CLAUDE DELLACHERIE

Les théorèmes de Mazurkiewicz-Sierpinski et de Lusin

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 87-102
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__87_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
STRASBOURG

SEMINAIRE DE PROBABILITES 1969/70

LES THEOREMES DE MAZURKIEWICZ-SIERPINSKI ET DE LUSIN

par C. DELLACHERIE

Lors de la première rédaction de "Ensembles aléatoires I" (Séminaire de probabilités III, Lecture Notes n°88, Springer 1969), nous avions utilisé un théorème de MAZURKIEWICZ-SIERPINSKI (en abrégé : M-S) et un théorème de LUSIN dans l'étude des ensembles mesurables à coupes dénombrables. Nous avions alors fait un exposé sur ces deux théorèmes. Puis nous nous sommes aperçus que nous pouvions nous passer de leur usage grâce à des arguments d'approximation par en dessous, cela parce que nous travaillions sur des espaces mesurés (cf "Contributions à la théorie générale des processus" Thèse Strasbourg 1970). Cependant, comme cet exposé était déjà rédigé, nous avons jugé utile de le publier pour les raisons suivantes : a) d'abord, parce que ce sont de très beaux théorèmes quelque peu oubliés maintenant b) ensuite, parce qu'ils sont difficilement accessibles dans la littérature contemporaine. Ainsi la démonstration du théorème de M-S se trouve éparpillée dans KURATOWSKI [4], qui se contente de signaler le théorème de LUSIN en note, tandis que HAUSDORFF [3] donne in extenso le théorème de LUSIN mais ignore le théorème de M-S. Seul HAHN [2] traite les deux théorèmes; mais il est difficilement lisible, et il n'existe qu'en allemand. Signalons cependant que le traité de HAHN est sans doute l'ouvrage le plus complet sur les travaux des écoles russe et polonaise tant pour le contenu que pour la bibliographie (en ce qui concerne les travaux antérieurs à 1932, date de parution de [1]).

Nous supposerons que le lecteur possède les connaissances "honnêtes" d'un mathématicien en 1969 sur les travaux des écoles russe et polonaise : nous nous référons à l'exposé de BOURBAKI [1], dont nous avons adopté la terminologie (nous avons cependant omis les hypothèses parasites de métrisabilité, qui disparaitront aussi dans la 3ème édition de [1]). Dans le premier paragraphe, nous rappelons les principaux résultats dont nous ferons usage, mais auxquels nous nous réfèrerons implicitement le plus souvent.

1. ESPACES POLONAIS. ESPACES SOUSLINIENS. ESPACES LUSINIENS

1 DEFINITION.– Un espace topologique P est dit polonais s'il est métrisable, à base dénombrable, et s'il existe une distance sur P, compatible avec sa topologie, pour laquelle P est complet. Une telle distance sera dite adéquate.

2 On sait que tout espace polonais est un espace de BAIRE. On a d'autre part les propriétés de permanence suivantes :

a) toute somme (resp produit) dénombrable d'espaces polonais est polonais.

b) pour qu'un sous-espace d'un espace polonais P soit polonais, il faut et il suffit qu'il soit égal à l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts de P. En particulier, tout sous-espace ouvert (resp fermé) de P est polonais.

3 DEFINITION.– Un espace topologique E est dit souslinien (resp lusinien) s'il est séparé et s'il existe un espace polonais P et une application continue f surjective (resp bijective) de P sur E.

4 On a les propriétés de permanence suivantes :

a) toute somme dénombrable et tout produit dénombrable d'espaces sousliniens (resp lusiniens) sont sousliniens (resp lusiniens).

b) si E est un espace souslinien (resp. lusinien) et f une application continue (resp continue et injective) de E dans un espace séparé F, l'image f(E) est un sous-espace souslinien (resp lusinien) de F. Réciproquement, si A est un sous-espace souslinien (resp lusinien) de F, l'image réciproque $f^{-1}(A)$ est un sous-espace souslinien (resp lusinien) de E.

Les résultats qui nous intéresserons plus particulièrement ont trait aux rapports existant entre parties sousliniennes (resp lusiniennes) et parties boréliennes. On a d'abord la proposition suivante :

5 THEOREME.- L'ensemble des parties sousliniennes (resp lusiniennes) d'un espace séparé E est stable pour les réunions et intersections dénombrables. Si de plus E est un espace souslinien (resp lusinien), cet ensemble contient la tribu des parties boréliennes de E.

