Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Paul-André Meyer
John B. Walsh

Un résultat sur les résolvantes de Ray

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 168-172
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__168_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1970-71

UN RÉSULTAT SUR LES RÉSOLVANTES DE RAY

par P.A.Meyer et J.B.Walsh

Nous désignons par F un espace métrique compact, par (U_p) une résolvante de RAY markovienne sur F, par (P_t) le semi-groupe associé. Nous construisons la réalisation canonique de (P_t)

$$\Omega,\ (X_t),\ P^\mu,\ \underline{\underline{F}}_t\ \ldots\ \text{etc} \qquad (\text{ notations usuelles })$$

où Ω est l'ensemble de toutes les applications continues à droite et pourvues de limites à gauche de $\mathbb{R}_+$ dans F, les X_t sont les applications coordonnées, et P^μ est la loi du processus qui admet $(\mu P_t)_{t\geq 0}$ comme loi d'entrée : le remplacement de μ par μP_0 (qui est portée par l'ensemble D des points de non-branchement) ne modifie donc pas P^μ.

Dans notre article " quelques résultats sur les résolvantes de RAY" (à paraître en 1971 aux Invent.Math.), toute l'étude de la famille des tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$ repose sur le lemme suivant :

LEMME. Il existe suffisamment de variables aléatoires Z , $\underline{\underline{F}}$-mesurables et bornées, telles que si l'on considère la martingale continue à droite

$$(1) \qquad z_t = E^\mu[Z|\underline{\underline{F}}_t]$$

alors, pour P^μ-presque tout ω, la relation $X_t(\omega)=X_{t-}(\omega)$ entraîne $z_t(\omega)=z_{t-}(\omega)$.

Autrement dit, $z_.(\omega)$ doit être continue là où la trajectoire $X_.(\omega)$ est continue. Le mot " suffisamment" signifie que ces variables Z doivent former un ensemble total dans $L^1(P^\mu)$.

Le choix naturel pour de telles variables aléatoires est celui qui est dû à BLUMENTHAL et GETOOR : on se donne un entier n, des nombres $p_1,\ldots,p_n > 0$, des fonctions $f_1,\ldots,f_n$ continues sur F, et on pose

$$(2) \qquad Z = \left(\int_0^\infty e^{-p_1 t} f_1\circ X_t\, dt\right)\ldots\ldots\left(\int_0^\infty e^{-p_n t} f_n\circ X_t\, dt\right)$$

Ces variables aléatoires sont en effet bornées, forment un ensemble total dans $L^1(P^\mu)$ quelle que soit μ (cf. [1] p.172). Il est d'autre part facile de calculer la martingale (z_t). Mais nos souvenirs de [1] étaient trop optimistes : BLUMENTHAL et GETOOR y démontrent une propriété qui, pour les résolvantes de RAY, est plus faible que le lemme. Notre renvoi à [1] était donc insuffisant, et nous allons donner ici la démonstration du lemme. Nous y ajouterons un résultat de convergence étroite, sous-produit de notre première démonstration correcte du lemme, et qui a sans doute un certain intérêt.

I. DEMONSTRATION DU LEMME

Nous adoptons d'abord une notation explicite, en notant la variable aléatoire (2) $Z_n(p_1,\dots,p_n\,;\,f_1,\dots,f_n)$. Pour calculer z_t, nous partageons toutes les intégrales $\int_0^\infty$ en $\int_0^t + \int_t^\infty$ et nous développons. Nous sommes ramenés à étudier une somme de termes de la forme

$$\prod_1^p \left(\int_0^t e^{-r_i s} h_i \circ X_s ds\right) \cdot E\left[\prod_1^m \int_t^\infty e^{-q_i s} g_i \circ X_s ds \mid \underline{\underline{F}}_t\right]$$

où $p+m = n$, et les couples (r_i,h_i) et (q_i,g_i) désignent certains des couples (p_i,f_i). Le premier facteur est une fonction continue de t. Le second s'écrit, grâce à la propriété de Markov

$$E\left[e^{-(q_1+\dots+q_m)t} Z_m(q_1,\dots,q_m\,;\,g_1,\dots,g_m)\circ\theta_t \mid \underline{\underline{F}}_t\right]$$

$$= e^{-(q_1+\dots+q_m)t} E^{X_t}[Z_m(q_1,\dots,q_m\,;\,g_1,\dots,g_m)]$$

On est donc ramené à démontrer la propriété suivante :

PROPOSITION 1. <u>La fonction</u> $x \longmapsto E^x[Z]$ <u>est continue</u>.

