SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RENZO CAIROLI

Décomposition de processus à indices doubles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 37-57

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__37_0>

Séminaire de Probabilités
Université de Strasbourg
1969/70

DECOMPOSITION DE PROCESSUS A INDICES DOUBLES

par
R. Cairoli

On étudie le problème suivant: $(X_{s,t})_{s\geqq 0,t\geqq 0}$ étant un processus tel que

$$E\{X_{s+h,t+k} - X_{s+h,t} - X_{s,t+k} + X_{s,t} | \mathcal{F}_{s,t}\} \geqq 0 \text{ p.s. } (h,k \geqq 0),$$

donner des conditions dans lesquelles $(X_{s,t})$ admet une décomposition de la forme

$$X_{s,t} = M_{s,t} + A_{s,t},$$

où $(M_{s,t})$ vérifie la condition

$$E\{M_{s+h,t+k} - M_{s+h,t} - M_{s,t+k} + M_{s,t} | \mathcal{F}_{s,t}\} = 0 \text{ p.s.}$$

et $(A_{s,t})$ est un processus croissant.

Le cas discret sera traité séparément et comprendra aussi une décomposition du terme $(M_{s,t})$ en trois martingales de type différent. Comme application on montrera un théorème de convergence pour sousmartingales à indices doubles.

CAS DISCRET

Soient $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ deux espaces de probabilité, $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, P_1 \otimes P_2)$ leur produit et $(\mathcal{F}_{m,n})$ une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ du type produit ($\mathcal{F}_{m,n} = \mathcal{F}^1_m \otimes \mathcal{F}^2_n$). Ici et dans toute la suite (m,n) parcourt l'ensemble des couples d'entiers $\geqq 0$ muni de la relation d'ordre

$$(m,n) \leqq (m',n') \text{ si } m \leqq m' \text{ et } n \leqq n'.$$

Les processus que l'on considère sont réels, définis dans $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, indexés par (m,n) et adaptés à la famille $(\mathfrak{F}_{m,n})$.

Les variables aléatoires (v. a.) sont supposées intégrables et les relations entre elles sont à interpréter comme étant valables presque sûrement.

Soit $(X_{m,n})$ un processus stochastique tel que

(1) $$E\{X_{m+1,n+1} - X_{m+1,n} - X_{m,n+1} + X_{m,n} \mid \mathfrak{F}_{m,n}\} \geqq 0.$$

En posant

(2) $$a_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0 \text{ ou } n = 0, \\ E\{X_{m,n} - X_{m,n-1} - X_{m-1,n} + X_{m-1,n-1} \mid \mathfrak{F}_{m-1,n-1}\} & \text{si } (m,n) \geqq (1,1); \end{cases}$$

$$\text{et } A_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{i,j},$$

on peut écrire

$$X_{m,n} = M_{m,n} + A_{m,n},$$

où $(M_{m,n})$ vérifie la condition

(3) $$E\{M_{m+1,n+1} - M_{m+1,n} - M_{m,n+1} + M_{m,n} \mid \mathfrak{F}_{m,n}\} = 0$$

et $(A_{m,n})$ les conditions

(4a) $$A_{m,0} = A_{0,n} = 0;$$

(4b) $$A_{m+1,n+1} - A_{m+1,n} - A_{m,n+1} + A_{m,n} \geqq 0.$$

En outre

(5) $$A_{m+1,n+1} \text{ est } \mathfrak{F}_{m,n}\text{-mesurable.}$$

Ainsi, en appelant S-processus [M-processus, resp. processus croissant] un processus vérifiant (1) [(3), resp. (4a et b)], on peut dire:

<u>Théorème 1</u>. Tout S-processus se décompose en la somme d'un M-processus et d'un processus croissant.

Le processus croissant peut être choisi de telle manière que la condition (5) soit remplie.

La décomposition est dans ce cas unique et sera appelée première décomposition du S-processus.

Il est clair que l'on a

$$\sup_{m,n} E\{A_{m,n}\} < \infty$$

si et seulement si

$$\sup_{m,n} E\{X_{m,n} - X_{m,0} - X_{0,n} + X_{0,0}\} < \infty.$$

On va montrer que le processus croissant de la première décomposition de $(X_{m,n})$ est le seul processus croissant $(A_{m,n})$ ayant les deux propriétés suivantes:

(6a) $X_{m,n} = M_{m,n} + A_{m,n}$, où $(M_{m,n})$ est un M-processus;

(6b) $E\{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (Y_{i+1,j+1} - Y_{i,j})(A_{i+1,j+1} - A_{i+1,j} - A_{i,j+1} + A_{i,j})\} = 0$,
pour toute martingale bornée $(Y_{m,n})$.

De même que dans le cas de la décomposition d'une sousmartingale à un paramètre, cette formulation nous suggérera l'extension au cas continu.

Avant de passer à la démonstration, soulignons que les termes martingale, sousmartingale, surmartingale se rapportent toujours à la famille $(\mathcal{F}_{m,n})$, à moins que le contraire ne soit explicitement affirmé.

Puisque (6b) est une conséquence immédiate de (5), il y a seulement à démontrer qu'il existe au plus un processus croissant ayant les propriétés (6a et b).

Supposons que $(A_{m,n})$ et $(A'_{m,n})$ vérifient ces deux propriétés. Un calcul simple effectué ci-dessous montre que l'on a alors

$$(7)\quad \left.\begin{matrix} E\{Y_{m+1,n+1}A_{m+1,n+1}\} \\ E\{Y_{m+1,n+1}A'_{m+1,n+1}\} \end{matrix}\right\} = E\{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} Y_{i,j}(X_{i+1,j+1} - X_{i+1,j} - X_{i,j+1} + X_{i,j})\},$$

donc

$$E\{Y_{m+1,n+1}A_{m+1,n+1}\} = E\{Y_{m+1,n+1}A'_{m+1,n+1}\},$$

pour toute martingale bornée $(Y_{m,n})$.

Puisque l'on peut choisir pour $Y_{m+1,n+1}$ une v. a. bornée $\mathcal{F}_{m+1,n+1}$-mesurable quelconque, il s'ensuit que $A_{m+1,n+1} = A'_{m+1,n+1}$.