Voici maintenant les deux théorèmes fondamentaux de la théorie : le théorème de séparation des espaces sousliniens et le théorème sur les images injectives d'espaces lusiniens.

6 THEOREME[1].- Soient A_1 et A_2 deux parties sousliniennes disjointes d'un espace séparé E. Il existe deux parties boréliennes disjointes B_1 et B_2 de E telles que A_i soit contenue dans B_i $(i = 1,2)$.

7 THEOREME[1].- Soient E un espace lusinien, F un espace séparé, et f une application continue et injective de E dans F. Alors f(E) est une partie borélienne de F.

---

[1]) contrairement à ce que pourrait faire croire la terminologie de BOURBAKI, le théorème 6 est dû à LUSIN tandis que le théorème 7 est dû à SOUSLIN

Notons enfin le corollaire important du théorème 7 :

8 COROLLAIRE.- <u>Soit</u> E <u>un espace lusinien</u>. <u>L'ensemble des parties lusiniennes de</u> E <u>coincide avec la tribu borélienne de</u> E.

2. IMAGES MULTIPLES

9 Soient E et F deux ensembles, et soit f une application de E dans F. L'ensemble I^k (resp I^∞, I^Ω) des $y \in F$ tels que $f^{-1}(y)$ comporte au moins k points, $k \geq 1$ (resp une infinité, une infinité non dénombrable) sera appelé <u>l'image de multiplicité</u> $\geq k$ (resp <u>infinie</u>, <u>infinie non dénombrable</u>) de f. Si $k=1$, I^1 est l'<u>image</u> de f; si $k=2$, I^2 est l'<u>image multiple</u> de f.

10 THEOREME.- <u>Soient</u> E <u>un espace souslinien</u>, F <u>un espace séparé et</u> f <u>une application continue de</u> E <u>dans</u> F. <u>Pour</u> $k = 1, 2, \ldots, \infty$, <u>l'image de multiplicité</u> $\geq k$ <u>de</u> f <u>est une partie souslinienne de</u> F.

DEMONSTRATION.- Comme $I^\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I^k$, il suffit de considérer le cas où $k < +\infty$. Dans l'espace produit E^k, qui est souslinien, considérons les sous-espaces

$$X_{mn} = \{(x_i)_{1 \leq i \leq k} : x_m \neq x_n\} \quad \text{pour } m \neq n$$

et

$$Y = \{(x_i)_{1 \leq i \leq k} : f(x_i) = f(x_j) \quad 1 \leq i \leq j \leq k\}$$

Comme les X_{mn} sont ouverts et Y est fermé dans E^k, $H = Y \cap (\bigcap_{m \neq n} X_{mn})$ est une partie souslinienne de E^k. Désignons par g la restriction à H de la première projection de E^k sur E. L'ensemble I^k est alors l'image de H par l'application continue $f \circ g$ de H dans F : donc I^k est une partie souslinienne de F.

11 COROLLAIRE.- <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux espaces sousliniens</u>, <u>et soit</u> A <u>une partie souslinienne de</u> $X \times Y$. <u>Pour</u> $k = 1, 2, \ldots, \infty$, <u>l'ensemble des</u> $y \in Y$ <u>tels que la coupe</u> A(y) <u>comporte au moins</u> k <u>points est une partie souslinienne de</u> Y.

REMARQUES.– 1) le oas de l'image de multiplicité non dénombrable sera traité au paragraphe suivant : c'est le théorème de M-S.

2) nous verrons au paragraphe 4 que, si E est un espace lusinien, l'image de E par f est un borélien de F lorsque l'image de multiplicité non dénombrable de f est vide (autrement dit, lorsque f est semi-injective : c'est la première partie du théorème de LUSIN). Si on reprend la démonstration, on voit alors que H est une partie lusinienne de l'espace lusinien E^k et que l'application $f \circ g$ de H dans F est semi-injective : dans ce cas, l'ensemble I^k ($k = 1, 2, \ldots, \infty$) est une partie borélienne de F.

