimes\mu \;.$$

L'opérateur $I+\alpha W$ est donc l'opérateur potentiel pour la chaîne de probabilité de transition αU_α et les espaces des fonctions spéciales et des charges ne dépendent pas de α.

THEOREME.- Le noyau W satisfait au principe semi complet du maximum suivant : si $f\in\underline{\underline{N}}$ et $m\in\mathbb{R}$, l'inégalité

$$Wf\leq m \quad \text{sur} \quad \{f>0\}$$

entraîne

$$Wf\leq m \quad \text{partout.}$$

Démonstration : D'après l'hypothèse quelle que soit α on a

$$(I+\alpha W)f \leq \alpha m + \|f\| \quad \text{sur} \quad \{f>0\} .$$

Donc d'après (1.5) on a

$$(I+\alpha W)f \leq \alpha m + \|f\| - f^- \qquad \text{partout,}$$

soit encore $\frac{f}{\alpha} + Wf \leq m + \frac{\|f\|-f^-}{\alpha}$ partout, et il ne reste plus qu'à faire tendre α vers l'infini pour obtenir le résultat.

(1.7) Terminons ce paragraphe par le cas particulier qui va vous occuper dans le suivant. Si nous supposons E localement compact à base dénombrable et U_α fortement fellenienne, la mesure μ est une mesure de Radon chargeant tous les ouverts et l'on a

PROPOSITION.- Les fonctions bornées à support compact sont spéciales. De plus pour tout compact K, l'opérateur W est un opérateur compact de l'espace $\underline{\underline{B}}_K$ des fonctions bornées à support dans K dans l'espace $\underline{\underline{C}}_b(E)$ des fonctions continues bornées.

Démonstration : Soit h_o une fonction spéciale non négligeable, alors d'après Neveu ([7] prop. IV.7) U_1h_o est une fonction spéciale strictement positive et continue. Les fonctions bornées à support compact sont majorées par un multiple de U_1h_o et sont donc spéciales.

Considérons maintenant l'ensemble des fonctions f de $\underline{\underline{B}}_K$ de norme inférieure ou égale 1 . On a $|Wf| \leq |W1_K| \leq M < \infty$ et donc d'après (1.2)

$$|Wf(x) - Wf(y)| \leq (1+M)\|U_1(x_1,.)-U_1(y,.)\| + \frac{\mu(K)}{\mu(h_1)}|U_1h_1(x)-U_1h_1(y)| .$$

comme d'après Mokobodzky ([6]) l'application $x \to \|U_1(x,.)\|$ est continue et que la fonction U_1h_1 est continue, on voit facilement que les restrictions à tout compact des fonctions Wf forment un ensemble équicontinu.

II. CONSTRUCTION DE RESOLVENTES RECURRENTES

(II.1) Il est naturel de se demander si les propriétés précédentes sont caractéristiques . Plus précisément soit $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace mesurable, μ une mesure sur $\underline{\underline{E}}$, U un noyau propre sur $(E,\underline{\underline{E}})$ et $\underline{\underline{N}}$ une classe de fonctions bornées non négligeables telles que pour $f \in \underline{\underline{N}}$, la fonction $U(|f|)$ soit bornée et $\langle\mu, f\rangle = 0$.

DEFINITION.- On dit que U satisfait au principe semi-complet du maximum (resp. du maximum renforcé) pour les éléments de $\underline{\underline{N}}$ si pour $f \in \underline{\underline{N}}$ et $m \in \mathbb{R}$ l'inégalité

$$Uf \leq m \quad \text{sur } \{f>0\} ,$$

entraîne

$$Uf \leq m \quad \text{partout (resp. } Uf \leq m-f^{-} \text{ partout).}$$

On abrégera le nom des principes en SCM et SCMR .

On a donc le problème suivant : si U satisfait à SCM ou SCMR est-ce le potentiel d'une résolvente ou d'une chaîne récurrente de mesure invariante μ ?

Ce problème n'a encore reçu que des réponses très partielles par Kondo ([4]) et Oshima ([9]) dans le cas d'un espace E dénombrable et dans [11] dans le cas où E est compact et U fortement fellerien.

Nous allons maintenant esquisser la méthode de Kondo en la transposant à un cadre plus général.

