SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Le schéma de remplissage en temps continu, d'après H. Rost

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 130-150
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__130_0>

LE SCHÉMA DE REMPLISSAGE EN TEMPS CONTINU

exposé de P.A.Meyer, d'après H.ROST

Cet exposé est la suite de celui qui a été fait l'an dernier[1], sur le schéma de remplissage en temps discret. Il reprend les résultats présentés par ROST à Oberwolfach en Mai 1970, et qui paraîtront aux Inventiones Math. dans un article intitulé " The stopping distribution of a Markov process". L'exposé complète l'article de ROST sur certains points, que ROST n'avait pas abordés, mais en revanche il laisse de côté le tout dernier aspect du travail de ROST, c'est à dire l'extension aux processus de Markov généraux du théorème de SKOROKHOD sur le mouvement brownien.

La théorie du schéma de remplissage en temps continu est nettement plus difficile qu'en temps discret. Je voudrais souligner ici qu'ayant essayé de simplifier et d'étendre les méthodes de ROST, je suis bien parvenu à démontrer des résultats en marge de ceux de ROST, mais que j'ai toujours dû me rabattre sur ses démonstrations lors des difficultés essentielles. Ce fait est parfois masqué sous des changements de présentation assez secondaires, tels que le remplacement du semi-groupe par sa résolvante en certains endroits.

§ 1 . COMPLEMENTS SUR LE CAS DISCRET

Les notations sont celles de l'exposé de l'an dernier[1]: P est un noyau sousmarkovien sur E ; $\mathcal{E}$ désigne le cône des fonctions P-excessives bornées sur E , la relation de préordre $\lambda\dashv\mu$ entre mesures bornées signifie $\lambda(f)\leqq\mu(f)$ pour tout $f\in\mathcal{E}$. Si λ et μ sont deux mesures positives bornées, les mesures λ_n,μ_n du schéma de remplissage sont définies par

$$(1)\qquad \begin{array}{ll} \lambda_0=(\lambda-\mu)^+ & \lambda_{n+1}=(\lambda_nP-\mu_n)^+ \\ \mu_0=(\lambda-\mu)^- & \mu_{n+1}=(\lambda_nP-\mu_n)^- \end{array}$$

Nous poserons aussi $\sigma_n=\lambda_0+\ldots+\lambda_n$.

Les propriétés suivantes ont été établies dans l'exposé précédent : on a $\lambda_0\leqq\lambda$, $\lambda_{i+1}\leqq\lambda_iP$, $\mu_{i+1}\leqq\mu_i\leqq\mu$. On note $\mu_\infty=\lim_n\mu_n$ et $\mu'=\mu-\mu_\infty$.

[1] Travaux de H.ROST en théorie du balayage. Séminaire de Probabilités V, Université de Strasbourg, p.237-250 (Lecture Notes in M. 191, 1971).

La mesure μ' satisfait à $\mu' \dashv \lambda$, et toute mesure bornée γ (non nécessairement positive) telle que $\gamma \leqq \mu$, $\gamma \dashv \lambda$ satisfait aussi à $\gamma \dashv \mu'$. Si (X_k) est la chaîne de Markov admettant P comme fonction de transition, construite sur un espace suffisamment riche, on a construit en outre un temps d'arrêt τ (dit <u>canonique</u>) telle que l'on ait $\mu' = \lambda P_T$, i.e.

$$\mu'(f) = E^{\lambda}[\ f \circ X_{\tau}\ ,\ \tau < \infty\ ]$$

et de plus

$$(2) \qquad \begin{aligned} < \mu - \mu_k , f > &= E^{\lambda}[f \circ X_{\tau},\ \tau \geqq k\ ] \\ < \lambda_k , f > &= E^{\lambda}[f \circ X_k,\ \tau > k\ ] \end{aligned}$$

La proposition suivante ne figure pas explicitement dans l'exposé précédent, mais jouera un rôle dans celui-ci :

PROPOSITION 1. <u>Soit</u> A <u>un ensemble portant</u> μ_{∞} , <u>et tel que</u> $\lambda_n(A)=0$ <u>pour tout</u> n. <u>Alors on a</u>

$$(3) \qquad \mu_{\infty} = (\mu - \lambda) H_A \quad (\text{ noyau de réduction sur } A\ )$$

<u>Et on a, pour toute fonction excessive bornée</u> f

$$(4) \qquad < \mu_{\infty} , f > = \sup_{\substack{g \leqq f \\ g \in \mathcal{E}}} < \mu - \lambda,\ g >$$

DEMONSTRATION. Soit f une fonction bornée. D'après le lemme 2 de l'exposé précédent, on a $\lim_n < \lambda_n , e_A > = 0$, où $e_A = H_A 1$; cela entraîne $\lim_n < \lambda_n , H_A f >$ $=0$. On a ensuite

$$< \lambda_{k+1} - \mu_{k+1} , H_A f > = < \lambda_k P - \mu_k,\ H_A f > = < \lambda_k - \mu_k , H_A f >$$

car $H_A = PH_A$ sur A^c, qui porte λ_k . Ainsi

$$< \mu - \lambda,\ H_A f > = < \mu_0 - \lambda_0 , H_A f > = < \mu_n - \lambda_n , H_A f > \text{ pour tout } n$$

et on obtient (3) lorsque $n \to \infty$. Si $g \leqq f$ appartient à $\mathcal{E}$, on a $< \mu - \lambda , g > =$ $< \mu_{\infty} , g > + < \mu' - \lambda , g > \leqq < \mu_{\infty} , g > \leqq < \mu_{\infty} , f >$, de sorte que le premier membre de (4) majore toujours le second. L'égalité est réalisée pour $g = H_A f$, qui est excessive si f est excessive.

Il faut noter qu'on n'a fait <u>aucune hypothèse de transience</u> sur le noyau P, et c'est d'ailleurs ce qui fait l'intérêt du schéma de remplissage, qui a été inventé en vue de ses applications à la théorie ergodique. Mais lorsque le noyau potentiel $G = I + P + P^2 \ldots$ est propre, i.e. lorsque γG est σ-finie pour toute mesure bornée γ, la mesure μ_{∞} peut s'interpréter d'une autre manière, qui jouera un rôle fondamental dans cet exposé : formons la mesure $\alpha = (\mu - \lambda) G$, puis la <u>réduite</u> αR sur ce potentiel, c'est à dire la plus petite mesure excessive majorant α. Alors $\alpha R = \mu_{\infty} G$, et la mesure $\sigma_{\infty} = \sum_n \lambda_n$ est égale à $\alpha R - \alpha$. La première propriété ne fait que traduire la propriété caractéristique de μ', compte tenu du fait que $\alpha \dashv \beta \iff \alpha G \leqq \beta G$ lorsque G est propre. La seconde résulte de la relation $\lambda_{k+1} - \mu_{k+1} = \lambda_k P - \mu_k$, qui entraîne $\sigma_{k+1} = \sigma_k P + (\lambda - \mu) + \mu_{k+1}$ (récurrence immédiate), puis à la limite $\sigma_{\infty} = \sigma_{\infty} P + (\lambda - \mu) + \mu_{\infty}$, et enfin $\sigma_{\infty} = (\mu_{\infty} - (\mu - \lambda))G = \alpha R - \alpha$.

Ainsi, dans le cas transient, les mesures μ_{∞} et σ_{∞} peuvent être caractérisées sans faire appel au schéma de remplissage. Nous allons montrer maintenant comment tout le schéma de remplissage peut être ramené à la construction des mesures μ_{∞} et σ_{∞} , mais pour un autre noyau.

CONSTRUCTION DU SCHEMA DE REMPLISSAGE PAR DEPLIEMENT

Soit F l'ensemble $\underset{\approx}{N} \times E$; une mesure sur F est une suite $(m_0, m_1, \dots m_n \dots)$ de mesures sur E. Nous définirons un noyau sousmarkovien Q sur F en posant

$$(m_0, m_1, \dots)Q = (0, m_0 P, m_1 P, \dots)$$

Ce noyau Q est transient au sens considéré précédemment.