Montrons que l'on a

$$(8)\quad E\{Y_{m+1,n+1}A_{m+1,n+1}\} = E\{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} Y_{i+1,j+1}(A_{i+1,j+1} - A_{i+1,j} - A_{i,j+1} + A_{i,j})\},$$

ce qui conjointement à (6a et b) donne la première partie de (7) (la seconde résulte des mêmes relations écrites pour $(A'_{m,n})$).

Pour m = 0 et n = 0 (8) et (6b) coincīdent. Pour le passage de (m,n) à (m+1,n) écrivons

$$\begin{aligned} E\{\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{n} Y_{i+1,j+1}(A_{i+1,j+1} - A_{i+1,j} - A_{i,j+1} + A_{i,j})\} &= \\ = E\{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} Y_{i+1,j+1}(A_{i+1,j+1} - A_{i+1,j} - A_{i,j+1} + A_{i,j})\} &+ \\ + E\{\sum_{j=0}^{n} Y_{m+2,j+1}(A_{m+2,j+1} - A_{m+2,j} - A_{m+1,j+1} + A_{m+1,j})\}&. \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite est par hypothèse égal à

$$E\{Y_{m+1,n+1}A_{m+1,n+1}\}.$$

En utilisant la propriété de martingale de $(Y_{m,n})$, on voit aussitôt que le second terme est égal à

$$E\{Y_{m+2,n+1}A_{m+2,n+1}\} - E\{Y_{m+2,n+1}A_{m+1,n+1}\}.$$

Ainsi, le membre de droite est égal à

$$\begin{aligned} E\{Y_{m+2,n+1}A_{m+2,n+1}\} + E\{A_{m+1,n+1}(Y_{m+1,n+1} - Y_{m+2,n+1})\} &= \\ = E\{Y_{m+2,n+1}A_{m+2,n+1}\}&, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Bien entendu jusqu'ici l'hypothèse que l'espace de probabilité et les tribus sont du type produit n'a pas encore été utilisée.

Cette hypothèse va nous permettre de pousser un peu plus loin la décomposition de $(X_{m,n})$.

Mais avant de faire cela donnons quelques exemples de S-processus:

(a) les processus croissants;

(b) les martingales relatives au premier [resp. second] indice, c'est-à-dire les processus $(X_{m,n})$ tels que

$$E\{X_{m+1,n}|\mathfrak{F}_{m,n}\} = X_{m,n} \quad [\text{resp. } E\{X_{m,n+1}|\mathfrak{F}_{m,n}\} = X_{m,n}]$$

(en particulier les martingales);

(c) les produits de sousmartingales à un paramètre, autrement dit les processus $(X_{m,n})$ de la forme $(X^1_m \cdot X^2_n)$, où (X^1_m) [resp. (X^2_n)] est une sousmartingale dans $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ [resp. $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$] relative à $(\mathcal{F}^1_m)$ [resp. $(\mathcal{F}^2_n)$];

(d) les produits de surmartingales à un paramètre;

(e) les sousmartingales $(X^2_{m,n})$, carrés de martingales de carré intégrable.

La vérification est immédiate pour les quatre premières classes. En ce qui concerne la dernière on a

$$E\{X^2_{m+1,n+1} - X^2_{m+1,n} - X^2_{m,n+1} + X^2_{m,n} | \mathcal{F}_{m,n}\} =$$
$$= E\{(X_{m+1,n+1} - X_{m+1,n} - X_{m,n+1} + X_{m,n})^2 | \mathcal{F}_{m,n}\} \geqq 0,$$

l'égalité des deux termes étant conséquence de propriétés élémentaires des espérances conditionnelles et du fait que

$$E\{X_{m+1,n} | \mathcal{F}_{m,n+1}\} = E\{X_{m+1,n} | \mathcal{F}_{m+1,n} | \mathcal{F}_{m,n+1}\} =$$
$$= E\{X_{m+1,n} | \mathcal{F}_{m,n}\} = X_{m,n}.$$

Voici maintenant deux définitions utilisées par la suite.

On dira qu'un processus croissant $(A_{m,n})$ est intégrable si l'on a

$$\sup_{m,n} E\{A_{m,n}\} < \infty.$$

On dira qu'un processus $(X_{m,n})$ est à variation uniformément bornée dans L_1 par rapport au premier indice si

$$\sup_n \sum_{m=0}^{\infty} E\{|X_{m+1,n} - X_{m,n}|\} < \infty.$$

De manière analogue on définit les processus à variation uniformément bornée dans L_1 par rapport au second indice.

Dans l'énoncé suivant on posera $\mathcal{F}_{m,-1} = \mathcal{F}_{m,0}$, $\mathcal{F}_{-1,n} = \mathcal{F}_{0,n}$ et $\mathcal{F}_{-1,-1} = \mathcal{F}_{0,0}$.

<u>Théorème 2</u>. Tout S-processus $(X_{m,n})$ admet une décomposition de la forme

$$X_{m,n} = M_{m,n} + M'_{m,n} + M''_{m,n} + A_{m,n},$$

où $(M_{m,n})$ est une martingale, $(M'_{m,n})$ [resp. $(M''_{m,n})$] une martingale relative au premier [resp. second] indice et $(A_{m,n})$ un processus croissant.

Les processus de la décomposition peuvent être choisis de telle manière que $M'_{m,n}$, $M''_{m,n}$ et $A_{m,n}$ soient respectivement $\mathcal{F}_{m,n-1}$-, $\mathcal{F}_{m-1,n}$- et $\mathcal{F}_{m-1,n-1}$-mesurables et que $M'_{m,0} = M''_{0,n} = 0$. La décomposition est dans ce cas unique et sera appelée deuxième décomposition de $(X_{m,n})$.

Si $(X_{m,n})$ est un S-processus et à la fois une sousmartingale telle que $\sup_{m,n} E\{X_{m,n}\} < \infty$, alors les processus $(M'_{m,n})$ et $(M''_{m,n})$ de la deuxième décomposition sont à variation uniformément bornée dans L_1 par rapport respectivement au second et au premier indice et le processus $(A_{m,n})$ est intégrable.