(II.2) Dans toute la suite nous considèrerons un espace E localement compact à base dénombrable, une mesure de Radon μ sur E chargeant tous les ouverts. On appelle $\underline{\underline{N}}$ l'espace des fonctions bornées à support compact non négligeables et d'intégrale nulle pour μ . Et l'on considère un noyau U positif propre sur $(E,\underline{\underline{E}})$ satisfaisant à SCM et compact de $\underline{\underline{B}}_K$ dans $\underline{\underline{C}}_B(E)$ pour tout compact non négligeable $K \subset E$.

On peut trouver une fonction h intégrable, strictement positive et bornée, telle que Uh soit une fonction continue bornée (par exemple si K_n est une suite croissante et exhaustive de compacts, en posant $h = \sum_n [(1_{K_n} - 1_{K_{n-1}}) / \mu(K_n - K_{n-1}).2^n.\|U(.,K_n)-U(.,K_{n-1})\|]$. Si l'on pose alors

$$\tilde{U}\, g = U(hg)$$

on définit ainsi un noyau compact de $b_{\underline{\underline{E}}}$ dans $\underline{\underline{C}}_b(E)$ et vérifiant SCM par rapport à la mesure bornée $h\mu$.

Nous allons d'abord étudier $\tilde{U}$ mais pour alléger l'écriture nous supposerons plutôt que c'est μ qui est bornée et que U a la propriété de compacité ci-dessus : on posera $G = I+U$.

LEMME.- <u>L'opérateur</u> $I+\alpha U$ <u>satisfait à</u> SCMR <u>quelque soit le nombre positif</u> α .

<u>Démonstration</u> : facile et utilise seulement le fait que U satisfait à SCM .

(II.3) LEMME.- <u>Si</u> $f \in \underline{\underline{N}}$, Gf <u>n'est pas constante sur</u> $\{f \neq 0\}$; <u>en particulier</u> G <u>est injectif sur</u> $\underline{\underline{N}}$.

<u>Démonstration</u> : Si $Gf = m$ sur $\{f \neq 0\}$, SCMR entraîne $Gf \leq m - f^-$ partout donc en particulier sur $\{f < 0\}$ ce qui entraîne $f^- = 0$ et par suite $f^+ = 0$ μ-ps et donc $f = 0$.

(II.4) Le lemme suivant est crucial et montre l'existence pour tout compact non négligeable K , d'une mesure de "co-équilibre" dans la théorie du potentiel liée à G .

LEMME.- <u>Pour tout compact non négligeable</u> K , <u>il existe une probabilité</u> λ^K <u>unique, portée par</u> K <u>et telle que</u>

i) $< \lambda^K, 1 > = 1$,

ii) $< \lambda^K, Gf > = 0 \qquad \forall f \in \underline{\underline{N}} \cap B_K$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\underline{\underline{C}}_K$ l'espace des fonctions continues sur K , nulles hors de K . L'opérateur $f \to (Uf)1_K$ est d'après nos hypothèses un opérateur compact de $\underline{\underline{C}}_K$

dans $\underline{\underline{C}}_K$ donc aussi de $\underline{\underline{N}} \cap \underline{\underline{C}}_K$ dans $\underline{\underline{C}}_K$. Le sous-espace fermé $\underline{\underline{N}} \cap \underline{\underline{C}}_K$ est de codimension 1 dans $\underline{\underline{C}}_K$ donc I est un opérateur d'indice 1 de $\underline{\underline{N}} \cap \underline{\underline{C}}_K$ dans $\underline{\underline{C}}_K$; l'opérateur

$$f \to f+(Uf)1_K = (Gf)1_K$$

de $\underline{\underline{N}} \cap \underline{\underline{C}}_K$ dans $\underline{\underline{C}}_K$ est donc également d'indice 1 d'après le théorème de l'indice. Son image est donc de codimension 1, elle est donc fermée d'après un théorème de Banach et comme elle ne contient pas 1_K d'après le lemme précédent l'existence et l'unicité de λ^K en résultent immédiatement.