Introduisons maintenant les mesures

$$\bar{\lambda} = (\lambda, \lambda, \lambda, \dots\dots)$$
$$\bar{\mu} = (\mu, \mu, \mu, \dots\dots)$$

-qui ne sont pas bornées, mais peu importe - et appliquons leur le schéma de remplissage sur F par rapport à Q. Nous avons successivement

$$(5) \qquad \left.\begin{aligned} \bar{\lambda}_0 &= (\lambda_0, \lambda_0, \lambda_0, \lambda_0, \dots\dots) \\ \bar{\mu}_0 &= (\mu_0, \mu_0, \mu_0, \mu_0, \dots\dots) \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= (0\ , \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \dots\dots) \\ \bar{\mu}_1 &= (\mu_0, \mu_1, \mu_1, \mu_1, \dots\dots) \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \bar{\lambda}_2 &= (0\ , 0\ , \lambda_2, \lambda_2, \dots\dots) \\ \bar{\mu}_2 &= (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_2, \dots\dots) \end{aligned}\right\}$$

d'où par passage à la limite

$$(6) \qquad \begin{aligned} \bar{\mu}_{\infty} &= (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots\dots\dots) \\ \bar{\sigma}_{\infty} &= (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots\dots\dots) \end{aligned}$$

Il faut noter que, plus généralement, on peut considérer sur F des noyaux de la forme $(m_0, m_1, m_2, \dots) \mapsto (0, m_0 P_0, m_1 P_1 \dots)$ et ramener ainsi au cas d'un seul noyau certaines généralisations du schéma de remplissage.

§ 2. REDUITE AU DESSUS D'UNE MESURE

Dans ce paragraphe, nous n'allons pas nous occuper du schéma de remplissage proprement dit : étant données deux mesures λ et μ, nous allons construire directement , sous une hypothèse de transience convenable, les mesures μ_{∞} ,μ' et σ_{∞}. Nous venons de voir que cette construction, faite sur un espace convenable, permet ensuite de retrouver tout le schéma de remplissage : l'extension de cette remarque au cas continu fera l'objet du paragraphe 3.

E sera un espace polonais, ou plus généralement un espace lusinien métrisable, i.e. homéomorphe à un sous-espace borélien d'un espace métrique compact. (P_t) sera un semi-groupe borélien sur E satisfaisant aux " hypothèses droites" de la théorie des processus de Markov (existence d'une réalisation continue à droite (X_t), propriété de Markov forte). Nous noterons (U_p) la résolvante de (P_t), U le potentiel, et nous supposerons que pour toute mesure bornée $\gamma \geqq 0$, γU est une mesure localement bornée.

Soit η une mesure positive localement bornée , telle que $\eta P_t \leqq \eta$ pour tout t de la forme 2^{-n}, et donc pour tout t dyadique. Soit f une fonction continue bornée, nulle hors d'un ouvert η-intégrable ; l'application $P_{\cdot} f(x)$ étant continue à droite pour tout x, le lemme de Fatou nous donne $<\eta P_t, f>$ $\leqq < \eta, f > < \infty$ pour tout t, et la mesure η est donc surmédiane. Comme $P_t f$ $\to$ f lorsque $t \to 0$, le lemme de Fatou nous donne aussi $< \eta, f> \leqq \underline{\lim}_{t\to 0} <\eta P_t, f>$ d'où il résulte (l'inégalité inverse étant évidente) que η est excessive. On a des considérations analogues pour les mesures localement bornées $\eta \geqq 0$ telles que $\eta \geqq n\eta U_n$ pour n entier.

Notre premier travail va consister à étendre aux mesures certains résultats de MOKOBODZKI sur les réduites au dessus de fonctions, extension d'ailleurs à peu près évidente.

PROPOSITION 2. Soit δ une mesure excessive, majorée au sens fort par un potentiel (σ-fini) μU. Alors δ est potentiel d'une mesure positive $\nu \leqq \mu$.

DEMONSTRATION. Supposons d'abord μ bornée. Prenons une compactification de RAY-KNIGHT : E est plongé comme sous-ensemble borélien (non comme sous-espace) dans $\hat{E}$ métrique compact, muni d'une résolvante $(\hat{U}_p)$ telle que :

pour p>0, $\hat{U}_p$ applique $\underline{C}(\hat{E})$ dans lui même,

pour $x \in E$, $\varepsilon_x \hat{U}_p = \varepsilon_x U_p$ (à des identifications évidentes près).

On a alors $p(\delta - p\delta\hat{U}_p) \leqq p\mu U_p = p\mu\hat{U}_p$. Les mesures de droite convergent étroitement vers μ sur $\hat{E}$. Il existe des $p_n \uparrow \infty$ et une mesure $\nu \leq \mu$ tels que $p_n(\delta - p_n \delta U_{p_n})$ converge étroitement vers ν. Comme $\hat{U}_q$ applique $\underline{\underline{C}}$ dans $\underline{\underline{C}}$, nous avons $\nu\hat{U}_q = \lim_n \; p_n \delta(I - p_n \hat{U}_{p_n})\hat{U}_q = \delta(I - q\hat{U}_q)$. On supprime les ^, on fait tendre q vers 0 en remarquant que $\delta q U_q \leq (\mu U) q U_q = \mu(U - U_q) \underset{q \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Si μ n'est pas bornée, on choisit une fonction a partout >0 telle que $< \mu U, a > < \infty$, et on pose h=Ua. La mesure $\mu' = h\mu$ est bornée, et son potentiel par rapport au h-semi-groupe est $(\mu U).h$. La mesure $\delta' = h\delta$ est excessive pour ce semi-groupe, majorée au sens fort par $(\mu U).h$, et on peut leur appliquer le raisonnement précédent.

Passons aux réduites. Si γ est une mesure (non nécessairement positive) majorée par une mesure localement bornée excessive, nous notons γR la borne inférieure des mesures excessives majorant γ. Cette mesure est appelée la <u>réduite</u> au dessus de γ. Nous considérerons aussi le noyau sousmarkovien nU_n, et la réduite γR_n, borne inférieure des mesures nU_n-excessives majorant γ. Il est clair que $\gamma R_n \uparrow \gamma R$ lorsque $n \to \infty$.

PROPOSITION 3. <u>Soient</u> μ <u>une mesure positive telle que</u> μU <u>soit localement bornée</u>, θ <u>une mesure excessive</u>, <u>et</u> $\alpha = \mu U - \theta$. <u>On peut alors écrire</u> $\alpha R = \nu U$, <u>où</u> $0 \leq \nu \leq \mu$.

DEMONSTRATION. Rappelons les résultats de MOKOBODZKI dans le cas discret. Si N est un noyau sousmarkovien, de potentiel G (nous supposerons N transient), et si u est une mesure non nécessairement positive majorée par une mesure N-excessive, la réduite de uG est un potentiel vG, où $0 \leq v \leq u^+$, et il existe en outre un ensemble A portant v tel que la réduite de uG et uG soient égales sur A. Pour ces résultats, voir l'exposé [3], p. 172-174.

Pour démontrer la proposition, nous appliquons cela aux noyaux nU_n : on a $\alpha = u_n G_n$ (avec $u_n = \alpha(I - nU_n)$, et $G_n = I + nU$). On peut donc écrire

$$\alpha R_n = v_n G_n = \xi_n \left(\frac{I}{n} + U \right)$$

où $\xi_n \leq n(\alpha(I - nU_n))^+ \leq n\mu U_n$. Nous écrivons donc

$$\alpha R_n + \nu_n = n\mu U_n \left(\frac{I}{n} + U \right) \qquad (\ \nu_n \text{ est } nU_n\text{-excessive})$$

Faisons tendre n vers l'infini : αR_n tend vers αR, μU_n vers 0, $n\mu U_n U$ vers μU, donc ν_n converge vers ν (convergence forte sur tout ensemble μU-intégrable). On voit aussitôt que ν est excessive, donc αR est majorée au sens fort par μU, et $\alpha R = \nu U$ avec $0 \leq \nu \leq \mu$ (prop. 2).

Nous adoptons maintenant les notations suivantes : μ et λ étant deux mesures positives telles que λU et μU soient localement bornés. On pose

(7) $\alpha=(\mu-\lambda)U$, $\alpha R= \mu_\infty U$ (prop.3) , où $0\leqq\mu_\infty\leqq\mu$

$\mu'= \mu-\mu_\infty$, et $\sigma_\infty = \alpha R-\alpha = (\lambda-\mu')U$

La relation $\dashv$ est définie comme d'habitude, à l'aide du cône des fonctions excessives . Comme le noyau est transient, $\beta\dashv \gamma$ équivaut à $\beta U \leqq \gamma U$.

La définition de μ_∞ , μ', σ_∞ correspond bien à celle que nous avons donnée en temps discret, au moyen du schéma de remplissage :

PROPOSITION 4. <u>On a</u> $\mu'\dashv \lambda$, <u>et toute mesure</u> θ <u>telle que</u> $\theta\leqq\mu$, $\theta\dashv\lambda$ <u>est telle que</u> $\theta\dashv\mu'$.

DEMONSTRATION. La mesure $(\mu-\theta)U$ est excessive et majore $(\mu-\lambda)U=\alpha$, donc aussi $\alpha R= \mu_\infty U$, et enfin $\theta U\leqq\mu' U$.

Nous arrivons au principal résultat d'approximation de ROST, que nous donnons sous une forme un peu transformée (nous approchons par les réduites αR_n de α relatives au noyau nU_n , alors que ROST travaille avec les réduites analogues pour le noyau $P_{2^{-n}}$).