3. LE THEOREME DE MAZURKIEWICZ-SIERPINSKI

12 Nous rapellerons d'abord quelques résultats bien connus de topologie. Un sous-espace d'un espace séparé E est dit <u>parfait</u> s'il est fermé et s'il n'a pas de points isolés. L'espace E contient un plus grand sous-espace parfait, appelé <u>noyau parfait</u> de E; si ce dernier est vide, E est dit <u>clairsemé</u>. Il est clair qu'un espace discret est clairsemé, et qu'un espace de BAIRE dénombrable a au moins un point isolé : on en déduit que, dans un espace polonais, tout sous-espace parfait et non vide est non dénombrable (on peut d'ailleurs démontré qu'il a alors la puissance du continu). Réciproquement, un espace séparé E à base dénombrable, et de cardinal non dénombrable, contient un sous-espace parfait non dénombrable : il suffit de prendre l'ensemble des <u>points de condensation</u> de l'espace, i.e. l'ensemble des $x \in E$ tels que tout voisinage de x soit non dénombrable (si E est polonais, cet ensemble est le noyau parfait de E). Enfin, E étant à base dénombrable, il est facile de voir que E contient une partie infinie dénombrable sans points isolés : il suffit de prendre un ensemble dénombrable dense dans l'ensemble des points de condensation.

La démonstration du théorème de M-S que nous allons donner maintenant est due à KURATOWSKI [4] (la première démonstration de M-S, reprise par HAHN [2], est "horrible" . SIERPINSKI a donné aussi une démonstration élégante pour les espaces lusiniens, dont j'ai oublié la référence). Elle repose essentiellement sur les deux propositions qui vont suivre.

13 THEOREME.- Soit P un espace polonais, et désignons par S le sous-espace de $P^{\mathbb{N}}$ constitué par les suites injectives de $\mathbb{N}$ dans P sans points isolés. Alors S est un espace polonais.

DEMONSTRATION.- Comme $P^{\mathbb{N}}$ est un espace polonais, il suffit de montrer que S est l'intersection d'une suite d'ouverts de $P^{\mathbb{N}}$. Soit d une distance adéquate sur P et posons

$$X_{mn} = \{(x_i) \in P^{\mathbb{N}} : x_m \neq x_n\} \quad \text{pour } m \neq n$$

et

$$Y_{pk} = \{(x_i) \in P^{\mathbb{N}} : \exists q \quad 0 < d(x_p, x_q) < 1/k\}$$

Les ensembles de la forme X_{mn} ou Y_{pk} sont des ouverts de $P^{\mathbb{N}}$. Comme S est égal à $(\bigcap_{m \neq n} X_{mn}) \cap (\bigcap_{p,k} Y_{pk})$, on en déduit que S est un espace polonais.

Avant de donner la proposition suivante, qui sera la clé de la démonstration du théorème de M-S, rappelons le petit lemme topologique suivant : soient E un espace séparé et A un sous-espace de E. Si B est un sous-espace d'intérieur vide de A, alors $\bar{B}$ est un sous-espace d'intérieur vide de $\bar{A}$.

14 THEOREME.- Soient P un espace polonais, F un espace séparé et f une application continue de P dans F. L'image f(P) est non dénombrable si et seulement s'il existe une partie infinie dénombrable H de P, sans points isolés, telle que la restriction de f à H soit injective.

DEMONSTRATION.- Démontrons d'abord la condition nécessaire. A tout $y \in f(P)$ faisons correspondre un $x \in P$ tel que $f(x) = y$. L'ensemble ainsi déterminé n'est pas dénombrable et la restriction de f à cet ensemble est injective. Il suffit alors de prendre pour H une partie infinie dénombrable, sans points isolés, de cet ensemble (qui est évidemment un espace à base dénombrable). Passons à la condition suffisante. Nous raisonnerons par l'absurde. Supposons f(P) dénombrable, soit $f(P) = (y_n)$. Alors la suite des fermés $F_n = f^{-1}(y_n)$ forme un recouvrement de P. D'autre part, pour chaque n, l'ensemble $H \cap F_n$ est réduit à un point et est donc d'intérieur vide dans H : on en déduit que $\overline{H} \cap F_n$ est d'intérieur vide dans $\overline{H}$. L'espace polonais $\overline{H}$ est alors la réunion d'une suite de fermés d'intérieur vide. Comme c'est un espace de BAIRE, cela entraine que $\overline{H} = \emptyset$: d'où la contradiction.