En définissant $(A_{m,n})$ comme dans (2) et en posant

$$d_{m,n} = \begin{cases} X_{0,0} \text{ si } m = n = 0, \\ X_{m,0} - E\{X_{m,0}|\mathcal{F}_{m-1,0}\} \text{ si } m \geqq 1,\ n = 0, \\ X_{0,n} - E\{X_{0,n}|\mathcal{F}_{0,n-1}\} \text{ si } m = 0,\ n \geqq 1, \\ X_{m,n} - E\{X_{m,n}|\mathcal{F}_{m,n-1}\} - E\{X_{m,n}|\mathcal{F}_{m-1,n}\} + E\{X_{m,n}|\mathcal{F}_{m-1,n-1}\} \text{ si } (m,n) \geqq (1,1); \end{cases}$$

$$d'_{m,n} = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0, \\ E\{X_{0,n} - X_{0,n-1}|\mathcal{F}_{0,n-1}\} \text{ si } m = 0,\ n \geqq 1, \\ E\{X_{m,n} - X_{m,n-1}|\mathcal{F}_{m,n-1}\} - E\{X_{m,n} - X_{m,n-1}|\mathcal{F}_{m-1,n-1}\} \text{ si } (m,n) \geqq (1,1); \end{cases}$$

$$d''_{m,n} = \begin{cases} 0 \text{ si } m = 0, \\ E\{X_{m,0} - X_{m-1,0}|\mathcal{F}_{m-1,0}\} \text{ si } m \geqq 1,\ n = 0, \\ E\{X_{m,n} - X_{m-1,n}|\mathcal{F}_{m-1,n}\} - E\{X_{m,n} - X_{m-1,n}|\mathcal{F}_{m-1,n-1}\} \text{ si } (m,n) \geqq (1,1); \end{cases}$$

$$M_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} d_{i,j}, \quad M'_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} d'_{i,j}, \quad M''_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} d''_{i,j},$$

on obtient une décomposition

$$X_{m,n} = M_{m,n} + M'_{m,n} + M''_{m,n} + A_{m,n}$$

ayant les propriétés de mesurabilité demandées et telle que $M'_{m,0} = M''_{0,n} = 0$.

On vérifie aussitôt que $(M_{m,n})$, $(M'_{m,n})$ et $(M''_{m,n})$ sont respectivement une martingale, une martingale relative au premier indice et une martingale relative au second indice.

L'unicité étant facile à prouver, passons à la démonstration de la dernière partie du théorème en supposant que $(X_{m,n})$ est une sousmartingale telle que $\sup_{m,n} E\{X_{m,n}\} < \infty$.

Montrons que $(M'_{m,n})$ de la deuxième décomposition est à variation uniformément bornée dans L_1 par rapport au second indice.

On a

$$\sup_m E\{\sum_{n=0}^{\infty} |M'_{m,n+1} - M'_{m,n}|\} \leqq 2\sup_{m,n} E\{X_{m,n}\} - 2E\{X_{0,0}\} < \infty,$$

ce qui résulte des calculs ci-dessous.

Pour $m \geqq 1$:

$$E\{\sum_{n=0}^{\infty} |M'_{m,n+1} - M'_{m,n}|\} = E\{\sum_{n=0}^{\infty} |\sum_{i=0}^{m} d'_{i,n+1}|\} \leqq$$

$$\leqq E\{\sum_{n=0}^{\infty} \Big(E\{X_{m,n+1} - X_{m,n} | \mathcal{F}_{m,n}\} + \sum_{i=1}^{m} \Big|E\{X_{i-1,n+1} - X_{i-1,n} | \mathcal{F}_{i-1,n}\} -$$

$$- E\{X_{i,n+1} - X_{i,n} | \mathcal{F}_{i-1,n}\}\Big|\Big)\},$$

que majore, puisqu'en vertu de la condition (1) les termes dont on prend la valeur absolue sont négatifs,

$$2\sum_{n=0}^{\infty} (E\{X_{m,n+1}\} - E\{X_{m,n}\}) - \sum_{n=0}^{\infty} (E\{X_{0,n+1}\} - E\{X_{0,n}\}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2E\{X_{m,n}\} - E\{X_{0,n}\}) - 2E\{X_{m,0}\} + E\{X_{0,0}\} \leqq$$

$$\leqq 2\sup_n E\{X_{m,n}\} - 2E\{X_{0,0}\};$$

pour $m = 0$:

$$E\{\sum_{n=0}^{\infty} |M'_{0,n+1} - M'_{0,n}|\} \leqq E\{\sum_{n=0}^{\infty} E\{X_{0,n+1} - X_{0,n} | \mathcal{F}_{0,n}\}\} =$$

$$= \sup_n E\{X_{0,n}\} - E\{X_{0,0}\}.$$

De même on montre que $(M''_{m,n})$ est à variation uniformément bornée dans L_1

par rapport au premier indice et le théorème est donc démontré.

Dans ce qui suit on adopte la convention que si une v. a. porte un indice négatif, cette v. a. est la constante zéro.

Théorème 3. Soit $(X_{m,n})$ un S-processsus et à la fois une sousmartingale. Supposons que l'on ait

(a) $\sup_{m,n} E\{X_{m,n}\} < \infty$;

(b) $\sum_{m,n} E\{(X_{m,n} - E\{X_{m,n}|\mathcal{F}_{m,n-1}\} - E\{X_{m,n}|\mathcal{F}_{m-1,n}\} + E\{X_{m,n}|\mathcal{F}_{m-1,n-1}\})^2\} < \infty.$

Alors la limite $\lim_{m\to\infty, n\to\infty} X_{m,n} = X_\infty$ existe presque sûrement et $E\{|X_\infty|\} < \infty$.

La condition (b) exprime que pour la martingale $(M_{m,n})$ de la deuxième décomposition de $(X_{m,n})$ on a

$$\sum_{m,n} E\{(M_{m,n} - M_{m,n-1} - M_{m-1,n} + M_{m-1,n-1})^2\} < \infty,$$

ce qui équivaut à dire que $(M_{m,n})$ est bornée dans L_2.

