SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Une démonstration du théorème de séparation des ensembles analytiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 82-85
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__82_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
STRASBOURG

SEMINAIRE DE PROBABILITES 1969/70

UNE DEMONSTRATION DU THEOREME DE SEPARATION DES ENSEMBLES ANALYTIQUES

par C. DELLACHERIE

L'idée de déduire de la capacitabilité des ensembles analytiques le théorème de séparation de ces derniers est due à SION [3]. Cette idée est exposée par SION sous la forme d'un théorème sur les "bicapacitances" (forme que nous avons reprise dans l'exposé "ensembles pavés et rabotages" de ce volume). Mais nous allons voir qu'on peut aussi adopter le langage plus commode des capacités, tant dans le cas abstrait que dans le cas topologique. Nous adopterons le vocabulaire de MEYER [2] dans le cas abstrait, et de BOURBAKI [1] dans le cas topologique.

Soit $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace pavé où $\underline{\underline{E}}$ est un pavage semi-compact stable pour $(\cup f,\cap d)$[1] et soit $\underline{\underline{F}}$ un ensemble de parties de E stable pour $(\cup d,\cap d)$ contenant $\underline{\underline{E}}$. On dit que deux parties A_1 et A_2 de E sont <u>$\underline{\underline{F}}$-séparables</u> s'il existe deux éléments disjoints B_1 et B_2 de $\underline{\underline{F}}$ tels que A_i soit contenu dans B_i $(i=1,2)$. Considérons l'espace pavé produit $(E\times E,\underline{\underline{E}}\otimes\underline{\underline{E}})$, où $\underline{\underline{E}}\otimes\underline{\underline{E}}$ désigne le pavage stable pour $(\cup f,\cap d)$ engendré par les parties de $E\times E$ de la forme $U\times V$, U et V éléments de $\underline{\underline{E}}$: $\underline{\underline{E}}\otimes\underline{\underline{E}}$ est encore un pavage semi-compact. Soient π_1 et π_2 les projections de $E\times E$ sur E et posons, pour toute partie H de $E\times E$,

$$I(H) = 0 \quad \text{si } \pi_1(H) \text{ et } \pi_2(H) \text{ sont } \underline{\underline{F}}\text{-séparables dans E}$$
$$I(H) = 1 \quad \text{si } \pi_1(H) \text{ et } \pi_2(H) \text{ ne sont pas } \underline{\underline{F}}\text{-séparables dans E}$$

---
1) "f" = "fini" , "d" = "dénombrable"

La fonction I sur $\mathfrak{P}(E\times E)$ est monotone croissante, et vérifie les conditions suivantes :

a) si (H_n) est une suite croissante de parties de $E\times E$,

$$I(\cup H_n) = \sup I(H_n)$$

b) si (K_n) est une suite décroissante d'éléments de $\underline{\underline{E}}\otimes\underline{\underline{E}}$,

$$I(\cap K_n) = \inf I(K_n)$$

Autrement dit, I est une $\underline{\underline{E}}\otimes\underline{\underline{E}}$-capacité sur $E\times E$. Vérifions les points a) et b) :

a) on peut évidemment suposer que $I(H_n)=0$ pour tout n. Pour chaque n, soient B_n^1 et B_n^2 deux éléments de $\underline{\underline{F}}$ disjoints tels que $\pi_i(H_n)$ soit contenu dans B_n^i $(i=1,2)$ et posons, pour $i=1,2$

$$B^i = \liminf_n B_n^i$$

B^i est encore un élément de $\underline{\underline{F}}$ et contient $\pi_i(\cup H_n)$. Comme B^1 et B^2 sont disjoints, on a bien $I(\cup H_n) = 0$.

b) on peut évidemment supposer que $I(K_n) = 1$ pour tout n. Comme $\underline{\underline{E}}$ est semi-compact, $\pi_i(\underline{\underline{E}}\otimes\underline{\underline{E}}) = \underline{\underline{E}}$: dire que $I(K_n)=1$ revient à dire que $\pi_1(K_n)\cap\pi_2(K_n) \neq \emptyset$. En utilisant à nouveau la semi-compacité de $\underline{\underline{E}}$, on en déduit que $\pi_1(\cap K_n)$ et $\pi_2(\cap K_n)$ ont également une intersection non vide. Donc $I(\cap K_n) = 1$.