Voici enfin le théorème de MAZURKIEWICZ-SIERPINSKI :

15 THEOREME.- Soient E un espace souslinien, F un espace séparé et f une application continue de E dans F. L'image de multiplicité non dénombrable de f est une partie souslinienne de F.

En considérant le graphe de f dans l'espace souslinien $E \times f(E)$, il est clair qu'il suffit de démontrer le "corollaire" suivant

16 THEOREME.- Soient X et Y deux espaces sousliniens, et A une partie souslinienne de $X \times Y$. L'ensemble $\omega(A)$ des $y \in Y$ tels que la coupe A(y) soit non dénombrable est une partie souslinienne de Y.

DEMONSTRATION.- Soient P un espace polonais et (f,g) une application continue de P dans $X \times Y$ tels que A soit l'image de P par l'application (f,g). La coupe A(y) de A suivant y est non dénombrable si et seulement s'il existe une partie infinie dénombrable $[s_n(y)]$, sans points isolés, de P telle que

a) la restriction de f à $[s_n(y)]$ soit injective

b) la restriction de g à $[s_n(y)]$ soit constante et égale à y.

Soit S l'espace polonais défini dans l'énoncé dans du théorème 13, et considérons dans $Y \times S$ les sous-espaces

$$U_{mn} = \{(y,[s_i]) \in Y \times S \ : \ f(s_m) \neq f(s_n)\} \quad \text{pour } m \neq n$$

$$V = \{(y,[s_i]) \in Y \times S \ : \ y = g(s_i) \text{ pour tout } i\}$$

L'espace $Y \times S$ est souslinien; les ensembles U_{mn} sont des ouverts de $Y \times S$ tandis que V est un fermé de $Y \times S$. Donc $W = V \cap (\bigcap_{m \neq n} U_{mn})$ est une partie souslinienne de $Y \times S$. Comme $\omega(A)$ est égal à la projection de W sur Y, on en déduit que $\omega(A)$ est une partie souslinienne de Y.

4. IMAGES SEMI-INJECTIVES

17 Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F. L'application f est dite <u>semi-injective</u> si, pour tout $y \in F$, l'image réciproque $f^{-1}(y)$ est dénombrable (dénombrable signifie pour nous vide, fini, ou infini dénombrable). Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème suivant de LUSIN qui généralise le théorème 7.

18 THEOREME.- <u>Soient</u> E <u>un espace lusinien</u>, F <u>un espace séparé</u>, <u>et</u> f <u>une application continue et semi-injective de</u> E <u>dans</u> F. <u>L'image</u> $f(E)$ <u>est alors une partie borélienne de</u> F.

La démonstration que nous allons donner, et qui est assez longue, est adaptée de HAUSDORFF [3]. Mais c'est sensiblement la même démonstration que celle donnée par HAHN [2], et c'est en fait la démonstration originale de LUSIN [5] légèrement améliorée par les rédacteurs successifs.

Nous allons commencer par un lemme qui interviendra dans la démonstration de ce théorème, ainsi que dans celle du suivant (cf paragraphe 5). Mais, avant tout, nous allons fixer nos notations et définir la notion de schéma dyadique associé à une application, sur laquelle portera le lemme.

19 Nous désignerons par D l'ensemble des mots dyadiques (finis) engendrés par 0 et 1. L'ensemble des mots de longueur n sera noté D_n. Si $m \in D$, nous noterons m0 (resp m1) le mot obtenu en ajoutant 0 (resp 1) à droite de m. Enfin $D_\infty = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des mots dyadiques infinis, et si $m \in D$ et $\mu \in D_\infty$, la notation $m<\mu$ signifie que μ commence par le mot m.

20 DEFINITION.- *Soit* E *un espace séparé. On appelle* schéma dyadique *sur* E *une application* $m \longrightarrow V_m$ *de* D *dans* $\mathfrak{P}(E)$ *vérifiant les conditions suivantes*

a) $V_{m0} \subset V_m$ *et* $V_{m1} \subset V_m$ *pour tout* $m \in D$

b) $\overline{V}_{m0} \cap \overline{V}_{m1} = \emptyset$ *pour tout* $m \in D$

c) *pour tout* $\mu \in D_\infty$, *la famille* $(V_m)_{m<\mu}$ *est la base d'un filtre convergeant sur* E.