PROPOSITION 5. <u>Ecrivons</u> $\alpha R_n=\mu^n_\infty (I+nU_n)$. <u>Soit</u> f <u>une fonction finement continue</u>, bornée <u>μU-intégrable</u>, <u>ou excessive</u> <u>μ-intégrable</u>. <u>Alors</u>

(8) $$< \mu^n_\infty ,f > \underset{n\to\infty}{\to} < \mu_\infty,f >$$

DEMONSTRATION. Nous fixons un entier m, et nous écrivons

$$\alpha R(I-mU_m) = \mu_\infty U(I-mU_m) = \mu_\infty U_n[I+(n-m)U_m]$$

$$\alpha R_n(I-mU_m) = \mu^n_\infty (I+nU)(I-mU_m) = \mu^n_\infty [I+(n-m)U_m]$$

et nous en déduisons , en posant $\rho_n= \mu_\infty U_n-\mu^n_\infty$

(9) $$\mu_\infty nU_n -n\mu^n_\infty = [\alpha R-\alpha R_n](I-mU_m) - \rho_n(I-mU_m) .$$

Nous avons $< \alpha R , (I+mU_m)|f| > \leqq < \mu U, (I+mU_m)|f|> < \infty$, et aussi $|\rho_n| \leqq \mu_\infty U_n+ \mu^n_\infty (I+nU)\leqq 2\mu U$. Nous pouvons donc appliquer les deux membres de cette égalité à f, sous la première hypothèse.

Faisons tendre n vers $+\infty$: comme $\alpha R_n\uparrow\alpha R$, le premier terme tend vers 0. Le second est majoré par 2 $<\mu U, |f-mU_mf|>$. Nous notons que $mU_m|f| \to |f|$ lorsque $m\to\infty$, car $|f|$ est finement continue, et que $< \mu U,mU_m|f| > \to < \mu U,|f| >$; les fonctions $mU_m|f|$ sont donc μU-uniformément intégrables, et $< \mu U, |f-mU_mf|>$ tend donc vers 0 lorsque $m\to\infty$. Lorsque $n\to\infty$, le second membre de (9) est donc arbitrairement petit en valeur absolue, et il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} [< \mu_\infty , nU_n f > - < n\mu_\infty^n , f>] = 0$$

d'où l'énoncé sous la première hypothèse. Nous laissons au lecteur le raisonnement sous la seconde hypothèse, qui est plus simple.

Nous en déduisons, à la manière de ROST, l'important résultat suivant (rappelons que nous sommes dans le cas transient)

PROPOSITION 6. Si f est excessive μ-intégrable, on a

$$(10) \qquad < \mu_\infty , f > = \sup_{g\in\mathcal{E}, g\leq f} < \mu-\lambda , g > \qquad (\mathcal{E}, \text{ cône des fonctions excessives })$$

DEMONSTRATION. Nous appliquons la formule (3) au noyau nU_n : désignons par A_n un ensemble portant μ_∞^n et tel que $\alpha R_n = \alpha$ sur A_n ; nous avons

$$< \mu_\infty^n , f > = < (\mu-\lambda)U_n \; , \; H_{A_n}^n f >$$

car $\alpha = (\mu-\lambda)U_n(I+nU)$. Posons $g_n = nU_n H_{A_n}^n f$, et remarquons que cette fonction appartient à $\mathcal{E}$ - pour toute fonction nU_n-excessive h, $U_n h$ est excessive. Nous pouvons donc écrire

$$< n\mu_\infty^n , f > = < \mu-\lambda, \; g_n >$$

Comme $g_n \leq nU_n f \leq f$, la proposition 5 nous donne que le premier membre de (10) est majoré par le second. Mais on a l'inégalité inverse, car

$$< \mu-\lambda , g > = < \mu_\infty , g > + <\mu', g> - <\lambda , g> \leqq < \mu_\infty , g > \leqq < \mu_\infty , f >$$

car $\mu' \dashv \lambda$, et g est excessive.

RESULTATS COMPLEMENTAIRES

La formule (10) est agréablement identique à la formule (4) du cas discret. Mais où est passée la formule (3) ? Nous allons répondre ici, dans le cas transient, à cette question qui n'est pas traitée dans le travail de ROST.

Je dois des remerciements sans nombre à MOKOBODZKI pour la démonstration de la proposition 7, qui remplace ma propre démonstration[1], atroce et qui exigeait des hypothèses particulières sur le semi-groupe.

PROPOSITION 7. Supposons que μ ne charge pas les ensembles semi-polaires. Alors il existe un ensemble (finement parfait[2]) A tel que $\mu_\infty = (\mu-\lambda)P_A$.

1 MOKOBODZKI avait démontré indépendamment cette proposition.
2 La parenthèse sous l'hypothèse de continuité absolue seulement.

DEMONSTRATION. Nous nous faciliterons l'existence en faisant l'hypothèse auxiliaire que λ <u>et</u> μ <u>sont bornées</u>, <u>et que l'opérateur</u> <u>potentiel</u> U <u>est</u> <u>borné</u> . Choisissons en effet une fonction j partout >0 , intégrable pour la mesure σ-finie $(\lambda+\mu)U$, et posons $h=Uj$. Le noyau

$$U'(x,dy) = \frac{1}{h(x)}U(x,dy)j(y) = U^{(h)}(x,dy)\,\frac{j(y)}{h(y)}$$

est en effet un noyau potentiel borné ($U'1=1$), qui se déduit de U par la formation d'un h-processus suivie d'un changement de temps ; ses fonctions excessives sont les fonctions de la forme u/h (u excessive pour U). La proposition 7 est équivalente à la proposition analogue pour le semi-groupe associé à U', et les mesures $\mu'=\mu.h$, $\lambda'=\lambda.h$, et l'hypothèse auxiliaire est satisfaite dans ce cas.

Nous allons commencer par remarquer que dans la formule (10), si f est bornée - donc μ-intégrable d'après l'hypothèse auxiliaire - <u>il existe</u> $g\leq f$ <u>excessive réalisant le sup</u>. Choisissons d'abord des fonctions $g_n\leqq f$ excessives telles que $<\mu_\infty, f> = \lim_n <\mu-\lambda, g_n>$. Ces fonctions étant bornées par f, nous pouvons extraire une suite (g_n^1) qui converge vers une fonction $\gamma\leq f$ pour la topologie faible dans $L^1(\mu+\lambda)$. Les convexes faiblement fermés et fortement fermés étant les mêmes, γ est fortement adhérente à l'enveloppe convexe de la suite (g_n^1). Mais celle ci est formée de fonctions excessives $\leqq$ f . Autrement dit, il existe des fonctions $g_n^2 \leqq f$, excessives et convergeant fortement vers γ dans $L^1(\mu+\lambda)$. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que les g_n^2 convergent $(\mu+\lambda)$-p.p.. Posons $g^3 = \liminf_n g_n^2$: c'est une fonction surmédiane, qui ne diffère de sa régularisée excessive g que sur un ensemble semi-polaire, d'après le théorème de convergence de DOOB.
Comme μ ne charge pas les ensembles semi-polaires, nous avons $\mu(g)=\mu(g^3)$ $= \lim_n \mu(g_n^2) = \mu(\gamma)$. D'autre part $\lambda(g)\leq\lambda(g^3)=\lambda(\gamma)$. Ainsi

$$<\mu_\infty, f> = <\mu-\lambda,\gamma> \leqq <\mu-\lambda, g>$$

Mais nous avons déjà vu que si g est excessive $\leqq$ f on a l'inégalité inverse, et la phrase soulignée est établie.
Soit H_f l'ensemble des fonctions excessives $g\leqq f$ possédant cette propriété, considéré comme sous-ensemble de $L^1(\mu+\lambda)$ - nous identifions donc deux éléments de H_f égaux $(\mu+\lambda)$-p.p.. Soit g_n une suite décroissante d'éléments de H_f , i.e. les g_n sont des fonctions excessives et décroissent $(\lambda+\mu)$-p.p. et soit g la régularisée excessive de lim inf g_n . On vérifie comme ci--dessus que $g\in H_f$. Il résulte alors du théorème de Zorn que H_f admet un élément minimal g : toute fonction excessive $h\in H_f$, $(\lambda+\mu)$-p.p. majorée par g,

est λ-p.p. égale à g. Soit alors A l'ensemble $\{f=g\}$; on a $<\mu_\infty, f>$ $\geqq <\mu_\infty, g> \geqq <\mu-\lambda, g> = <\mu_\infty, f>$, donc A porte μ_∞ . Ainsi $<\mu_\infty, f>$ $= <\mu_\infty, g> = <\mu_\infty, P_A g>$; $P_A g$ étant excessive, il existe h excessive $\leqq P_A g$ telle que $<\mu_\infty, f> = <\mu_\infty, P_A g> = <\mu-\lambda, h>$, donc $h \in H_f$. Comme g est minimale, on a h=g p.p., donc aussi $g=P_A g$ p.p. par encadrement, et enfin (comme g=f sur A) $g=P_A f$ p.p.. Finalement