Elle est remplie si

$$\sum_{m,n} E\{(X_{m,n} - X_{m,n-1} - X_{m-1,n} + X_{m-1,n-1})^2\} < \infty.$$

Cela résulte en effet des relations suivantes, où l'on pose $\delta_{m,n} = X_{m,n} - X_{m,n-1} - X_{m-1,n} + X_{m-1,n-1}$:

$$\begin{aligned}(X_{m,n} &- E\{X_{m,n}|\mathcal{F}_{m,n-1}\} - E\{X_{m,n}|\mathcal{F}_{m-1,n}\} + E\{X_{m,n}|\mathcal{F}_{m-1,n-1}\})^2 = \\ &= (\delta_{m,n} - E\{\delta_{m,n}|\mathcal{F}_{m,n-1}\} - E\{\delta_{m,n}|\mathcal{F}_{m-1,n}\} + E\{\delta_{m,n}|\mathcal{F}_{m-1,n-1}\})^2 \leqq \\ &\leqq 4(\delta_{m,n}^2 + E\{\delta_{m,n}^2|\mathcal{F}_{m,n-1}\} + E\{\delta_{m,n}^2|\mathcal{F}_{m-1,n}\} + E\{\delta_{m,n}^2|\mathcal{F}_{m-1,n-1}\}),\end{aligned}$$

ce qui entraîne que le terme général de la série dans la condition (b) est majoré par

$$16\, E\{(X_{m,n} - X_{m,n-1} - X_{m-1,n} + X_{m-1,n-1})^2\}.$$

Il est en outre facile de vérifier que si $(X_{m,n})$ est de carré intégrable la condition (b) s'écrit également ainsi:

$$\sum_{m,n} E\{X_{m,n} - E^2\{X_{m,n}|\mathcal{F}_{m,n-1}\} - E^2\{X_{m,n}|\mathcal{F}_{m-1,n}\} + E^2\{X_{m,n}|\mathcal{F}_{m-1,n-1}\}\} < \infty.$$

Passons à la démonstration du théorème et considérons la deuxième décomposition de $(X_{m,n})$. La martingale $(M_{m,n})$ étant bornée dans L_2, $M_{m,n}$ converge presque sûrement vers une limite finie quand $m \to \infty$, $n \to \infty$ [1]. Il en est de même de $A_{m,n}$ puisque le processus croissant est intégrable. Il ne reste donc plus qu'à démontrer la convergence presque sûre de $M'_{m,n}$ vers une limite finie.

Du fait que pour n fixé

$$\left(\sum_{j=n}^{\infty} |M'_{m,j+1} - M'_{m,j}|\right)$$

est une sousmartingale (relative à $(\mathcal{F}_{m,\infty})$), on a

$$\lambda\, P\{\sup_m \sum_{j=n}^{\infty} |M'_{m,j+1} - M'_{m,j}| > \lambda\} \leqq \sup_m E\{\sum_{j=n}^{\infty} |M'_{m,j+1} - M'_{m,j}|\}.$$

Un calcul analogue à celui utilisé dans la démonstration de la dernière partie du théorème 2 montre que le membre de droite est majoré par

$$\lim_{m\to\infty,\, q\to\infty} E\{2X_{m,q} - 2X_{m,n-1} - X_{0,q} + X_{0,n-1}\},$$

qui devient arbitrairement petit pour n suffisamment grand.

Posons maintenant

$$F_{p,n} = \{\sup_m \sum_{j=n}^{\infty} |M'_{m,j+1} - M'_{m,j}| \leqq \frac{1}{p}\}.$$

D'après ce qui précède, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe N_p tel qu'on ait

$$P\{F_{p,N_p}\} \geqq 1 - \frac{\varepsilon}{2^p}$$

et, sur F_{p,N_p},

$$\sup_m |M'_{m,n'} - M'_{m,n''}| \leqq \frac{1}{p} \quad \text{pour tout } n', n'' \geqq N_p.$$

Posons $F = \bigcap_p F_{p,N_p}$. Alors $P\{F\} \geqq 1 - \varepsilon$ et $M'_{m,n}$ converge, sur F, uniformément en m, quand $n \to \infty$. Comme ε est arbitraire, cette convergence a lieu partout, sauf éventuellement sur un ensemble de probabilité nulle.

D'autre part, pour n fixé, $(M'_{m,n})$ est une martingale bornée dans L_1(donc presque sûrement convergente), car

$$\sup_m E\{|M'_{m,n}|\} \leqq \sup_m \sum_{j=0}^{\infty} E\{|M'_{m,j+1} - M'_{m,j}|\}$$

et, d'après le théorème 2, le membre de droite est fini. D'où le théorème.

On remarquera que l'hypothèse que l'espace de probabilité et la famille de tribus $(\mathcal{F}_{m,n})$ sont du type produit n'est utilisée que par sa conséquence

$$E\{\cdot|\mathcal{F}_{m,n}|\mathcal{F}_{p,q}\} = E\{\cdot|\mathcal{F}_{m\wedge p,n\wedge q}\}$$

(dans cette condition les théorèmes 1 et 2 de [1] sont vrais car de l'hypothèse susmentionnée leur démonstration n'utilise que cette propriété des tribus).

Dans [1] nous avons donné l'exemple d'une martingale bornée dans L_1 qui n'est pas convergente (= presque sûrement convergente). Cet exemple montre qu'une martingale positive et bornée dans L_1 n'est pas nécessairement convergente (décomposition de Krickeberg). On pourra donc dire de même d'une sousmartingale bornée (considérer l'exponentielle négative d'une martingale positive non convergente). D'autre part, toute martingale étant un S-processus, il résulte qu'un S-processus qui est à la fois une sousmartingale bornée dans L_1 n'est pas nécessairement convergent. Nous ignorons si un S-processus qui est à la fois une sousmartingale bornée est convergent.

CAS CONTINU

Nous allons étendre le théorème 1 au cas continu.

$(\Omega,\mathcal{F}, P)$ est l'espace introduit dans le cas discret et $(\mathcal{F}_{s,t})$ une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ du type produit $(\mathcal{F}_{s,t} = \mathcal{F}^1_s \otimes \mathcal{F}^2_t)$. Les indices (s,t) parcourent maintenant les couples de réels ≥ 0.

On supposera que la famille $(\mathcal{F}_{s,t})$ est continue à droite $(\mathcal{F}_{s,t} = \bigcap_{u>s,v>t} \mathcal{F}_{u,v})$ et que $\mathcal{F}_{0,0}$ contient tous les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$.

Les conventions faites dans le cas discret restent en vigueur. Toutefois les relations entre v. a. valables presque sûrement seront dès maintenant spécifiées par p.s.

