GABRIEL MOKOBODZKI

Pseudo-quotient de deux mesures par rapport à un cône de potentiels. Application à la dualité

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 173-176
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__173_0>

Université de Strasbourg
Journées Probabilistes   31 Mars - 3 Avril 1971

PSEUDO-QUOTIENT DE DEUX MESURES PAR RAPPORT À UN CÔNE DE POTENTIELS . APPLICATION À LA DUALITÉ

par Gabriel MOKOBODZKI

Première partie : rappels

Cadre : X espace compact métrisable, $\mathfrak{R}=(V_\lambda)_{\lambda\geqq 0}$ une famille résolvante de noyaux $\geqq 0$ sur $\underline{C}(X)$ telle que

a) $V=V_0$ est borné et $\lambda V_\lambda 1 \leqq 1 \ \forall\ \lambda>0$

b) $V(\underline{C}(X))$ sépare X

c) Pour toute f borélienne bornée, $Vf \in \underline{C}(X)$

Notations : toutes les fonctions considérées sont numériques

B = fonctions boréliennes bornées sur X

B^+ = fonctions boréliennes bornées et positives sur X

C = fonctions surmédianes positives (pour $\mathfrak{R}$)

S = fonctions excessives positives (pour $\mathfrak{R}$)

$S_0 = V(B^+)$

Théorème : Si G désigne l'un des trois cônes convexes C,S,S_0, alors pour tous $u,v \in G$, $R(u-v) = \inf \{ w\in G \ ;\ w\geq u-v \}$ vérifie $R(u-v)\in G$ et $(u-R(u-v))\in G$ (propriété caractéristique des cônes de potentiels).

Dans le cadre considéré, l'hypothèse (L) est satisfaite : toute fonction $\mathfrak{R}$-excessive est semi-continue inférieurement, il existe $\mu\in\underline{M}^+(X)$ telle que V soit de base μ et que pour tout $u\in S$ ($\int u d\mu =0$) $\Rightarrow$ ($u\equiv 0$).

Frontière associée à $\mathfrak{R}$: C'est la frontière de Choquet de l'espace $V(\underline{C}(X))+ \mathbb{R}$, que l'on notera ∂X. L'ensemble ∂X est un G_δ et l'on a les propriétés suivantes :

1) Pour toute u surmédiane s.c.i., on a $\hat{u}(x)=u(x)\ \forall x\in\partial X$, où $\hat{u} = \sup\limits_\lambda \lambda V_\lambda u$.

2) Pour toute famille finie $(u_i) \subset S$, $\widehat{\inf_i u_i} = \inf u_i$ sur ∂X .

3) Pour toute forme linéaire croissante T sur $V(\underline{C}^+(X))$, bornée sur l'ensemble $\{ Vf \ ;\ f\in\underline{C}^+(X),\ Vf\leq 1 \}$, il existe une mesure μ et une seule portée par ∂X telle que

$$< T,Vf > = \int Vf\, d\mu \quad , \qquad \forall\ f \in \underline{C}^+(X)$$

4) Les mesures du type νV, où $\nu \in \underline{\underline{M}}^+(X)$, sont portées par ∂X.

Définition : 1) Sur ∂X on appelle topologie fine la topologie la moins fine rendant continus les éléments de S.

2) Pour tout $u \in S$, $A \subset \partial X$, $R^A u = \inf \{ w \in S, w \geq u \text{ sur } A \}$.

3) Un fermé fin $F \subset \partial X$ sera dit régulier si pour tout $u \in S$, $R^F u \in S$. (Il suffit pour cela que $R^F V1 \in S$).

Théorème : 1) Si $F \subset \partial X$ est un fermé fin régulier, alors

$$F = \{ V1 = R^F V1 \} \cap \partial X$$

F est donc un G_δ de X.

2) La réunion de deux fermés fins réguliers est un fermé fin régulier.

3) L'adhérence fine de la réunion d'une famille de fermés fins réguliers est un fermé fin régulier.

Additivité de la réduite et balayage des mesures

Théorème : 1) Pour tout ensemble $A \subset \partial X$ et tous $v_1, v_2 \in S$, on a

$$R^A_{v_1} + R^A_{v_2} = R^A_{v_1+v_2}$$

2) Si F est un fermé fin régulier, $F \subset \partial X$, pour toute mesure $\nu \in \underline{\underline{M}}^+(X)$, il existe une mesure ν^F et une seule, portée par $F \subset \partial X$, telle que

$$\int R^F_v \, d\nu = \int v \, d\nu^F \qquad \forall\, v \in S .$$

3) Pour tout $A \subset \partial X$, et toute $\nu \in \underline{\underline{M}}^+(X)$, il existe une mesure et une seule $\nu^A \in \underline{\underline{M}}^+(\partial X)$ telle que

$$\text{pour tout } u \in S_0 , \int u \, d\nu^A = \inf \{ \int R^\omega_u \, d\nu , \; \omega \text{ ouvert fin}, \omega \supset A \}$$

(Si A est un fermé fin régulier, les deux définitions coïncident)

Définitions : 1) Pour $\mu, \nu \in \underline{\underline{M}}^+(\partial X)$, on dit que μ est balayée de ν relativement à S, si l'on a $\int u d\mu \leq \int u d\nu \;\; \forall u \in S$. On note $\mu \prec \nu$.