Nous allons maintenant passer à la démonstration du théorème de séparation des ensembles analytiques.

<u>Cas abstrait</u>

Nous désignerons ici par $\underline{\underline{F}}$ le stabilisé de $\underline{\underline{E}}$ pour $(\cup d,\cap d)$.

THEOREME.- <u>Soit</u> $(E,\underline{\underline{E}})$ <u>un espace pavé où</u> $\underline{\underline{E}}$ <u>est un pavage semi-compact stable pour</u> $(\cup f,\cap d)$, <u>et désignons par</u> $\underline{\underline{F}}$ <u>le stabilisé de</u> $\underline{\underline{E}}$ <u>pour</u> $(\cup d,\cap d)$. <u>Deux ensembles</u> $\underline{\underline{E}}$<u>-analytiques disjoints sont</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-séparables</u>.

DEMONSTRATION.- Soient A_1 et A_2 deux ensembles $\underline{\underline{E}}$-analytiques disjoints. L'ensemble $A_1 \times A_2$ est alors un ensemble $\underline{\underline{E}} \otimes \underline{\underline{E}}$-analytique (cf MEYER [2]-III-T9) : il est donc I-capacitable (cf MEYER [2]-III-T19). Il existe alors un élément K de $\underline{\underline{E}} \otimes \underline{\underline{E}}$ contenu dans $A_1 \times A_2$ tel que $I(K) = I(A_1 \times A_2)$ (cela parce que I ne prend que les valeurs 0 ou 1). Comme $\pi_1(K)$ et $\pi_2(K)$ sont évidemment disjoints, $I(A_1 \times A_2) = I(K) = 0$: donc A_1 et A_2 sont $\underline{\underline{F}}$-séparables.

Cas topologique

E est maintenant un espace topologique séparé et $\underline{\underline{E}}$ désigne le pavage constitué par les parties compactes de E. La capacité I est alors une capacité <u>continue à droite</u> : i.e., pour tout compact K de $E \times E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert O_ε de K tel que $I(L) \leq I(K) + \varepsilon$ pour tout compact $L \subset O_\varepsilon$. Pour notre capacité I, cela signifie simplement que deux compacts disjoints K_1 et K_2 de E peuvent être séparés par deux ouverts disjoints O_1 et O_2 (i.e. $K_i \subset O_i$ pour $i = 1,2$), ce qui est un résultat classique de topologie générale. Rappelons d'autre part que, suivant BOURBAKI [1], un sous-espace S de E est dit <u>souslinien</u> si S est l'image d'un espace polonais P par une application continue de P dans E.

Nous désignerons ici par $\underline{\underline{F}}$ la tribu borélienne de E.

THEOREME.- <u>Soit</u> E <u>un espace topologique séparé. Deux sous-espaces sousliniens disjoints de</u> E <u>sont</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-séparables</u> (<u>où</u> $\underline{\underline{F}}$ <u>est la tribu borélienne de</u> E).

DEMONSTRATION.- Soient A_1 et A_2 deux sous-espaces sousliniens disjoints de E. L'espace $A_1 \times A_2$ est alors un sous-espace souslinien de $E \times E$ (cf BOURBAKI [1]). Comme la capacité I est continue à droite, il résulte du théorème de capacitabilité de SION que toute partie souslinienne de $E \times E$ est capacitable (cf SION [3]-th 5.11 ou la prochaine édition de BOURBAKI [1]). Il existe donc un compact K contenu dans $A_1 \times A_2$ tel que $I(K) = I(A_1 \times A_2)$. On achève alors comme ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI N. : Topologie générale, chapitre IX (2ème édition, Hermann, Paris 1958)

[2] MEYER P.A. : Probabilités et potentiel (Hermann, Paris, 1966)

[3] SION M. : On capacitability and measurability (Ann. Inst. Fourier, t13 p88-99, Grenoble 1963).