(II.5) L'idée de Kondo est d'utiliser λ^K pour construire les opérateurs de balayage de la chaîne que l'on cherche à construire. Ceci se fait de la façon suivante :

Soit $g \in b\underline{\underline{E}}$, on pose $h^K = (g - <\lambda^K, g>)1_K$. La fonction h^K est dans $\underline{\underline{B}}_K$ et vérifie $<\lambda^K, h^K> = 0$. Il existe donc d'après ce qui précède une fonction $f^K \in \underline{\underline{N}} \cap \underline{\underline{B}}_K$ telle que $h^K = (Gf^K)1_K$. On pose alors

$$P_K g = Gf^K + <\lambda^K, g> ,$$

$$\Pi_K g = Gf^K + <\lambda^K, g> - f^K = P_K g - f^K$$

$$= Uf^K + <\lambda^K, g> ;$$

on remarque que si $g \in \underline{\underline{B}}_K$, on a $P_K g = g$, que $\Pi_K g$ est une fonction continue On a aussi $P_K g = \Pi_K g$ sur K^c et $\Pi_K \geq 1 \otimes \lambda^K$.

Par une application répétée du principe SCMR pour G on montre alors exactement comme Kondo :

LEMME.- <u>P_K et Π_K sont définis par des noyaux markoviens portés par</u> K. <u>On a</u> $\mu 1_K \Pi_K = \mu 1_K$ <u>et</u>

$$(I-\Pi_K)Gf = f ,$$

<u>pour</u> $f \in \underline{\underline{N}} \cap \underline{\underline{B}}_K$.

Si H et K sont deux compacts et $H \subset K$ on a

$$P_K P_H g = P_H g \ , \ \Pi_K P_H g = \Pi_H g$$

et si $g \in \underline{\underline{B}}_H^+$, $\Pi_K g \leq \Pi_H g$.

(II.6) Ceci permet de démontrer le

THEOREME.- <u>Il existe une probabilité de transition unique</u> P <u>fortement fellerienne pour laquelle</u> μ <u>est invariante et telle que</u> $\forall f \in \underline{\underline{N}}$,

$$(I-P)Gf = f \ .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de compacts croissants vers E . Si g est une fonction bornée positive à support compact, d'après le lemme précédent, la suite des $\Pi_{K_n} g$ décroît à partir d'un certain rang. On pose

$$\begin{aligned} Pg(x) &= \lim_n \Pi_{K_n} g(x) \\ &= \lim_n (Uf^{K_n}(x) + \langle \lambda^{K_n}, f^{K_n} \rangle) \end{aligned}$$

Dès que K_n contient le support de g , on a $\Pi_{K_n} g = g - f^{K_n}$ et donc $\|f^{K_n}\| \leq 2\|g\|$. Par suite l'ensemble des fonctions Uf^{K_n} est équicontinu d'après l'hypothèse faite sur U , on peut en extraire une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact et par suite la fonction P_g est continue.

D'autre part, comme $1_{K_n} \Pi_{K_n} g$ converge vers Pg et que $\langle \mu, 1_{K_n} \Pi_{K_n} g \rangle = \langle \mu, 1_{K_n} g \rangle$ on a en passant à la limite (μ est bornée) $\langle \mu, Pg \rangle = \langle \mu, g \rangle$ ce qui prouve que μ est invariante par P .

D'autre part si $f \in \underline{\underline{N}}$, en posant $g = Gf + \|Gf\| = f + Uf + \|Gf\|$ on a

$$Pg \leq \underline{\lim} \, \Pi_{K_n} g = Gf - f + \|Gf\|$$

d'après le lemme précédent, donc

$$PGf \leq Gf - f$$

et en appliquant ceci à $(-f)$ on trouve que

$$PGf = Gf - f .$$

L'unicité de P résulte du raisonnement suivant. Si $\tilde{P}$ est une probabilité de transition pour laquelle μ est invariante, on a $\tilde{P}(.,E) = 1$ μ.ps Si $\tilde{P}(x,E) = 1$ et si g est bornée à support compact on a

$$\tilde{P}_g(x) = \lim_n \tilde{P} P_{K_n} g(x) = \lim_n \tilde{P}(Gf^{K_n} + < \lambda^{K_n}, g >)(x)$$

$$= \lim_n (Gf^{K_n} - f^{K_n} + < \lambda^{K_n}, g >)(x) = \lim_n P P_{K_n} g(x) = Pg(x).$$

On a donc $\tilde{P}g = Pg$ μ-ps et donc partout puisque ce sont des fonctions continues.