(11) $$<\mu_\infty, f> = <\mu-\lambda, P_A f>$$

A porte μ_∞. Cette relation peut s'écrire aussi $\mu' P_A = \lambda P_A$.
Prenons pour f la fonction excessive bornée U1. Soit c une fonction comprise entre 0 et 1. Nous avons les inégalités

$$<\mu_\infty, Uc> \geqq <\mu-\lambda, P_A Uc>$$

$$<\mu_\infty, U(1-c)> \geqq <\mu-\lambda, P_A U(1-c)>$$

dont la somme est une égalité : chacune d'entre elles est donc une égalité, et on a $\mu_\infty U = (\mu-\lambda)P_A U$, donc enfin $\mu_\infty = (\mu-\lambda)P_A$.
Si l'hypothèse de continuité absolue est satisfaite, soit B le noyau finement parfait de A ; comme μ_∞ ne charge pas les ensembles semi-polaires B porte μ_∞ , et le raisonnement du haut de la page s'applique à B au lieu de A.

Nous allons passer maintenant au cas général. Nous désignerons comme d'habitude par D_A le <u>début</u> d'un ensemble presque borélien A

(12) $$D_A(\omega) = \inf \{ t \geqq 0 : X_t(\omega) \in A \}$$

et par H_A le noyau correspondant

(13) $$H_A f^x = E^x[f \circ X_{D_A} , D_A < \infty]$$

Il faut noter que si f est excessive la fonction $H_A f$ n'est pas excessive en général : elle est seulement <u>fortement surmédiane</u> , i.e. $P_T H_A f \leqq H_A f$ pour tout temps d'arrêt T.

Soit A un ensemble <u>totalement effilé</u> : le 1-potentiel d'équilibre de A est majoré sur A par une constante c>1 . A est alors finement fermé, et les trajectoires de (X_t) le rencontrent suivant un ensemble isolé. Si l'on pose

$$T_0=0 , T_1=T_A \ldots\ldots , T_{n+1}= \inf \{ t>T_n , X_t \in A \}$$

on a $\lim_n T_n = +\infty$, et le processus (X_{T_n}) ($n \geqq 0$) est une chaîne de Markov sur E dont le noyau de transition est P_A . Nous dirons dans les quelques pages qui suivent que A est <u>adéquat</u> si cette chaîne est transiente. Soit G son potentiel, et soit L le noyau

$$L(x,f) = E^x[\int_0^{T_A} f \circ X_s \, ds]$$

on a $GL=U$. Soit h une fonction partout > 0 telle que Uh soit bornée ; la fonction Lh étant partout >0, et l'ensemble $A\cap\{Lh>\varepsilon\}$ étant adéquat pour tout $\varepsilon>0$, on voit que tout ensemble totalement effilé (donc aussi tout ensemble semi-polaire) est réunion dénombrable d'ensembles adéquats.

LEMME 1. Supposons que μ admette une décomposition $\mu=\mu^1+\mu^2$, où μ^1 ne charge pas les ensembles semi-polaires et μ^2 est portée par un ensemble adéquat A. Il existe alors un ensemble finement fermé B tel que $\mu_\infty = (\mu-\lambda)H_B$ (et non plus P_B) .

DEMONSTRATION. Nous transformons le processus de la manière suivante. Nous construisons un nouvel espace d'états $\overline{E}$ en adjoignant à E une copie de A (topologie somme), que nous noterons A^- (à $a\in A$ correspond $a^-\in A^-$, et nous notons i^- l'application de E dans $\overline{E}$ qui laisse fixe A^c et transforme a en a^-). Nous définissons un processus $\overline{X}_t$ de la manière suivante : en jargon probabiliste, une particule issue de $x\in E$ se promène suivant (P_t) jusqu'à l'instant T_A , où elle rencontre A pour la première fois après 0 en un point a. A cet instant, au lieu de lui attribuer la position a, nous lui attribuons la position a^- , et nous l'attachons à ce point pour une durée exponentielle de paramètre 1. Au bout de ce temps, elle saute au point $a\in E$ et reprend son évolution jusqu'à la seconde rencontre de A, etc. De même, une particule issue de a^- y reste un temps exponentiel, puis saute en a, etc. Le processus $\overline{X}_t$ est fortement markovien, et aucune partie de A^- n'est de potentiel nul.

Si θ est une mesure sur E, notons $\overline{\theta}$ la mesure image $i^-(\theta)$. Je dis que la relation $\alpha\dashv\beta$ (semi-groupe (P_t)) est équivalente à la relation $\overline{\alpha}\dashv\overline{\beta}$ (semi-groupe $(\overline{P}_t)$; la présence des $^-$ sur les lettres suffit à l'indiquer). Si f est une fonction sur E, identifiée à une fonction sur $\overline{E}$ nulle sur A^-, on a $\overline{U}f(x)=Uf(x)$ si $x\notin A$, et $\overline{U}f(a)=\overline{U}f(a^-)=Uf(a)$ si $a\in A$, d'où il résulte que $<\overline{\alpha},\overline{U}f > = < \alpha,Uf >$, et par conséquent que $\overline{\alpha}\dashv\overline{\beta} \Rightarrow \alpha\dashv\beta$. Inversement, supposons que $\alpha\dashv\beta$; nous verrons au § 3 (sans cercle vicieux) qu'il existe un temps d'arrêt T tel que $\alpha=\beta P_T$, et il en résulte que $\alpha(f)\leqq\beta(f)$ pour toute fonction fortement surmédiane f . Pour vérifier que $\overline{\alpha}\dashv\overline{\beta}$, il nous suffit de montrer que $< \overline{\alpha},\overline{U}g > \leqq < \overline{\beta},\overline{U}g >$ pour toute fonction $\overline{g}\geqq 0$ nulle hors de A^- . Soit g la fonction sur E, nulle hors de A et telle que $g(a)=\overline{g}(a^-)$; on vérifie très aisément que $< \overline{\alpha},\overline{U}g> = <\alpha,Gg >$ et la relation analogue pour β ; comme Gg est fortement surmédiane sur E, la phrase soulignée est établie.

Considérons alors les mesures $\overline{\lambda}$ et $\overline{\mu}$: comme toute mesure majorée par $\overline{\mu}$ est de la forme $\overline{\theta}$, puisque $\overline{\mu}$ ne charge pas A, on déduit aussitôt de ce qui précède que la décomposition canonique de $\overline{\mu}$ relativement à $\overline{\lambda}$ est

(14) $$\overline{\mu} = \overline{\mu'} + \overline{\mu_{\infty}}$$

Mais $\overline{\mu}$ ne charge pas les ensembles semi-polaires dans $\overline{E}$, et d'après la proposition 7 il existe un ensemble $\overline{B}$ tel que $\overline{\mu}=\overline{\lambda}\overline{P}_{\overline{B}}$. La descente sur E est alors immédiate : il faut seulement un peu prendre garde à ce qui se passe à l'instant 0 sur $\overline{B}\cap A^-$, qui impose la transformation de $\overline{P}_{\overline{B}}$ en H_B, non en P_B. On passe maintenant au cas général :

PROPOSITION 8. <u>Il existe un ensemble finement fermé</u> B <u>tel que</u> $\mu_{\infty}=(\mu-\lambda)H_B$.

DEMONSTRATION. Nous utiliserons le lemme suivant, qui est immédiat dans le cas discret, et s'étend à la situation présente par la proposition 5 (ou bien voir MEYER [2])

LEMME 3. <u>Considérons les décompositions canoniques relativement à</u> λ

$$\mu_1= \mu_1'+ \mu_{1\infty} \quad , \quad \mu_2=\mu_2'+ \mu_{2\infty}$$

<u>de deux mesures telles que</u> $\mu_1\leqq\mu_2$. <u>Alors on a</u> $\mu_{1\infty}\leqq \mu_{2\infty}$.

Dans ces conditions , décomposons μ en une partie μ_c qui ne charge pas les semi-polaires, et une partie μ_d portée par un semi-polaire A. Puis représentons A comme la réunion d'une suite croissante d'ensembles adéquats A_n , et posons

$$\mu_n = \mu_c + \mu_d I_{A_n}$$

Le lemme 2 est appliquable à μ_n. Ecrivons la décomposition canonique de μ_n relativement à λ

$$\mu_n= \mu_n' + \mu_{n\infty} \quad , \text{ où l'on sait que } \mu_{n\infty}=(\mu_n-\lambda)H_{B_n}$$

D'après le lemme 3, les $\mu_{n\infty}$ croissent. Or $\mu_{n\infty}U =(\mu_n-\lambda)UR$ qui croît vers $(\mu-\lambda)R = \mu_{\infty}U$, donc la limite de $\mu_{n\infty}$ est μ_{∞}.