On considérera toujours comme identiques deux processus $(X_{s,t})$ et $(Y_{s,t})$ tels que pour presque tout $\omega\in\Omega$, $X_{s,t}(\omega) = Y_{s,t}(\omega)$ pour tout (s,t).

On dira qu'un processus $(X_{s,t})$ est continu à droite si presque toutes ses trajectoires sont continues à droite, autrement dit si, pour presque tout $\omega\in\Omega$,

$$\lim_{u\downarrow s,v\downarrow t} X_{u,v}(\omega) = X_{s,t}(\omega) \text{ pour tout } s,t.$$

De manière analogue on définit les processus continus à gauche.

On dira qu'un processus $(X_{s,t})$ a des limites à gauche si presque toutes ses trajectoires ont des limites à gauche, autrement dit si, pour presque tout $\omega \in \Omega$, la limite

$$\lim_{u\uparrow s, v\uparrow t} X_{u,v}(\omega) = X^{-}_{s,t}(\omega)$$

existe pour tout $s,t > 0$.

Si $a_{s,t}$ est une fonction réelle de (s,t), on posera

$$\Delta_{h,k} a_{s,t} = a_{s+h,t+k} - a_{s+h,t} - a_{s,t+k} + a_{s,t} \quad (h,k \text{ réels} \geqq 0)$$

et on écrira, pour simplifier, Δ_h au lieu de $\Delta_{h,h}$.

On dira qu'un processus $(A_{s,t})$ est croissant s'il est continu à droite et si, pour tout s,t,

(9a) $$A_{s,0} = A_{0,t} = 0 \quad \text{p.s.};$$

(9b) $$\Delta_{h,k} A_{s,t} \geqq 0 \quad \text{p.s. pour tout } h,k > 0 \ (^1).$$

Il est clair que l'on a alors, sauf éventuellement pour des ω constituant un ensemble négligeable,

$$A_{s,0}(\omega) = A_{0,t}(\omega) = 0, \quad A_{s,t}(\omega) < \infty \quad \text{et} \quad \Delta_{h,k} A_{s,t}(\omega) \geqq 0$$

pour tout $h,k > 0$, s et t, donc en particulier

$$A_{s,t}(\omega) \leqq A_{u,v}(\omega) \quad \text{si } s \leqq u \text{ et } t \leqq v.$$

Suivant Meyer, on dira qu'un processus croissant $(A_{s,t})$ est un processus croissant naturel si, pour toute martingale bornée ayant des limites à gauche $(Y_{u,v})$ et pour tout $s,t > 0$, on a

(10) $$E\{\int_{Q_{s,t}} Y^{-}_{u,v} d_{u,v} A_{u,v}\} = E\{Y_{s,t} A_{s,t}\} \ (^2),$$

où $Q_{s,t}$ désigne l'ensemble $]0,s] \times]0,t]$.

On dira qu'un processus continu à droite $(X_{s,t})$ appartient à la classe (DL) (cf. [2], p. 137), si pour tout $a > 0$ les v. a. $X_{S,T}$, S et T parcourant les temps d'arrêt relatifs respectivement à $(\mathcal{F}^1_s)$ et $(\mathcal{F}^2_t)$ et bornés par a,

---

(1) On peut remplacer $\Delta_{h,k}$ par Δ_h et faire varier h sans changer quoi que ce soit à la condition.

(2) Si la martingale est continue à droite $E\{Y_{s,t} A_{s,t}\} = E\{\int_{Q_{s,t}} Y_{u,v} d_{u,v} A_{u,v}\}$.

sont uniformément intégrables.

La classe (DL) comprend notamment les martingales continues à droite et les sousmartingales continues à droite positives.

On dira qu'un processus $(X_{s,t})$ est un S-processus [resp. M-processus] si, pour tout $h,k > 0$, s et t,

$$E\{\Delta_{h,k}X_{s,t} | \mathcal{F}_{s,t}\} \geqq 0 \text{ p.s. [resp. } = 0 \text{ p.s.] } (^3).$$

Le théorème suivant généralise au cas continu le théorème 1 (dans sa formulation (6a et b)) et peut être considéré comme l'équivalent bidimensionnel du théorème de décomposition de Meyer ([2], p. 160).

Théorème 4. Soit $(X_{s,t})$ un S-processus continu à droite et appartenant à la classe (DL).

Alors $(X_{s,t})$ admet une décomposition de la forme

$$X_{s,t} = M_{s,t} + A_{s,t},$$

où $(M_{s,t})$ est un M-processus et $(A_{s,t})$ un processus croissant.

Il existe en outre une décomposition avec $(A_{s,t})$ naturel et une telle décomposition est unique.

On remarquera que la condition d'appartenance à la classe (DL), à la différence de ce qu'établit le théorème de décomposition de Meyer, n'est pas nécessaire. En effet, si $(X_{s,t}) = (X^1_s . X^2_t)$, où (X^1_s) est un processus continu à droite adapté à $(\mathcal{F}^1_s)$ et (X^2_t) une martingale continue à droite relative à $(\mathcal{F}^2_t)$, alors la conclusion du théorème est vraie pour $(X_{s,t})$ ($(A_{s,t})$ est le processus identiquement nul) sans que ce processus appartienne nécessairement à la classe (DL).

La condition d'appartenance à la classe (DL) est par contre nécessaire si $(X_{s,t})$ est un potentiel en chacune des deux variables, autrement dit si le processus est une surmartingale positive et continue à droite telle que

$$\lim_{s\to\infty} E\{X_{s,t}\} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} E\{X_{s,t}\} = 0.$$

(3) Si $(X_{s,t})$ est continu à droite et localement uniformément intégrable, la remarque de la note (1) est valable également ici.

On a en effet

$$E\{\Delta_{h,k}X_{s,t} | \mathcal{F}_{s,t}\} = E\{\Delta_{h,k}A_{s,t} | \mathcal{F}_{s,t}\} \text{ p.s.}$$

et donc, en faisant tendre h et k vers l'infini,

$$X_{s,t} = E\{A_{\infty,\infty} - A_{\infty,t} - A_{s,\infty} + A_{s,t} | \mathcal{F}_{s,t}\} \text{ p.s.,}$$

où $A_{\infty,\infty}$, $A_{\infty,t}$ et $A_{s,\infty}$ sont les limites presque sûres de $A_{s,t}$ quand respectivement $s,t \to \infty$, $s \to \infty$, $t \to \infty$. On en déduit

$$X_{s,t} \leqq 2E\{A_{\infty,\infty} | \mathcal{F}_{s,t}\} \text{ p.s.}$$

et cette inégalité s'étend aussitôt aux couples (S,T) de temps d'arrêt finis, ce qui entraîne le résultat ([4]).