2) On dira qu'un ensemble $A \subset \partial X$ est μ-polaire si l'on a $\mu^A = 0$.

La réunion d'une famille dénombrable d'ensembles μ- polaires est un ensemble μ-polaire.

Deuxième partie

Soient $\nu, \mu \in \underline{\underline{M}}^+(X)$. On va indiquer dans cette dernière partie un mode de calcul de la densité $\frac{d(\nu V)}{d(\mu V)}$ qui fera intervenir uniquement les cônes convexes S et S_0, et la topologie fine sur ∂X, ce sera donc un procédé canonique.

Théorème : 1) Soient $\nu,\mu \in \underline{\underline{M}}^+(X)$. Il existe un plus grand fermé fin régulier F tel que $\nu^F \prec \mu$.

2) Si $A \subset \partial X$ est un ensemble borélien tel que $(\nu V)_{|A} \leqq (\mu V)_{|A}$, alors $(\nu V)_{|A}$ est portée par F .

On suppose μ et ν fixées, et on définit les familles de fermés fins réguliers (F_λ) et (G_λ) de la façon suivante ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) :

F_λ = plus grand fermé fin régulier tel que $\nu^{F_\lambda} \prec \lambda\mu$

G_λ = plus grand fermé fin régulier tel que $\nu \succ \lambda\mu^{G_\lambda}$

Propriétés immédiates : $(\lambda_1 < \lambda_2) \Rightarrow (F_{\lambda_1} \subset F_{\lambda_2})$ et $(G_{\lambda_2} \subset G_{\lambda_1})$

Lemme : si $\lambda < \lambda'$, alors $F_\lambda \cap G_{\lambda'}$ est $(\mu+\nu)$-polaire.

Ce lemme est le résultat clé. Il implique que si f représente la densité $\frac{d(\nu V)}{d(\mu V)}$, alors F_λ équivaut grosso-modo à l'ensemble $\{f \leqq \lambda\}$.

On définit maintenant Φ et Ψ sur ∂X de la façon suivante :

1) $\Phi = \sup\limits_\lambda \lambda 1_{\complement F_\lambda}$, de sorte que $\{\Phi \leqq \lambda\} = \bigcap\limits_{\lambda' > \lambda} F_{\lambda'}$.

2) $\Psi = \inf\limits_\lambda g_\lambda$, où $g_\lambda(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \in G_\lambda \\ 0 & \text{si } x \notin G_\lambda \end{cases}$, de sorte que $\{\Psi \geqq \lambda\} = \bigcap\limits_{\lambda' < \lambda} G_{\lambda'}$.

On a toujours $\Phi \leqq \Psi$.

Théorème : Φ est finement s.c.i., Ψ est finement s.c.s. et d'après le lemme précédent, l'ensemble $\{\Phi \neq \Psi\}$ est $(\mu+\nu)$-polaire. (En fait, Φ et Ψ sont boréliennes sur ∂X, puisque F_λ et G_λ sont boréliens).

Corollaire : si f représente la densité $\frac{d(\nu V)}{d(\mu V)}$, alors $f = \Phi = \Psi$ $(\mu+\nu)V$ presque-partout.

Posons, pour tout ouvert fin $\omega \subset \partial X$,

$\overline{D}(\omega) = \inf \{ \lambda \in \overline{\mathbb{R}}^+ ; \nu^\omega \prec \lambda\mu \}$

$\underline{D}(\omega) = \sup \{ \lambda \in \overline{\mathbb{R}}^+ ; \nu \succ \lambda\mu^\omega \}$

Puis

$\overline{D}(x) = \inf \{ \overline{D}(\omega) ; \omega \ni x \}$

$\underline{D}(x) = \sup \{ \underline{D}(\omega) ; \omega \ni x \}$

Théorème : 1) $\overline{D}$ est finement s.c.s., $\underline{D}$ est finement s.c.i., et si V est de base μ, alors

$$\Phi \leqq \underline{D} \leqq \overline{D} \leqq \Psi$$

et $\{\Phi \neq \Psi\}$ est polaire.

2) S'il existe $k>0$ tel que $\nu \prec k\mu$, et si V est de base μ, alors

$$\Phi \leqq \underline{D} \leqq \liminf_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda f \leqq \limsup_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda f \leqq \overline{D} \leqq \Psi$$

où f représente la densité $\frac{d(\nu V)}{d(\mu V)}$.

<u>Corollaire</u> : Pour tout noyau W régulier, subordonné au cône S, chacune des quatre fonctions $\Psi, \overline{D}, \underline{D}, \Phi$ représente la densité $\frac{d(\nu W)}{d(\mu \nu)}$.