Soit f *une application de* E *dans un espace séparé* F. *Nous dirons que* $(V_m)_{m\in D}$ *est un* schéma dyadique associé à f *si l'on a, pour tout entier* n,

$$\bigcap_{m\in D_n} f(V_m) \neq \emptyset$$

Voici alors le lemme annoncé

21 LEMME.- *Soient* E *et* F *deux espaces séparés, et* f *une application continue de* E *dans* F. *S'il existe un schéma dyadique associé à* f, *alors l'application* f *n'est pas semi-injective*.

DEMONSTRATION.- Etant donnée la condition b) de 20, il est clair que l'ensemble H des points limites des bases de filtre $(V_m)_{m<\mu}$ n'est pas dénombrable. D'autre part, comme f est continue, $[f(V_m)]_{m<\mu}$ est aussi une base de filtre convergeant sur F pour tout $\mu \in D_\omega$. La condition imposée au schéma dyadique associé à f entraine alors qu'il existe un filtre sur F plus fin que tous les filtres engendrés par les bases $[f(V_m)]_{m<\mu}$. Il s'ensuit que f(H) est réduit à un point, et donc que f n'est pas semi-injective.

La démonstration du théorème 18 se fera par l'absurde : si f(E) n'est pas un borélien de F, nous construirons un schéma dyadique associé à f. Pour construire ce schéma, nous utiliserons le lemme suivant. Nous renvoyons à 9 pour la définition de l'image multiple d'une application.

22 LEMME.- Soient E_k $(k = 1, \ldots, n)$ n espaces lusiniens, F un espace séparé, et pour chaque k, f_k une application continue de E_k dans F. Désignons par M_k l'image multiple de f_k. Si $\bigcap_k M_k$ est une partie borélienne de F, alors $\bigcap_k f_k(E_k)$ est aussi une partie borélienne de F.

DEMONSTRATION.- D'après le théorème 10, M_k est une partie souslinienne de F pour chaque k : il en donc de même pour $\bigcap_k M_k$. Si $\bigcap_k M_k$ est de plus borélien, alors $A = (\bigcap_k f_k(E_k)) - (\bigcap_k M_k)$ est une partie souslinienne de F, disjointe de $\bigcap_k M_k$. En vertu du théorème 6, il existe un borélien B de F contenant A et disjoint de $\bigcap_k M_k$. L'ensemble $H_k = \overset{-1}{f_k}(B)$ est alors un borélien de E_k pour chaque k, et la restriction de f_k à H_k est injective. En vertu des théorèmes 7 et 8, l'ensemble $f_k(H_k) = B \cap f_k(E_k)$ est un borélien de F pour chaque k, et il en est de même pour $A = B \cap (\bigcap_k f_k(E_k))$. Par conséquent, $\bigcap_k f_k(E_k) = A \cup (\bigcap_k M_k)$ est aussi une partie borélienne de F.

Nous passons maintenant à la démonstration proprement dite du théorème 18

DEMONSTRATION DU THEOREME 18.- Etant donnée la définition d'un espace lusinien, on peut en fait supposer que E est un espace polonais. Nous désignerons alors par d une distance adéquate sur E. Pour tout ouvert G de E, nous distinguerons pour chaque entier n, une base $\underline{\underline{B}}_n(G) = (U_k^{G,n})_{k\in\mathbb{N}}$ du sous-espace G formée par des ouverts ayant des diamètres $\leq 1/n$, et nous écrirons U_k au lieu de $U_k^{G,n}$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur l'entier n et l'ouvert G. Enfin, nous désignerons par $H_n(G)$ l'ensemble des couples d'entiers (i,j) tels que $\overline{U}_i \cap \overline{U}_j = \emptyset$ (l'adhérence étant prise dans E). Raisonnons maintenant par l'absurde. Si f(E) n'est pas un borélien de F, il résulte du lemme précédent que l'image multiple M de f n'est pas un borélien de F. Or, il est clair que

$$M = \bigcup_{(i,j)} [f(U_i) \cap f(U_j)] \quad \text{où } (i,j) \text{ parcourt } H_1(E)$$