On remarquera aussi que si $(X_{s,t}) = (X_s^1 \cdot X_t^2)$, où (X_s^1) [resp. (X_t^2)] est une sousmartingale (ou surmartingale) continue à droite relative à $(\mathcal{F}_s^1)$ [resp. $(\mathcal{F}_t^2)$] appartenant à la classe **(DL) des processus** à un paramètre, alors $(X_{s,t})$ appartient à la classe (DL) **et** le processus naturel de la décomposition est $(A_s^1 \cdot A_t^2)$, où (A_s^1) [resp. (A_t^2)] est le processus croissant naturel de la décomposition de Meyer de (X_s^1) [resp. (X_t^2)].

Passons à la démonstration du théorème.

Fixons $a > 0$, considérons deux copies I_1 et I_2 de l'intervalle $[0,a]$ et, sur $I_1 \times I_2 \times \Omega$ l'algèbre $\mathcal{A}$ des réunions finies d'ensembles de la forme

$$]s_1,s_2]\times]t_1,t_2]\times A_1\times A_2, \text{ où } s_1 < s_2 \leqq a,\ t_1 < t_2 \leqq a \text{ et } A_1\times A_2 \in \mathcal{F}_{s_1,t_1},$$

$$\{0\}\times]t_1,t_2]\times A_1\times A_2, \text{ où } t_1 < t_2 \leqq a \text{ et } A_1\times A_2 \in \mathcal{F}_{0,t_1},$$

$$]s_1,s_2]\times\{0\}\times A_1\times A_2, \text{ où } s_1 < s_2 \leqq a \text{ et } A_1\times A_2 \in \mathcal{F}_{s_1,0},$$

$$\{(0,0)\}\times A_1\times A_2, \text{ où } A_1\times A_2 \in \mathcal{F}_{0,0}.$$

Puisque tout ensemble de $\mathcal{A}$ peut s'écrire comme réunion finie d'ensembles de cette forme deux à deux disjoints, on définit une mesure additive μ en posant $\mu = 0$ pour les trois derniers types d'ensemble et

---

([4]) En réalité on a montré que le processus appartient à la classe (D) (= sous-classe de (DL) des processus uniformément intégrables).

(11) $\mu(]s_1,s_2]\times]t_1,t_2]\times A_1\times A_2) = E\{X_{s_2,t_2} - X_{s_2,t_1} - X_{s_1,t_2} + X_{s_1,t_1}\,;\, A_1\times A_2\}$
pour le premier.

Montrons que μ est complètement additive. Si H appartient à $\mathfrak{A}$, alors $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe K appartenant à $\mathfrak{A}$ tel que $\overline{K^\omega} \subset H^\omega$ pour tout ω et que $\mu(H) - \mu(K) \leqq \varepsilon$ (il suffit de vérifier cela pour un ensemble du premier type, mais c'est alors une conséquence immédiate de la continuité à droite et de l'intégrabilité uniforme locale de $(X_{s,t})$). Soit maintenant H_n une suite d'ensembles de $\mathfrak{A}$ décroissant vers l'ensemble vide et, pour chaque n, K_n un ensemble de $\mathfrak{A}$ tel que $\overline{K_n^\omega} \subset H_n^\omega$ et que $\mu(H_n) - \mu(K_n) \leqq \varepsilon/2^n$. Posons $L_n = K_1 \cap \ldots \cap K_n$. Alors la suite L_n est décroissante et, puisque $\overline{L_n^\omega} \subset H_n^\omega$, l'intersection des L_n est l'ensemble vide. D'autre part $\mu(H_n) - \mu(L_n) \leqq \varepsilon$. Il suffit donc de démontrer que $\mu(L_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Soient S_n et T_n respectivement les débuts de la projection de L_n sur $I_1 \times \Omega_1$ et de la projection de L_n sur $I_2 \times \Omega_2$. Alors $S_n \wedge a$ et $T_n \wedge a$ sont des temps d'arrêt relatifs respectivement à $(\mathcal{F}_s^1)$ et à $(\mathcal{F}_t^2)$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs et la valeur a à partir d'un certain n. On a en outre

$$\mu(L_n) \leqq \mu(]S_n \wedge a, a] \times]T_n \wedge a, a]) =$$
$$= E\{X_{a,a} - X_{a,T_n\wedge a} - X_{S_n\wedge a,a} + X_{S_n\wedge a,T_n\wedge a}\},$$

cette dernière égalité étant une conséquence immédiate de (11). Compte tenu du fait que $(X_{s,t})$ appartient à la classe (DL), on en déduit que $\mu(L_n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Désignons encore par μ le prolongement de cette mesure à la tribu engendrée par $\mathfrak{A}$.

Soient s et t deux rationnels dyadiques > 0, $(A^{(n)}_{i/2^n,j/2^n})$ le processus croissant de la première décomposition de $(X_{i/2^n,j/2^n})$ (théorème 1) et $(Y_{u,v})$ une martingale bornée dont toutes les trajectoires ont des limites à gauche. Alors pour n suffisamment grand on a

$$\sum_{i=0}^{2^ns-1}\sum_{j=0}^{2^nt-1} E\{Y_{\frac{i}{2^n},\frac{j}{2^n}}\,\Delta_{\frac{1}{2^n}}\,X_{\frac{i}{2^n},\frac{j}{2^n}}\} =$$
$$(12)\qquad \sum_{i=0}^{2^ns-1}\sum_{j=0}^{2^nt-1} E\{Y_{\frac{i}{2^n},\frac{j}{2^n}}\,\Delta_{\frac{1}{2^n}}\,A^{(n)}_{\frac{i}{2^n},\frac{j}{2^n}}\} = E\{Y_{s,t}A^{(n)}_{s,t}\}.$$

Mais si l'on choisit a > s,t le premier membre peut s'écrire de la manière suivante :

$$\int \sum_{i=0}^{2^n s-1} \sum_{j=0}^{2^n t-1} 1_{\left]\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n}\right]\times\left]\frac{j}{2^n},\frac{j+1}{2^n}\right]}(u,v) Y_{\frac{i}{2^n},\frac{j}{2^n}}(\omega) d\mu(u,v,\omega)$$

et converge donc vers

$$\int 1_{]0,s]\times]0,t]}(u,v) Y^-_{u,v}(\omega) d\mu(u,v,\omega)$$

quand $n \to \infty$ (théorème de Lebesgue).