Posons $C_n= \bigcap_{m\geqq n} B_m$; comme B_m porte $\mu_{m\infty}$, donc $\mu_{n\infty}$, C_n porte $\mu_{n\infty}$. Comme $C_n\subset B_n$ la relation $\mu_n'H_{B_n}=\lambda H_{B_n}$ entraîne $\mu_n'H_{C_n}=\mu_n'H_{B_n}H_{C_n}=\lambda H_{B_n}H_{C_n}=\lambda H_{C_n}$. On en déduit que $\mu_{n\infty}=(\mu_n-\lambda^n)H_{C_n}$. Soient C la réunion des C_n, et B sa fermeture fine ; C porte μ_{∞} (B aussi) et on a $\mu_{\infty}=(\mu-\lambda)H_B$, d'où la proposition.

APPLICATION A UN RESULTAT DE MOKOBODZKI

La méthode utilisée par MOKOBODZKI [4] pour établir la proposition suivante - qui est très jolie, mais constitue une digression - est tout à fait différente de celle-ci.

Nous notons A_λ l'ensemble des mesures positives μ telles que $\mu \dashv \lambda$. C'est un ensemble convexe .

PROPOSITION 9. <u>Les points extrémaux de</u> A_λ <u>sont les mesures</u> λH_B .

DEMONSTRATION. Nous verrons au § 3 que les éléments de A_λ sont de la forme λP_T , où T est un temps d'arrêt. Si λH_B admet une représentation

$$\lambda H_B = t.\lambda P_{T_1} + (1-t)\lambda P_{T_2} \tag{15}$$

Soit f une fonction excessive ; appliquons les deux membres à $H_B f$, il vient $\lambda H_B f = t.\lambda P_{T_1} H_B f + (1-t)\lambda P_{T_2} H_B f$; mais $P_{T_1} H_B f \leqq H_B f$, $P_{T_2} H_B f \leqq H_B f$, et aucune de ces deux inégalités ne peut être stricte. Cela donne[1] $T_1 \leqq D_B$, $T_2 \leqq D_B$ P^λ-p.s.. Mais alors $P_{T_1} f \geqq H_B f$, $P_{T_2} f \geqq H_B f$, et d'après (15) aucune de ces inégalités ne peut être stricte.[2] Il en résulte que λH_B est bien extrémale.

Inversement, soit μ un élément extrémal de A_λ . Nous avons $\mu \dashv \lambda$; ainsi si nous considérons la mesure $\nu = 2\mu$, et sa décomposition canonique $\nu = \nu' + \nu_\infty$, $\nu' \dashv \lambda$ relativement à λ , la décomposition $\nu = \mu + \mu$, $\mu \dashv \lambda$ nous donne $\mu \dashv \nu'$, donc $\nu_\infty = \nu - \nu' \dashv \nu - \mu = \mu$, donc $\nu_\infty \dashv \mu \dashv \lambda$. Les deux mesures ν' et ν_∞ appartiennent donc à A_λ , et nous avons $\mu = \frac{1}{2}\nu' + \frac{1}{2}\nu_\infty$. Comme μ est extrémale, $\nu' = \mu = \nu_\infty$, et l'existence d'un B portant ν_∞ tel que $\nu' H_B = \lambda H_B$ nous donne $\mu H_B = \lambda H_B$, puis $\mu = \lambda H_B$.

<u>APPLICATION AU SCHEMA DE REMPLISSAGE</u>

Nous n'avons pas besoin ici de savoir ce qu'est le schéma de remplissage : nous avons admis plus haut l'existence d'un temps d'arrêt T tel que $\mu' = \lambda P_T$. Définissons alors les mesures

$$\lambda_t(f) = E^\lambda[f \circ X_t,\ t<T\ ]$$

$$\mu'_t(f) = E^\lambda[\ f \circ X_T,\ T \leqq t] \qquad (\text{ ainsi } \mu'_t \uparrow \mu' \text{ lorsque } t \to \infty\ )$$

$$\mu_t(f) = \mu(f) - \mu'_t(f) = E^\lambda[f \circ X_T\ ,\ t<T<\infty\ ] + \mu_\infty(f)\ .$$

Ces mesures dépendent a priori du choix de T : on pourrait montrer qu'elles ne dépendent que de λ et μ , d'où la notation.

La propriété suivante correspond à une propriété bien connue du schéma de remplissage discret, et sera améliorée plus tard

PROPOSITION 10. λ_t <u>et</u> μ_∞ <u>sont étrangères pour tout</u> t.

DEMONSTRATION. Soit B finement fermé tel que $\mu' H_B = \lambda H_B$. Cela s'écrit $\lambda P_T H_B = \lambda H_B$, soit $\lambda P_{T+D_B \circ \theta_T} = \lambda P_{D_B}$. Mais $T + D_B \circ \theta_T \geqq D_B$. En appliquant cette égalité à Uf, où f est partout >0 et Uf est bornée, on voit que $T + D_B \circ \theta_T = D_B$ P^λ-p.s., donc $T \leqq D_B$ P^λ-p.s.. Ainsi B porte μ_∞ tandis que λ_t est portée par B^c.

[1] Cf la démonstration de la proposition 10.

§ 3 . LE SCHEMA DE REMPLISSAGE

Nous allons maintenant supprimer toutes les hypothèses de transience, et construire le schéma de remplissage par " dépliement" , à la manière de la dernière partie du § 1 . Il sera assez facile de construire les mesures μ_t, beaucoup plus difficile de construire les mesures λ_t . Nous suivons de très près les méthodes de ROST.

Nous considérons l'espace $F=\mathbb{R}_+\times E$, muni du semi-groupe (Q_t) défini par passage à l'espace-temps :

$$\varepsilon_{(s,x)}Q_t = \varepsilon_{s+t}\otimes \varepsilon_x P_t$$

Nous noterons V son potentiel, (V_p) sa résolvante, R la notion de réduite correspondante . Nous ne faisons aucune hypothèse de transience sur (P_t), mais V est un noyau propre : toute mesure θ bornée sur tout ensemble de la forme $[0,n]\times E$ a un potentiel θV possédant la même propriété, et donc σ-fini.

λ et μ sont deux mesures bornées sur E, et $\overline{\lambda}$ et $\overline{\mu}$ les mesures sur F

(16) $$\overline{\lambda} = \int_0^\infty \varepsilon_s\otimes \lambda\, ds \quad , \overline{\mu} = \int_0^\infty \varepsilon_s\otimes\mu\, ds$$

Par analogie avec le cas discret, nous introduisons les mesures

(17) $$\begin{aligned}\overline{\alpha} &= (\overline{\mu}-\overline{\lambda})V\\ \overline{\sigma} &= \overline{\alpha}R-\overline{\alpha}\end{aligned}$$

D'après la théorie de MOKOBODZKI (§2) il existe une mesure positive $\overline{\mu}_\infty$ sur F telle que $\overline{\alpha}R=\overline{\mu}_\infty V$, et que $\overline{\mu}_\infty \leqq \overline{\mu}$. La mesure $\overline{\mu}_\infty$ peut donc s'écrire

(18) $$\overline{\mu}_\infty = \int_0^\infty \varepsilon_s\otimes \mu_s\, ds \quad , \text{ avec } \mu_s\leqq\mu$$

Nous poserons $\overline{\mu}-\overline{\mu}_\infty = \mu'$, $\mu-\mu_s=\mu'_s$

De même, la relation $\overline{\alpha}R \leqq \overline{\mu}V$ entraîne $\overline{\sigma}\leqq\overline{\lambda}V$, donc

(19) $$\overline{\sigma} = \int_0^\infty \varepsilon_s\otimes\sigma_s\, ds \quad \text{avec } \sigma_s\leqq \int_0^s \lambda P_u\, du \quad .$$

La relation $\overline{\lambda}V-\overline{\sigma} = \overline{\mu}'V$ s'écrit alors de la manière suivante, en l'appliquant à une fonction sur F de la forme $h(s,x)=e^{-ps}f(x)$

(20) $$\frac{1}{p}< \lambda,U_pf > - \int_0^\infty e^{-ps}< \sigma_s,f > ds = \int_0^\infty e^{-ps}< \mu'_s,U_pf > ds$$

La mesure $\varepsilon_{s,x}V$ s'écrit $\int_0^\infty \varepsilon_r\otimes\theta_r\,dr$, où $\theta_r=0$ pour $r<s$, $\theta_r=\varepsilon_x P_{r-s}$ pour $r\geqq s$. L'application $r\mapsto\theta_r$ est étroitement continue à droite, et on a $\theta_r P_s\leq\theta_{r+s}$. Par intégration, on voit que tout potentiel de mesure positive (bornée sur $[0,n]\times E$ pour tout n) admet une représentation $\int_0^\infty \varepsilon_r\otimes\theta_r dr$ avec une famille θ_r satisfaisant aux mêmes propriétés. Par différence, on voit que l'application $t\mapsto\sigma_t$ (qui n'était définie qu'à une équivalence près) peut être supposée continue à droite. Nous le ferons dans la suite.