(II.7) Indiquons maintenant schématiquement comment construire une résolvente. Pour tout $\alpha > 0$ on peut faire avec l'opérateur $I+\alpha U$ ce que nous venons de faire avec l'opérateur $I+U$ et donc trouver une probabilité de transition fortement fellerienne P^{α} telle que $\mu P^{\alpha} = \mu$ et que pour $\forall f \in \underline{\underline{N}}$ on aie

$$(I-P^{\alpha})(I+\alpha U)f = f ,$$

soit en posant $U_{\alpha} = P^{\alpha}/\alpha$, $\mu \alpha U^{\alpha} = \mu$ et pour $f \in \underline{\underline{N}}$

$$Uf - U\alpha f - \alpha U_{\alpha} Uf = 0 .$$

Il n'est pas difficile de montrer que les noyaux U_{α} vérifient l'équation résolvante.

Il faut maintenant revenir à l'opérateur U du début de (II.2). Pour cela il suffit de faire le "changement de temps" associé à la fonction $1/f$. On sait ([11]) que la résolvante ainsi obtenue sera encore fortement fellerienne, mais la mesure $\mu = (\frac{1}{f})\tilde{\mu}$ n'est plus forcément invariante. Elle peut être excessive. La seule chose que l'on peut affirmer c'est que si μ est bornée, alors $1/f$ étant intégrable pour $\tilde{\mu}$, μ sera encore invariante et la résolvante trouvée récurrente (cf [10] § 3) .

Dans le cas d'un espace discret Kondo construit à partir de la résolvante ainsi construite un processus de Ray, mais dont on ne peut affirmer qu'il est récurrent que si μ est bornée. Il existe d'ailleurs effectivement des processus transients dont l'opérateur potentiel vérifie SCM pour une mesure excessive convenable. On peut par exemple montrer

PROPOSITION.- *Si* X_t *est un processus sur* $\mathbb{R}$ *à accroissements indépendants, transient et tel que* X_1 *soit* P_o*-intégrable (il existe une limite non nulle dans le théorème du renouvellement) alors le noyau potentiel satisfait à* SCM *pour la mesure de Lebesgue.*

Il serait intéressant de caractériser les processus transients satisfaisant à SCM et de caractériser les noyaux potentiels des processus récurrents de mesure invariante infinie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HUNT G.A. Markoff processes and potentials.
Ill. J. Math. 1 (1957), p.44-93 ; 316-369. 2. 151-213.

[2] KEMENY J. et J.L. SNELL Potentiel for denumerable Markov chains.
J. Math. Anal. and Appl. 3 (1961), p. 196-260.

[3] KONDO R. On weak potential operations for recurrent Markov chains with continuous parameters.
Osaka J. Math. 4 (1967), p. 327-344.

[4] KONDO R. On a construction of recurrent Markov chains.
Osaka J. of Math. 6 (1969), p. 13-28.

[5] MEYER P.A. Caractérisation des noyaux potentiels des semi-groupes discrets.
Ann. Inst. Fourier 162 (1966), p. 225-240.

[6] MEYER P.A. Les résolvantes fortement felleriennes d'après Mokobodsky.
Séminaire de Probabilités II. Springer-Verlag 1968.

[7] NEVEU J. Potentiel Markovien récurrent des chaînes de Harris.
A Paraître.

[8] ORNSTEIN D.S. Random Walks I .
T.A.M.S. 138 (1969), p. 1-43 .

[9] OSHIMA Y. A necessary and sufficient condition for a Kernel to be a weak potential kernel for a recurrent chain.
Osaka J. of Math. 6 (1969), p. 29-37.

[10] REVUZ D. Mesures associées aux fonctionnelles additives de Markov I.
T.A.M.S. 148 (1970), p. 501-531.

[11] REVUZ D. Sur la théorie du potentiel pour les processus de Markov récurrents.
A Paraître.

[12] SPITZER F. Principle of Random walks.
Van Nostrand 1960 .