Cela montre premièrement que $E\{Y_{s,t} A^{(n)}_{s,t}\}$ converge vers une limite finie quand $n \to \infty$, donc, puisque l'on peut choisir pour $Y_{s,t}$ une v. a. bornée $\mathfrak{F}_{s,t}$-mesurable quelconque, que $A^{(n)}_{s,t}$ converge faiblement vers une v. a. $A^{(\infty)}_{s,t}$ et deuxièmement que

$$\int 1_{]0,s]\times]0,t]}(u,v) Y^-_{u,v}(\omega) d\mu(u,v,\omega) = E\{Y_{s,t} A^{(\infty)}_{s,t}\}. \tag{13}$$

Cette égalité est également vraie si un des deux indices est nul, à condition de définir $A^{(\infty)}_{s,0} = A^{(\infty)}_{0,t} = 0$.

Or, quels que soient les rationnels dyadiques h, k, s et t, on a évidemment

$$\Delta_{h,k} A^{(\infty)}_{s,t} \geqq 0 \text{ p.s.}$$

et, puisque l'opérateur espérance conditionnelle est continu dans la topologie faible,

$$E\{\Delta_{h,k} X_{s,t} \mid \mathfrak{F}_{s,t}\} = E\{\Delta_{h,k} A^{(\infty)}_{s,t} \mid \mathfrak{F}_{s,t}\} \text{ p.s.} \tag{14}$$

Montrons que si s, t, u et v désignent des rationnels dyadiques, alors

$$A^{(\infty)}_{s,t} = \inf_{u>s,v>t} A^{(\infty)}_{u,v} \text{ p.s.} \tag{15}$$

Du fait que le membre de gauche de (13) est continu à droite en (s,t), on a

$$\lim_{u\downarrow s, v\downarrow t} E\{Y_{u,v} A^{(\infty)}_{u,v}\} = E\{Y_{s,t} A^{(\infty)}_{s,t}\},$$

D'autre part, d'après la continuité à droite des tribus, si $u_n \downarrow s$ et $v_n \downarrow t$, alors $\lim_{n\to\infty} Y_{u_n,v_n} = Y_{s,t}$ p.s. et une application du théorème de Lebesgue donne

$$\lim_{n\to\infty} E\{Y_{u_n,v_n} A^{(\infty)}_{u_n,v_n}\} = E\{Y_{s,t} \lim_{n\to\infty} A_{u_n,v_n}\}.$$

Puisque l'on peut choisir pour $Y_{s,t}$ une v. a. bornée $\mathcal{F}_{s,t}$-mesurable quelconque, (15) en résulte.

En définissant maintenant $A^{(\infty)}_{s,t}$ par (15)(sans p.s.) si s ou t ne sont pas des rationnels dyadiques, on obtient un processus croissant vérifiant (14) pour h, k, s et t réels, donc une décomposition de $(X_{s,t})$.

Le processus croissant ainsi défini est naturel. En effet, s et t étant des rationnels dyadiques > 0, le premier membre de (12) est égal à

$$\sum_{i=0}^{2^n s-1} \sum_{j=0}^{2^n t-1} E\{Y_{\frac{i}{2^n},\frac{j}{2^n}} \Delta_{\frac{1}{2^n}} A^{(\infty)}_{\frac{i}{2^n},\frac{j}{2^n}}\} \quad \text{(n assez grand)}$$

et converge donc, quand $n \to \infty$, vers

$$E\{\int_{Q_{s,t}} Y^-_{u,v}\, d_{u,v} A^{(\infty)}_{u,v}\}.$$

Puisque le dernier membre converge vers $E\{Y_{s,t}A^{(\infty)}_{s,t}\}$, cela montre que la condition (10) est remplie pour tout couple (s,t) de rationnels dyadiques, donc pour tout couple de réels.

Du même coup on a montré l'unicité, car si $(A_{s,t})$ est le processus croissant d'une décomposition de $(X_{s,t})$, alors on a, compte tenu de (12), s et t désignant des rationnels dyadiques > 0,

$$E\{\int_{Q_{s,t}} Y^-_{u,v}\, d_{u,v} A_{u,v}\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{2^n s-1} \sum_{j=0}^{2^n t-1} E\{Y_{\frac{i}{2^n},\frac{j}{2^n}} \Delta_{\frac{1}{2^n}} A_{\frac{i}{2^n},\frac{j}{2^n}}\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{2^n s-1} \sum_{j=0}^{2^n t-1} E\{Y_{\frac{i}{2^n},\frac{j}{2^n}} \Delta_{\frac{1}{2^n}} X_{\frac{i}{2^n},\frac{j}{2^n}}\} = E\{Y_{s,t}A^{(\infty)}_{s,t}\}.$$

Or, si de plus $(A_{s,t})$ est naturel, le premier membre est égal à $E\{Y_{s,t}A_{s,t}\}$, ce qui montre que $(A_{s,t})$ et $(A^{(\infty)}_{s,t})$ coïncident.

Le théorème est donc entièrement démontré. La démonstration nous a été inspirée par les travaux de C. Doléans et K. Murali Rao (cf. [3] et [4]).

On remarquera que l'hypothèse que l'espace de probabilité et les tribus sont du type produit est intervenue à deux reprises. Premièrement dans la démonstration que μ est complètement additive et deuxièmement dans le théorème suivant, utilisé plusieurs fois et implicitement démontré dans [1]: pour toute v.a. bornée Y il existe une version de la martingale $(E\{Y|\mathcal{F}_{s,t}\})$ ayant des limites à gauche.

Voici maintenant une démonstration de l'existence d'une décomposition qui suit de près la méthode utilisée par C. Doléans dans [3].