Si $Z=Z_n(p_1,\dots,p_n\,;\,f_1,\dots,f_n)$, nous noterons $J_n(p_1,\dots,p_n\,;\,f_1,\dots,f_n\,;\,x)$ la fonction $E^x[Z]$. Nous allons montrer par récurrence sur n que J_n est continue. A cet effet, nous formons

$$\frac{1}{t}\left(J_n - e^{-(p_1+\dots+p_n)t} P_t J_n\right)$$

$$= \frac{1}{t} E^{\cdot}\left[\prod_1^n \int_0^\infty e^{-p_i s} f_i \circ X_s ds - \prod_1^n \int_t^\infty e^{-p_i s} f_i \circ X_s ds\right]$$

qui tend en restant borné vers

$$\sum_1^n f_i \cdot J_{n-1}(p_1,\dots,\hat{p}_i,\dots,p_n\,;\,f_1,\dots,\hat{f}_i,\dots f_n) = F_n$$

où le ^ marque la suppression du terme correspondant. D'après l'hypothèse de récurrence et la continuité des f_i, F_n est continue, et alors $J_n = U_{p_1+\dots+p_n} F_n$ l'est aussi, par définition des résolvantes de RAY.

Nous allons transformer ce résultat en un résultat plus fort de convergence étroite.

II. UN RESULTAT DE CONVERGENCE ETROITE SUR Ω

Il est traditionnel de munir l'espace Ω des applications continues à droite et pourvues de limites à gauche de $\mathbb{R}_+$ dans F de la topologie de SKOROKHOD. Bien que cette topologie ne soit pas compliquée, nous allons la remplacer par une topologie beaucoup plus familière : nous munirons Ω de la topologie de la convergence en mesure, et nous allons prouver

PROPOSITION 2. L'application $x \mapsto P^x$ est étroitement continue sur F.

Quelques remarques sont nécessaires pour donner un sens à cette phrase. Soit (f_n) une suite de fonctions continues comprises entre 0 et 1, qui sépare F. La topologie de F est alors définie par la distance $d(x,y) = \sum 2^{-n}|f_n(x)-f_n(y)|$, et la topologie de Ω par la distance

$$d(\omega,\omega') = \sum 2^{-n}\int_0^\infty |f_n\circ X_t(\omega)-f_n\circ X_t(\omega')|e^{-t}dt$$

Quelle est la tribu borélienne de Ω ? Rappelons qu'on désigne par $\underline{\underline{F}}^\circ$ la tribu engendrée (sans complétion) par les X_t ; comme les boules $\{\omega' : d(\omega,\omega')<a\}$ sont $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurables , et comme Ω est séparable (il est facile de construire des fonctions étagées qui forment une suite dense dans Ω), la tribu borélienne est contenue dans $\underline{\underline{F}}^\circ$. Mais inversement les fonctions $\int_a^b f\circ X_s(\omega)ds$ sont continues sur Ω si f est continue, et il en résulte que les X_s sont boréliennes sur Ω. Donc la tribu borélienne est égale à $\underline{\underline{F}}^\circ$. On peut donc considérer les mesures P^μ comme des mesures sur la tribu borélienne de Ω, et parler de leur convergence étroite.

On peut montrer que Ω est lusinien, de sorte que toutes les mesures sur Ω sont de Radon, mais nous ne le ferons pas ici : nous allons montrer directement que les mesures P^x sont de Radon, en vérifiant la condition de PROKHOROV.

Nous pouvons supposer[1] que toutes les fonctions continues f_n définissant la distance de Ω sont 1-surmédianes. Notons I_p^k le k-ième intervalle de la subdivision dyadique de pas 2^{-p} de $[0,1]$, et notons

$D_{pn}^k(\omega)$ le nombre des descentes[2] de la fonction $e^{-t}f_n\circ X_t(\omega)$ par dessus l'intervalle fermé I_p^k

Alors l'inégalité de DOOB nous donne pour tout x

$$E^x[D_{pn}^k] \leq 2^p$$

Choisissons maintenant des constantes A_{pn}^k si grandes, que $\sum_{k,p,n} \frac{2^p}{A_{pn}^k} < \varepsilon$.

1. Définition des rés. de RAY. 2. Définies au moyen d'inégalités strictes.

L'ensemble

$$K = \{ \omega : \forall\, k,p,n \quad D^k_{pn}(\omega) \leqq A^k_{pn} \quad \}$$

porte alors toutes les mesures P^x à ε près. Nous allons montrer que K est compact dans Ω. Cela prouvera que les mesures P^x satisfont à la condition de PROKHOROV.