Notons $R^{(n)}$ l'opérateur de réduite par rapport au noyau discret $Q_{2^{-n}}$ (et non nV_n comme au §2) . Comme on l'a signalé au début du § 2, $\bar{\alpha}R^{(n)}$ tend en croissant vers $\bar{\alpha}R$, car une mesure est excessive si et seulement si elle est $Q_{2^{-n}}$-excessive pour tout n. On peut calculer $\bar{\alpha}R^{(n)}$ de la manière suivante : soit G_n le noyau potentiel de $Q_{2^{-n}}$, et soit

$$\lambda^n=\int_0^{2^{-n}}\lambda P_s\,ds \qquad \mu^n=\int_0^{2^{-n}}\mu P_s ds$$

$$\bar{\lambda}^n=\int_0^{2^{-n}}\varepsilon_s\otimes\lambda^n\,ds \qquad \bar{\mu}^n=\int_0^{2^{-n}}\varepsilon_s\otimes\mu^n ds$$

Nous avons alors $\bar{\alpha}=(\bar{\mu}^n-\bar{\lambda}^n)G_n$, et si nous appliquons à λ^n,μ^n le schéma de remplissage discret par rapport à $P_{2^{-n}}$, obtenant ainsi des mesures λ^n_k , μ^n_k , σ^n_k , nous avons

$$\bar{\sigma}^n=\bar{\alpha}R^{(n)}-\bar{\alpha}=\int_0^\infty\varepsilon_s\otimes\sigma^n_s\,ds\ ,\ \text{où } \sigma^n_s=\sigma^n_k \text{ sur } [k2^{-n},(k+1)2^{-n}[$$

L'application $s\mapsto\sigma^n_s$ est croissante et continue à droite, et σ^n_s croît en n pour tout n. Il en résulte que l'application $s\mapsto\sigma_s$ est <u>croissante</u> et continue à droite , et que $\sigma^n_s\uparrow\sigma_s$ pour tout s. Si l'on convient de poser $\sigma^n_\infty=\sup_s\sigma^n_s$, $\sigma_\infty=\sup_s\sigma_s$, mesures non nécessairement σ-finies, on a par interversion de sup que $\sigma_\infty=\sup_n\sigma^n_\infty$.

Ensuite, si s,t,u sont trois nombres de la forme $k2^{-n}$, on a

$$\sigma^n_{s+t+u}-\sigma^n_{s+t}\leqq(\sigma^n_{t+u}-\sigma^n_t)P_s\leqq\int_{s+t}^{s+t+u}\lambda P_r\,dr$$

Par passage à la limite, on en déduit les inégalités analogues pour σ

$$\sigma_{s+t+u}-\sigma_{s+t}\leqq(\sigma_{t+u}-\sigma_t)P_s\leqq\int_{s+t}^{s+t+u}\lambda P_r\,dr$$

d'abord pour s,t,u dyadiques, puis quelconques. Pour toute fonction bornée f sur E, la fonction $t\mapsto<\sigma_t,f>$ est lipschitzienne, donc dérivable p.p. et l'intégrale de sa dérivée. Si f est p-excessive, on vérifie au moyen des inégalités ci-dessus que la fonction $t \mapsto \frac{d}{dt}(e^{-pt}<\sigma_t,f>)$ est p.p. égale à une fonction décroissante. La fonction $e^{-pt}<\sigma_t,f>$ est donc concave, et nous pouvons définir $\lambda_t(f)$ comme la dérivée à droite de $<\sigma_\cdot,f>$ au point t. On a défini ainsi une forme linéaire positive λ_t sur l'espace des différences de fonctions p-excessives, majorée par la mesure λP_t. C'est donc une mesure, et nous avons

(21) $$\sigma_t = \int_0^t \lambda_s \, ds \quad , \quad 0 \leqq \lambda_{s+t} \leqq \lambda_s P_t \leqq \lambda P_{s+t} \quad .$$

Soit g une fonction continue comprise entre 0 et 1. Si $\varepsilon \downarrow 0$ on a $<\lambda_t,g> = \lim <\lambda_t,P_\varepsilon g>$, et d'autre part $0 \leqq <\lambda_{t+\varepsilon}-\lambda_t P_\varepsilon,g> \leqq <\lambda_{t+\varepsilon}-\lambda_t P_\varepsilon,1>$ qui tend vers 0. Ainsi l'application $t \mapsto \lambda_t$ est étroitement continue à droite, et nous avons obtenu le résultat suivant :

PROPOSITION 11. __Il existe une famille__ $t \mapsto \lambda_t$ __de mesures bornées, étroitement continue à droite, telle que__ $0 \leqq \lambda_{s+t} \leqq \lambda_s P_t \leqq \lambda P_{s+t}$ $(s,t \geqq 0)$ __et que__

$$\bar{\alpha}R - \bar{\alpha} = \int_0^\infty \varepsilon_s \otimes \sigma_s \, ds \quad , \quad \sigma_t = \int_0^t \lambda_s \, ds$$

Il est intéressant de porter (21) dans la formule (20) : le premier membre s'écrit

(22) $$\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pu} < \lambda P_u - \lambda_u, f > du = < \bar{\lambda}V - \bar{\sigma}, h > = \int_0^\infty e^{-pu} < \mu'_u , U_p f > du$$

Nous allons maintenant utiliser la proposition suivante, dont nous renverrons la démonstration en appendice, pour éviter l'interruption du raisonnement principal.

PROPOSITION 12. __Soit__ (λ_t) __une famille de mesures positives telle que__ $\lambda_{s+t} \leqq \lambda_s P_t \leqq \lambda P_{s+t}$, __et en outre étroitement continue à droite. Il existe alors (pour une réalisation convenable de__ (P_t)) __un temps d'arrêt__ T __tel que__

(23) $$\lambda_t(f) = E^\lambda[f \circ X_t \, , \, t<T \,] \quad (t \in \mathbb{R}_+ \, , \, f \text{ borélienne bornée })$$

Les notations de la proposition suivante sont un peu délicates. Il faut se rappeler que μ_t a été définie plus haut pour t fini (formule (18)), et que lorsque (P_t) est transient μ_∞ a été définie au § 2 par la formule $\mu_\infty U = (\mu-\lambda)UR$, où R est ici une réduite sur E, non sur F.

PROPOSITION 13. __Posons__ $m'=\lambda P_T$, $m_\infty = \mu - m'$, $m_t(f) = E^\lambda[f \circ X_T, \, t<T<\infty \,] + m_\infty(f)$. __Alors__

1) $m_t = \mu_t$ __pour presque tout__ t.
2) __Si__ (P_t) __est transient on a__ $\mu_\infty = m_\infty$.

DEMONSTRATION. Soit f borélienne bornée sur E, et soit $g=U_p f$. On a

$$\int_0^\infty e^{-pu} < m'_u, g > du = E^\lambda[\int_0^\infty e^{-pt} g\circ X_t I_{\{t\geq T\}} dt] = E^\lambda[\frac{1}{p} e^{-pT} g\circ X_T]$$

où l'on a posé $m'_u(g) = < \mu - m_u, g > = E^\lambda[g\circ X_T, T\leq u]$. Remplaçons g par $U_p f$ et appliquons la propriété de Markov forte, on obtient la valeur

$$\frac{1}{p} E^\lambda[\int_0^\infty e^{-pu} f\circ X_u du - \int_0^T e^{-pu} f\circ X_u du] = \frac{1}{p}\int_0^\infty < \lambda P_u - \lambda_u, f > e^{-pu} du$$

C'est le premier membre de (22). Ainsi

$$< \int_0^\infty e^{-pu} \mu'_u \, du \, , \, U_p f > \; = \; < \int_0^\infty e^{-pu} m'_u \, du \, , \, U_p f >$$

Ces deux mesures coïncident sur l'image de la résolvante, donc sont égales. En inversant la transformation de Laplace, on voit que $\mu'_u = m'_u$ pour presque tout u, d'où 1).