Il existe alors deux ouverts appartenant à $\underline{\underline{B}}_1(E)$, d'adhérences disjointes, tels que $f(V_0) \cap f(V_1)$ ne soit pas un borélien de F. Nous allons construire par récurrence une famille $(V_m)_{m\in D}$ d'ouverts de E vérifiant les conditions

a) $V_{m0} \subset V_m$ et $V_{m1} \subset V_m$ pour tout $m\in D$

b) $\overline{V}_{m0} \cap \overline{V}_{m1} = \emptyset$ pour tout $m\in D$

c) si $m\in D_n$, V_m a un diamètre $\leq 1/n$

d) pour tout entier n , $\bigcap_{m\in D_n} f(V_m)$ n'est pas un borélien de F

Il est clair que, dans ces conditions, $(V_m)_{m\in D}$ sera un schéma dyadique associé à f : l'application f ne pourra donc être semi-injective d'après le lemme 21, et nous aurons ainsi la contradiction cherchée. Supposons donc construits les ouverts V_m pour tout mot m de longueur $\leq n$. Pour chaque $m\in D_n$, désignons par f_m la restriction de f à V_m et par M_m l'image multiple de f_m. Comme par hypothèse $\bigcap_{m\in D_n} f(V_m)$ n'est pas un borélien de F, il résulte du lemme 22 que $\bigcap_{m\in D_n} M_m$ n'est pas un borélien de F. On raisonne alors comme ci-dessus. Comme, pour tout $m\in D_n$,

$$M_m = \bigcup_{(i,j)} [f(U_i) \cap f(U_j)] \quad \text{où } (i,j) \text{ parcourt } H_{n+1}(V_m)$$

il existe deux ouverts V_{m0} et V_{m1} appartenant à $\underline{\underline{B}}_{n+1}(V_m)$, d'adhérences disjointes, tels que l'ensemble $\bigcap_{m\in D_n} [f(V_{m0}) \cap f(V_{m1})]$ ne soit pas un borélien de F. On peut ainsi construire par récurrence un schéma dyadique associé à f, ce qui achève la démonstration du théorème.

Notons enfin le corollaire suivant que nous utiliserons au paragraphe 5.

23 THEOREME.- Soient E un espace lusinien, F un espace séparé, et f une application continue et semi-injective de E dans F. L'image multiple M de f est alors une partie borélienne de F.

DEMONSTRATION.- On pourrait reprendre la démonstration du théorème 10, mais nous reprendrons plutôt l'argument que nous avons utilisé ci-dessus. On peut supposé que E est un espace polonais. Soit alors (U_n) une base dénombrable de E et désignons par H l'ensemble des couples d'entiers (i,j) tels que $U_i \cap U_j = \emptyset$. Comme chaque U_n est un sous-espace lusinien et que

$$M = \bigcup_{(i,j)} [f(U_i) \cap f(U_j)] \quad \text{où } (i,j) \text{ parcourt } H$$

il résulte du théorème 18 que M est une partie borélienne de F.

REMARQUE.- On peut donner une extension triviale du théorème 18." Soient E un espace lusinien, F un espace séparé et f une application continue de E dans F telle que l'image de multiplicité non dénombrable I^Ω de f soit dénombrable. Alors l'image par f d'une partie borélienne de E est une partie borélienne de F." Cette extension est cependant intéressante, car elle est "maximale" . En effet, PURVES [6] a montré que si I^Ω n'est pas dénombrable, il existe toujours une partie borélienne A de E telle que f(A) ne soit pas une partie borélienne de F (mais, bien entendu, f(A) est toujours une partie souslinienne).

5. LE THEOREME DE LUSIN

24 Soient E et F deux espaces séparés, et f une application de E dans F. Nous dirons qu'une partie A de E est clivable par f s'il existe une suite (A_n) de parties boréliennes disjointes de E telles que, pour tout n, la restriction de l'application f à A_n soit injective.

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème suivant de LUSIN, qui constitue le sommet de la théorie des fonctions implicites boréliennes de LEBESGUE-SOUSLIN-LUSIN.

25 THEOREME.- Soient E un espace lusinien, F un espace séparé, et f une application continue et semi-injective de E dans F. Alors E est clivable par f.