Admettant ce point pour l'instant, achevons la démonstration du théorème : les sommes finies de variables aléatoires Z du type (2) forment une algèbre de fonctions continues bornées sur Ω, qui sépare Ω et contient les constantes. Deux mesures μ et μ' sur Ω telles que $\mu(Z)=\mu'(Z)$ pour tout Z de ce type sont donc égales [c'est d'ailleurs évident pour d'autres raisons!] Les fonctions $E^\bullet[Z]$ étant continues, P^x est la seule valeur d'adhérence étroite possible de P^y lorsque $y\to x$. En vertu de la condition de PROKHOROV, on a donc $P^y \underset{y\to x}{\to} P^x$, et la proposition est établie.

Reste donc à montrer que K est compact. Nous allons supposer que $F=[0,1]$, et qu'il y a une seule fonction f_n, l'application identique. Nous écrirons aussi $\omega(t)=X_t(\omega)$. L'indice n disparaît donc des notations. Le cas général se ramène à celui-ci au moyen du procédé diagonal.

Soit (ω_m) une suite d'éléments de K. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que pour tout s rationnel $\omega_m(s)$ converge vers un nombre $\underline{\omega}(s)\in[0,1]$. La fonction $\underline{\omega}$ définie sur les rationnels satisfait encore aux inégalités $D^k_p(\underline{\omega})\leqq A^k_p$ (à cause de notre précaution de définir les descentes au moyen d'inégalités strictes), et admet donc des limites à droite et à gauche le long des rationnels, en tout point de $\mathbb{R}_+$. La fonction

$$\omega(t) = \lim_{\substack{s\to t \\ s \text{ rationnel} \\ s>t}} \underline{\omega}(s)$$

et continue à droite, pourvue de limites à gauche, et appartient à K. Il reste seulement à montrer qu'une sous-suite de la suite (ω_m) converge en mesure vers ω .

Soit $\varepsilon=2^{-q}$; notons $B(\omega_m,\varepsilon)$ l'ensemble isolé (en fait <u>fini</u>) constitué par les points

$$t_0 = 0 \quad , \qquad t_{k+1} = \inf \{ t>t_k \quad , \; |e^{-t}\omega_m(t) - e^{-t_k}\omega_m(t_k)|>\varepsilon \}$$

entre t_k et t_{k+1} , il y a au moins une montée ou une descente de la fonction $e^{-t}\omega_m(t)$ sur l'un des 2^{q+1} intervalles I^{q+1}_j. Noter que le nombre des montées est au plus le nombre des descentes +1. La relation $\omega_m\in K$ permet donc de borner uniformément en m le nombre des points de $B(\omega_m,\varepsilon)$ par un nombre $N(\varepsilon)$.

Nous extrayons alors, par precédé diagonal, une sous-suite ω'_n telle que, pour tout $\varepsilon=2^{-q}$ les fermés $B(\omega'_m,\varepsilon)$ convergent vers un fermé $B(\varepsilon)$, qui comporte aussi $N(\varepsilon)$ points au plus.

Soit $x\notin B(\varepsilon)$; pour m assez grand, x est à distance $\geqq h>0$ de $B(\omega'_m,\varepsilon)$, donc toutes les fonctions ω'_m ont une oscillation $<2\varepsilon$ sur l'intervalle $]x-h,x+h[$. Il en est alors de même de ω. Choisissant un rationnel r dans cet intervalle, et notant que $|\omega(x)-\underline{\omega}(r)|\leqq 2\varepsilon$, on voit que $|\omega'_m(x)-\omega(x)|\leqq 6\varepsilon$ pour m grand.

Donc, si x n'appartient pas à l'ensemble dénombrable réunion des $B(\varepsilon)$ $(\varepsilon=2^{-q})$, nous voyons que $\omega'_m(x)$ converge vers $\omega(x)$, ce qui est mieux que la convergence en mesure. La démonstration est ▯.

Bibliographie

[1]. R.M.Blumenthal et R.K.Getoor. Markov processes and potential theory. Academic Press, New York 1968.

REMARQUE. La propriété de compacité qui a été utilisée dans la démonstration précédente est fausse pour la topologie de SKOROKHOD , comme B.MAISONNEUVE nous l'a fait remarquer : les fonctions $I_{[1,1+2^{-n}[}$ présentent une seule montée au dessus de tout intervalle, et aucune sous-suite ne converge au sens de SKOROKHOD , alors qu'elles convergent en mesure vers 0. Nous n'avons pas cherché à voir si la proposition 2 est vraie pour la topologie de SKOROKHOD.