Pour 2), nous rappellerons le résultat établi plus haut, suivant lequel $\sigma^n_\infty \uparrow \sigma_\infty = \sup_s \sigma^n_s$. Or nous avons

$$\sigma_\infty(f) = \int_0^\infty \lambda_t(f)\, dt = E^\lambda[\int_0^T f\circ X_s ds] = < \lambda U - \lambda P_T U \, , \, f >$$

d'autre part, σ^n_∞ est une mesure qui se calcule sur un schéma de remplissage discret : si $\alpha = (\mu-\lambda)U$, et si $R^{(n)}$ désigne une réduite <u>sur E</u> relativement à $P_{2^{-n}}$, on a $\sigma^n_\infty = \alpha R^{(n)} - \alpha$, et donc à la limite

$$< \sigma_\infty, f > \; = \; < \alpha R - \alpha, \; f > \; = \; < (\mu_\infty - \mu + \lambda)U, \; f >$$

en comparant ces deux relations, on trouve que $\mu' = \mu - \mu_\infty = \lambda P_T$, d'où 2).

REMARQUES. 1) La formule (18) ne définit les mesures μ_t que pour presque tout t. Désormais, nous définirons $\mu_t = m_t$ comme dans la proposition 13. La famille μ_t est alors décroissante et étroitement continue à droite, et ces propriétés plus (18) la caractérisent uniquement, indépendamment de T. Nous <u>définirons</u> $\mu_\infty = \inf_s \mu_s$, sans faire aucune hypothèse de transience : nous venons de voir que cette notation est cohérente.

2) Plaçons nous dans le cas transient, et supposons $\mu \dashv \lambda$. Alors $(\mu-\lambda)U \leq 0$, $(\mu-\lambda)UR = 0$, et $\mu_\infty = 0$. Donc $\mu' = \lambda P_T = \mu$, et nous avons établi (sans cercle vicieux!) la propriété utilisée dans la seconde partie du paragraphe 2. On posera dans tous les cas $\mu' = \mu - \mu_\infty$.

3) Il faut noter que les mesures $\overline{\mu}_\infty$ et $\overline{\sigma}$, puis λ_t, ont été construites sans faire appel à un temps d'arrêt T. C'est assez satisfaisant car (contrairement à ce qui se passait dans le cas discret) on n'a plus de choix canonique pour le temps d'arrêt T de la prop.12.

Notons $(\Omega,\underline{\underline{F}}\ ,\ \underline{\underline{F}}_t,X_t\ P^\cdot\ )$ la réalisation du semi-groupe (P_t) que nous avons utilisée pour construire le temps d'arrêt T (et qui sera décrite explicitement dans l'appendice). Nous construisons de la manière suivante une réalisation du semi-groupe (Q_t) :

$$\begin{aligned}
&\overline{\Omega} = \mathbb{R}_+\times\Omega \\
(24)\qquad &\overline{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}} \quad , \ \overline{\underline{\underline{F}}}_t=\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}_t \\
&\overline{P}^{r,x} = \varepsilon_r\otimes P^x
\end{aligned}$$

si $\overline{\omega}\in\overline{\Omega} = (r,x)$, $Y_t(\overline{\omega}) = (r+t,X_t(\omega))$, $\overline{\Theta}_t(\overline{\omega}) = (r+t,\ \Theta_t\omega)$.
enfin $\overline{T}(\overline{\omega})=T(\omega)$.

$\overline{T}$ est un temps d'arrêt de la famille $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$, et nous avons le résultat suivant :

LEMME 3. <u>Posons</u> $\overline{\lambda}_t(h) = \overline{E}^{\lambda}[h\circ Y_t\ ,\ t<\overline{T}]$
$\overline{\mu}'_t(h) = \overline{E}^{\lambda}[h\circ Y_{\overline{T}}\ ,\ \overline{T}\leq t] \qquad \overline{\mu}_t = \overline{\mu} - \overline{\mu}'_t$ (25)

<u>Alors</u>

$$\overline{\lambda}_t = \int_t^\infty \varepsilon_s\otimes\lambda_t\ ds$$
$$\overline{\mu}'_t = \int_0^t \varepsilon_s\otimes\mu'_s\ ds + \int_t^\infty \varepsilon_s\otimes\mu'_t\ ds \qquad (26)$$

<u>et en particulier</u> $(t=\infty\ )$ $\overline{\lambda}Q_{\overline{T}} = \overline{\mu}'_{\infty}$ <u>est la mesure précédemment désignée par</u> $\overline{\mu}'$.

DEMONSTRATION. Les formules (26) sont l'extension de (5) au cas continu. Pour les établir, il suffit de vérifier qu'une fonction h de la forme $h(s,x)= e^{-ps}f(x)$ a même intégrale par rapport aux deux membres. Par exemple, la première formule (26) se vérifie ainsi

$$\overline{\lambda}_t(h) = \int_0^\infty dr\ E^{\lambda}[e^{-p(r+t)}f\circ X_t\ I_{\{t<T\}}]$$
$$= \int_t^\infty e^{-ps}E^{\lambda}[f\circ X_t\ I_{\{t<T\}}]\ ds = <\int_t^\infty \varepsilon_s\otimes\lambda_t\ ds\ ,\ h>$$

et de même la dernière assertion de l'énoncé

$$<\overline{\lambda}Q_{\overline{T}},h> = \int_0^\infty dr\ E^{\lambda}[e^{-p(r+T)}f\circ X_T,\ T<\infty\ ] = \frac{1}{p}E^{\lambda}[e^{-pT}f\circ X_T]$$

et on est ramené à la vérification de la proposition 13 .

Mais la décomposition $\overline{\mu} = \overline{\mu}'+\overline{\mu}_{\infty}$ est la décomposition canonique de $\overline{\mu}$ relativement à $\overline{\lambda}$. Nous pouvons donc appliquer la proposition 10, qui nous donne la généralisation de la propriété fondamentale du schéma de remplissage discret :

PROPOSITION 14 . λ_t <u>et</u> μ_t <u>sont étrangères pour tout</u> t.

DEMONSTRATION. On écrit (prop.10) que $\overline{\lambda}_t$ et $\overline{\mu}_{\infty}$ sont étrangères. Cela entraîne que $\overline{\lambda}_t$ et $\overline{\mu}_{t+\varepsilon}$ sont étrangères pour tout $\varepsilon>0$, et on fait tendre ε vers 0.

Ensuite, nous étendons la proposition 8, sans aucune hypothèse de transience :

PROPOSITION 15. <u>Il existe un ensemble finement fermé</u> B <u>tel que</u> $\mu_\infty=(\mu-\lambda)H_B$.

DEMONSTRATION. Choisissons un ensemble presque-borélien finement fermé A dans F, tel que $\overline{\mu}_\infty=(\overline{\mu}-\overline{\lambda})H_A$ pour le <u>semi</u>-groupe (Q_t). Comme il existe un $\underline{\underline{K}}_\sigma$ A' contenu dans A tel que $\overline{D}_A=\overline{D}_{A'}$, $\overline{P}^{\lambda+\mu}$-p.s., nous pouvons (quitte à changer de notation) supposer que A est borélien. Posons $\overline{D}_A=D$; c'est un temps d'entrée sur $\overline{\Omega}$, et nous pouvons poser

$$\text{si } \overline{\omega}=(r,\omega)\ ,\quad D(\overline{\omega})=D_r(\omega)$$

Pour tout u, $\{\overline{\omega} : D(\overline{\omega})<u\}$ est $\underline{\underline{F}}$-analytique dans $\overline{\Omega}$, ce qui signifie que

$$\{(r,\omega) : D_r(\omega)<u\} \text{ est } \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}} \text{ -analytique dans } \mathbb{R}_+\times\Omega$$

Il n'est pas difficile de déduire alors du théorème de capacitabilité qu'il existe un processus mesurable (D'_r) indistinguable du processus (D_r) pour la mesure $P^{\lambda+\mu}$ sur Ω.

D'après WALSH [5], nous définirons si f est une fonction réelle sur $\mathbb{R}_+$

$$a=\liminf_{t\to\infty} \operatorname{ess} f(t)$$

comme le sup des nombres b tels qu'il existe un intervalle $[N,\infty[$ sur lequel $f\geq b$ p.p. (au sens de Lebesgue). D'après l'article de WALSH cité, la fonction $\liminf_{t\to\infty}\operatorname{ess} f_t(\omega)$ est une variable aléatoire pour tout processus <u>mesurable</u> (f_t) ; en utilisant le processus mesurable (D'_t) considéré plus haut, on voit alors que la fonction

$$\tau(\omega)=\liminf_{r\to\infty}\operatorname{ess} D_r(\omega)$$

est une variable aléatoire. D'autre part, comme D est un temps d'entrée pour le processus (Y_t)

$$t<D_r(\omega) \Rightarrow D_{r+t}(\theta_t\omega)=D_r(\omega)-t \quad (\text{ identiquement })$$

on a, en passant aux lim inf ess

$$t<\tau(\omega) \Rightarrow \tau(\theta_t\omega)=\tau(\omega)-t \text{ identiquement}$$

et τ est un temps terminal. Enfin, nous avons $\overline{T}\leq D$ $\overline{P}^{\overline{\lambda}}$-p.s. (cf. proposition 10), soit $\int_0^\infty dr\, P^\lambda\{T>D_r\}=0$, et il existe un ensemble de mesure nulle J tel que pour $r\notin J$ on ait $T\leq D_r$ P^λ-p.s. ; prenant la lim inf ess le long de J, on voit que $T\leq\tau$ P^λ-p.s. La relation $\mu'=\lambda P_T$, et le fait que τ est un temps terminal, entraînent alors que $\mu' P_\tau=\mu P_\tau$.