La démonstration de ce théorème (dont l'origine est susceptible du même commentaire que celle du théorème 18) sera également assez longue. Aussi donnerons nous tout de suite un corollaire immédiat de ce théorème.

26 THEOREME.- Soient X et Y deux espaces lusiniens, et A une partie borélienne de $X \times Y$. Si pour tout $y \in Y$, la coupe $A(y)$ est dénombrable, alors A est la réunion d'une suite de graphes boréliens[1].

27 Nous allons d'abord fixer quelques notations. Soit I l'ensemble des ordinaux dénombrables. Les hypothèses étant celles du théorème 25, pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est un fermé de E : on peut donc définir la suite transfinie des dérivés successifs de $f^{-1}(y)$ selon le schéma de CANTOR

- $f_0^{-1}(y) = f^{-1}(y)$
- si $f_i^{-1}(y)$ est défini, $f_{i+1}^{-1}(y)$ est l'ensemble des points non isolés de $f_i^{-1}(y)$
- si i est un ordinal limite, et si $f_j^{-1}(y)$ est défini pour tout $j<i$,

$$f_j^{-1}(y) = \bigcap_{j<i} f_j^{-1}(y)$$

Nous définissons alors une suite transfinie (E_i) de parties de E de la manière suivante :

$$E_i = \bigcup_{y \in F} f_i^{-1}(y) \qquad \text{pour tout } i \in I$$

[1]) Nous appelons graphe borélien le graphe d'une application borélienne définie sur une partie borélienne de X et à valeurs dans Y.

Dans ces conditions, il est clair que l'on a, pour tout $i \in I$,

$$(*) \qquad E - E_i = \bigcup_{j<i} (E_j - E_{j+1})$$

La démonstration du théorème 25 va se faire en deux étapes. D'abord, nous montrerons que $(E_i - E_{i+1})$ est clivable par f pour tout i si E est à base dénombrable, ensuite qu'il existe un ordinal dénombrable h tel que $E_h = \emptyset$ si E est un espace polonais. Comme on peut toujours mettre sur un espace lusinien une topologie polonaise plus fine définissant la même tribu borélienne (cf corollaire 8), nous aurons ainsi montré que E est la réunion d'une famille dénombrable de boréliens clivables par f : E sera donc lui-même clivable par f.

28 LEMME.- <u>Si</u> E <u>est à base dénombrable</u>, <u>l'ensemble</u> $(E_i - E_{i+1})$ <u>est clivable par</u> f <u>pour tout ordinal dénombrable</u> i.

DEMONSTRATION.- Soit (U_n) une base dénombrable de E et désignons par V_n (resp M_n) l'image (resp image multiple) de la restriction de f à U_n : les ensembles V_n, M_n et $(V_n - M_n)$ sont boréliens pour tout n d'après les théorèmes 18 et 23.
Comme la restriction de f à l'ensemble $A_n = f^{-1}(V_n - M_n)$ est injective, l'ensemble $A = \bigcup_n A_n$ est clivable par f. Nous allons montrer maintenant que $A = (E_0 - E_1) = (E - E_1)$, ce qui établira le premier pas d'une récurrence tranfinie. D'après la définition 27 de E_1, un point x appartient à $(E - E_1)$ si et seulement s'il existe un entier n tel que $U_n \cap f^{-1}[f(x)] = \{x\}$, soit si et seulement si x appartient à A_n pour un entier n : donc $A = (E - E_1)$.
Soit maintenant i un ordinal dénombrable et supposons le lemme établi pour $j < i$. Il résulte de 27-(*) que $(E - E_i)$ est alors clivable par f, et donc que E_i est est une partie lusinienne (puisque borélienne) de E. Dans ces conditions, E_i est un espace lusinien à base dénombrable : il suffit alors d'appliquer le raisonnement de la première partie de la démonstration à la restriction de f à E_i pour voir que $(E_i - E_{i+1})$ est clivable par f.

29 LEMME.- <u>Si</u> E <u>est un espace polonais</u>, <u>il existe un ordinal dénombrable</u> h <u>tel que</u> E_h <u>soit vide</u>.