D'autre part, la mesure $\overline{\mu}_\infty$ est portée par A, donc $\overline{P}^{\overline{\mu}_\infty}\{D>0\}=0$, d'où l'on tire $\int_0^\infty P^{\mu_\infty}\{D_r>0\}\,dr=0$ et finalement, par le même argument que ci-dessus, le fait que μ_∞ est portée par l'ensemble $\{x : P^x\{\tau=0\}=1\}$ Soit C un ensemble borélien contenu dans cet ensemble et portant μ_∞ ; on a $\tau\leq D_C$, donc $\mu' H_C=\lambda H_C$: comme C porte μ_∞, on a $\mu_\infty=(\mu-\lambda)H_C$.

On achève la démonstration en prenant pour B la fermeture fine de C.

Les deux propositions suivantes couronnent la théorie du schéma de remplissage.

PROPOSITION 16 . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $\mu_\infty=0$

2) Il existe un temps d'arrêt T tel que $\mu=\lambda P_T$.

3) $\mu(f)\leq\lambda(f)$ pour toute fonction fortement surmédiane f.

4) $<\mu,H_C1> \leq <\lambda,H_C1>$ pour tout borélien C (ou seulement pour tout compact C)

DEMONSTRATION. Nous savons que 1)=>2)=>3)=>4) (et le fait qu'il suffit de supposer 4) pour C compact est une conséquence immédiate du théorème de capacitabilité). Inversement, supposons 4) satisfaite, et choisissons C tel que $\mu_\infty=(\mu-\lambda)H_C$; alors $\mu_\infty(1)=<(\mu-\lambda)H_C,1>\leq 0$, et nous avons $\mu_\infty=0$.

Nous noterons $\dashv\!\!\!=$ le préordre défini par 3) , qui est plus fort que le préordre $\dashv$. Si μ ne charge pas les ensembles semi-polaires, les relations $\mu\dashv\lambda$ et $\mu\dashv\!\!\!=\lambda$ sont équivalentes. En effet, soit f une fonction fortement surmédiane, et soit $\hat{f}$ sa régularisée excessive ; on a $\mu(\hat{f})\leq\lambda(\hat{f}) \leq\lambda(f)$ si $\mu\dashv\lambda$, et d'autre part l'ensemble $\{f\neq\hat{f}\}$ est semi-polaire (cf. CHUNG [1]). On en tire $\mu\dashv\!\!\!=\lambda$.

PROPOSITION 17. Considérons une décomposition $\mu=m'+m_\infty$, où ces mesures sont positives et $m'\dashv\!\!\!=\lambda$. On a alors $m'\dashv\!\!\!=\mu'$.

DEMONSTRATION. Il existe un temps d'arrêt S tel que $m'=\lambda P_S$. Posons aussi sur $\bar{\Omega}$ $\bar{S}(\bar{\omega})=S(\omega)$ si $\bar{\omega}=(r,\omega)$, puis

$$m'_t(f) = E^\lambda[f\circ X_S,\ S\leq t] \quad \text{mesure sur } E$$

$$\bar{m}' = \int_0^\infty \varepsilon_s\otimes m'_s\,ds \quad \text{sur } F$$

Alors on vérifie à la manière du lemme 3 que $\bar{m}'=\bar{\lambda}Q_{\bar{S}}$. Or on a $\bar{\lambda}Q_{\bar{S}}\dashv\bar{\lambda}$ sur F, $m'_t\leq m'\leq\mu$, donc $\bar{m}'\leq\bar{\mu}$. Le semi-groupe (Q_t) étant transient, la proposition 4 entraîne que $\bar{m}'\dashv\bar{\mu}'$ sur F. Si C est un ensemble borélien dans E, la fonction sur F

$$h(s,x) = e^{-ps}H_C1^x$$

est fortement surmédiane sur F, donc

$$\int e^{-ps}< m'_s,H_C1> ds \leq \int e^{-ps}< \mu'_s,H_C1 > ds$$

On multiplie par p, on fait tendre p vers $+\infty$, et il vient que $m'\dashv\!\!\!=\mu'$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHUNG (K.L.) A simple proof of DOOB'S convergence theorem . Séminaire de Probabilités V, Université de Strasbourg (Lecture Notes in M. vol. 191) p. 76

[2] MEYER (P.A.). Deux petits résultats de théorie du potentiel. Même réf. p.211-212.

[3] MOKOBODZKI (G.). Densité relative de deux potentiels comparables. Séminaire de Probabilités IV (Lecture Notes in M. vol. 124). p. 170-194.

[4] MOKOBODZKI (G.). Eléments extrémaux pour le balayage. Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY (Théorie du potentiel) 13e année, 1969/70, n°5.

[5] WALSH (J.). Some topologies connected with Lebesgue measure. Séminaire de Probabilités V, p.290-310.

APPENDICE : DEMONSTRATION DE LA PROP.12

Désignons par $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,X_t,\ldots,)$ la réalisation continue à droite canonique du semi-groupe (P_t). Nous allons établir l'existence d'un processus $(M_t)_{t\geq 0}$ sur Ω, adapté et continu à droite, à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, à trajectoires décroissantes et tel que l'on ait pour tout t et toute fonction borélienne bornée f

(21) $\qquad < \lambda_t,f > = E^{\lambda}[f\circ X_t.M_t]$

Cela suffira. Formons en effet $\overline{\Omega}= \mathbb{R}_+\times\Omega$, $\overline{\underline{\underline{F}}} =\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$, $\overline{\underline{\underline{F}}}_t=\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}_t$, $\overline{P}^{\lambda} = \gamma\otimes P^{\lambda}$, où γ est une loi exponentielle de paramètre 1 sur $\mathbb{R}_+$, et posons enfin $\overline{X}_t(s,\omega)=X_t(\omega)$ sur $\overline{\Omega}$. Nous avons construit ainsi une réalisation du semi-groupe (P_t). Puis nous posons

$$T(s,\omega) = \inf \{ t : -\log M_t(\omega) > s \}$$

de sorte que T est un temps d'arrêt de la famille $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$, et l'on a $E^{\lambda}[f\circ X_t.M_t]=\overline{E}^{\lambda}[f\circ\overline{X}_t,t<T]$, le résultat cherché.

Pour établir (21), on utilisera un argument de compacité faible. On pose d'abord

$$h_{s,t} = \text{dérivée de RADON-NIKODYM de } \lambda_t \text{ par rapport à } \lambda_s P_{t-s}$$

nous noterons aussi h_0 la densité de λ_0 par rapport à λ. Si ρ est une subdivision de $\mathbb{R}_+$: $0<t_1<t_2\ldots$, nous définirons le processus

M_t^ρ ainsi :

$$M_{t_n}^\rho = h_0 \circ X_0 . h_{0,t_1} \circ X_{t_1} . h_{t_1 t_2} \circ X_{t_2} \ldots . h_{t_{n-1},t_n} \circ X_{t_n}$$

où t_n est le dernier point de subdivision $\leq t$. On vérifie très facilement que, si t appartient à la subdivision ρ , on a $<\lambda_t,f> = E^\lambda[f \circ X_t . M_t^\rho]$.

Désignons par ρ_n la n-ième subdivision dyadique de $\mathbb{R}_+$, et appliquons le procédé diagonal de manière à construire une suite n_k telle que, pour tout t dyadique , $M_t^{\rho_{n_k}}$ converge faiblement dans L^1 vers une variable aléatoire M_t^o , $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable. Nous aurons pour t dyadique $E^\lambda[f \circ X_t . M_t^o] = < \lambda_t, f >$.

Les processus M_t^ρ sont décroissants. Quitte à modifier chaque M_t^o sur un ensemble de mesure nulle, nous pouvons donc supposer que $t \mapsto M_t^o$ est un processus à trajectoires toutes décroissantes, pour t dyadique. On pose alors, pour finir, $M_t = M_{t+}^o$.

Il faut noter que (contrairement à ce qui se passait dans le cas discret) le processus (M_t) n'est pas canonique : il est construit par le procédé diagonal. On peut conjecturer qu'en fait la suite $M_t^{\rho_n}$ toute entière converge.