DEMONSTRATION.- Soit d une distance adéquate sur E. Nous allons appliquer à nouveau le lemme 21 : nous reprenons donc les notations introduites en 19. Nous allons raisonner par l'absurde. Si, pour tout $i \in I$, l'ensemble E_i n'est pas vide, nous allons construire par récurrence une famille $(V_m)_{m \in D}$ d'ouverts de E vérifiant les conditions

a) $V_{m0} \subset V_m$ et $V_{m1} \subset V_m$ pour tout $m \in D$

b) $\overline{V}_{m0} \cap \overline{V}_{m1} = \emptyset$ pour tout $m \in D$

c) si m est un mot de longueur n, V_m a un diamètre $\leq 1/n$

d) pour tout entier n et tout ordinal dénombrable i,

$$\bigcap_{m \in D_n} f(E_i \cap V_m) \neq \emptyset$$

La famille $(V_m)_{m \in D}$ sera alors un schéma dyadique associé à f, et donc f ne pourra être semi-injective (cf lemme 21) : d'où la contradiction.

Posons $V_\emptyset = E$ (où $\emptyset$ désigne le mot dyadique vide) et supposons construits les V_m pour tout mot m de longueur $\leq n$. D'après d), si $i \in I$, l'ensemble

$$\bigcap_{m \in D_n} f(E_{i+1} \cap V_m)$$

n'est pas vide : nous désignerons par y_i un élément de cet ensemble. Comme $f_{i+1}^{-1}(y_i)$ est l'ensemble des points non isolés de $f_i^{-1}(y_i)$, l'ensemble $f_i^{-1}(y_i) \cap V_m$ a donc un cardinal infini pour tout $m \in D_n$. Pour tout $m \in D_n$, désignons alors par $\underline{\underline{B}}_n(V_m)$ une base dénombrable de V_m formée par des ouverts de diamètre $\leq 1/n+1$: il existe deux éléments $U_{m0}(i)$ et $U_{m1}(i)$ de $\underline{\underline{B}}_n(V_m)$, d'adhérences disjointes, tels que les ensembles $f_i^{-1}(y_i) \cap U_{m0}(i)$ et $f_i^{-1}(y_i) \cap U_{m1}(i)$ ne soient pas vides. L'ensemble D_n est fini, et pour chaque $m \in D_n$, la base $\underline{\underline{B}}_n(V_m)$ est dénombrable. Comme l'ensemble I des ordinaux dénombrables n'est pas dénombrable, il existe une partie non dénombrable J de I telle que, pour tout $m \in D_n$, les applications

$i \longrightarrow U_{m0}(i)$ et $i \longrightarrow U_{m1}(i)$ soient constantes sur J : nous désignerons ces valeurs constantes par V_{m0} et V_{m1}. Pour tout $j \in J$, on a

$$f_j^{-1}(y_j) \cap V_{m0} \neq \emptyset \qquad\qquad f_j^{-1}(y_j) \cap V_{m1} \neq \emptyset$$

et donc

$$(**) \qquad \bigcap_{m \in D_n} [f(E_j \cap V_{m0}) \cap f(E_j \cap V_{m1})] \neq \emptyset$$

La relation (**) est vraie pour une infinité non dénombrable d'ordinaux et la fonction $i \longrightarrow E_i$ est décroissante sur I : par conséquent, la relation (**) est vérifiée par <u>tous</u> les ordinaux dénombrables. On peut ainsi construire un schéma dyadique associé à f, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI N. : Topologie générale, chapitre IX (2ème édition, Hermann, Paris 1958)

[2] HAHN H. : Reelle Funktionnen (1e Teil) (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1932)

[3] HAUSDORFF F. : Mengenlehre (3ème édition, Veit, Berlin 1935) ou
Set theory (Chelsea Pub. Comp., New York 1962)

[4] KURATOWSKI C. : Topologie I (4ème édition, Polska Akademia Nauk, Warszawa 1958)

[5] LUSIN N. : Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications (Gauthier-Villars, Paris 1930)

[6] PURVES R. : Bimeasurable functions (Fund. Math. t58, p149, 1966)

Signalons aussi que SION a publié une démonstration du théorème sur les images semi-injectives (théorème 18 de cet exposé) utilisant la représentation des ensembles analytiques par des schémas de SOUSLIN (cf SION M. : On analytic sets in topological spaces, Trans. Amer. Math. Soc. t96, p341-354, 1960)