Désignons par $\mathcal{P}_a$ et μ_a respectivement la tribu engendrée par l'algèbre $\mathcal{A}$ et la mesure μ introduites plus haut. Il est clair que si $a < b$, la restriction de μ_b à $\mathcal{P}_a$ coïncide avec μ_a. Soit $\mathcal{P}$ la tribu engendrée par $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}_n$ et soit μ la mesure sur $\mathcal{P}$ dont la restriction à $\mathcal{P}_n$ est μ_n.

Montrons que si la projection de $H \in \mathcal{P}$ sur Ω est de probabilité nulle, alors $\mu(H) = 0$. A cet effet posons $T = 0$ sur la projection de H sur Ω et $T = \infty$ sur le complémentaire de cette projection. On définit ainsi un temps d'arrêt T relatif à $(\mathcal{F}_{s,s})$ et il est clair qu'à un ensemble μ-négligeable près on a $H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\{(s,t,\omega): T(\omega) < s \leqq n,\ T(\omega) < t \leqq n\}$. Soit T_k une suite de temps d'arrêt relatifs à $(\mathcal{F}_{s,s})$, ne prenant qu'un nombre dénombrable t_i^k de valeurs et telle que $T_k \downarrow T$ p.s.. Puisque

$$\{(s,t,\omega): T(\omega)<s\leqq n,\ T(\omega)<t\leqq n\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{(s,t,\omega): T_k(\omega)<s\leqq n,\ T_k(\omega)<t\leqq n\},$$

tout revient à démontrer que

$$\{(s,t,\omega): T_k(\omega)<s\leqq n,\ T_k(\omega)<t\leqq n\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}(]t_i^k,n]\times]t_i^k,n]\times\{T_k=t_i^k\})$$

est μ-négligeable. Mais cela est une conséquence de l'hypothèse que $\{T < \infty\}$ est de probabilité nulle. On a en effet $\{T_k=t_i^k\} \subset \{T<\infty\}$, donc, si $t_i^k < n$,

$$\mu(]t_i^k,n]\times]t_i^k,n]\times\{T_k=t_i^k\}) = E\{X_{n,n}-X_{n,t_i^k}-X_{t_i^k,n}+X_{t_i^k,t_i^k};\ \{T_k=t_i^k\}\} = 0.$$

Si maintenant Y est une v. a. bornée et $(Y_{u,v})$ désigne une version ayant des limites à gauche de la martingale $(E\{Y|\mathcal{F}_{u,v}\})$, alors

$$1_{]0,s]\times]0,t]}(u,v)Y^-_{u,v}(\omega)$$

en tant que fonction de (u,v,ω) est mesurable par rapport à la complétée de $\mathcal{P}$ relativement à μ et on peut donc poser

$$\mu_{s,t}(Y) = \int 1_{]0,s]\times]0,t]}(u,v)Y^-_{u,v}(\omega)d\mu(u,v,\omega),$$

en définissant ainsi une mesure $\mu_{s,t}$ sur $\mathcal{F}$ pour tout s, t (si $Y_n \downarrow 0$ et si $(Y^n_{u,v})$ désigne une version ayant des limites à gauche de $(E\{Y_n|\mathcal{F}_{u,v}\})$, alors pour presque tout ω $Y^{n-}_{u,v}(\omega) \downarrow 0$ pour tout u, v (5)). Cette mesure est absolument continue par rapport à P et si $A_{s,t}$ désigne une version de sa densité, on vérifie aussitôt que (9a et b) sont remplies. En outre

(5) Pour cela on utilise l'inégalité maximale des martingales (cf. [1] p. 3)

$$\mu_{s,t}(Y) = \mu_{s,t}(E\{Y|\mathcal{F}_{s,t}\}),$$

ce qui entraîne

$$E\{YA_{s,t}\} = E\{E\{Y|\mathcal{F}_{s,t}\}A_{s,t}\} = E\{Y\ E\{A_{s,t}|\mathcal{F}_{s,t}\}\},$$

quelle que soit la v. a. bornée Y et par conséquent $A_{s,t}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{s,t}$.

Puisque $\mu_{s_n,t_n} \downarrow \mu_{s,t}$ si $s_n \downarrow s$ et $t_n \downarrow t$, on a $A_{s_n,t_n} \downarrow A_{s,t}$ p.s.. Quitte à remplacer $A_{s,t}$ par $\inf\{A_{u,v}: u > s,\ v > t,\ u$ et v rationnels$\}$, on peut supposer que $(A_{s,t})$ est continu à droite donc un processus croissant.

Soit F un ensemble de $\mathcal{F}_{s,t}$. D'après la définition de μ, on a

$$\mu(]s,\ s+h] \times]t,\ t+k] \times F) = E\{\Delta_{h,k}X_{s,t};\ F\}$$

et d'autre part, si on désigne par $(Y_{u,v})$ une version ayant des limites à gauche de $(P\{F|\mathcal{F}_{u,v}\})$, on a

$$\mu(]s,s+h] \times]t,t+k] \times F) = \int 1_{]s,s+h]\times]t,t+k]}(u,v)Y^-_{u,v}(\omega)d\mu(u,v,\omega) =$$

$$= \mu_{s+h,t+k}(F) - \mu_{s+h,t}(F) - \mu_{s,t+k}(F) + \mu_{s,t}(F) = E\{\Delta_{h,k}A_{s,t};\ F\},$$

ce qui démontre que $E\{\Delta_{h,k}X_{s,t}|\mathcal{F}_{s,t}\} = E\{\Delta_{h,k}A_{s,t}|\mathcal{F}_{s,t}\}$ p.s., donc l'existence d'une décomposition.

Il ne reste donc plus à démontrer que $(A_{s,t})$ est naturel. Considérons une martingale bornée et ayant des limites à gauche $(Y_{u,v})$. Soit Y la limite de $Y_{u,v}$ (dans L_1) quand $u \to \infty$, $v \to \infty$. Alors on a

$$\mu_{s,t}(Y) = \int 1_{]0,s]\times]0,t]}(u,v)Y^-_{u,v}(\omega)d\mu(u,v,\omega).$$

Le membre de gauche est égal à

$$E\{YA_{s,t}\} = E\{E\{Y|\mathcal{F}_{s,t}\}A_{s,t}\} = E\{Y_{s,t}A_{s,t}\}.$$

Celui de droite à

$$E\{\int_{Q_{s,t}} Y^-_{u,v}d_{u,v}A_{u,v}\}$$

(c'est vrai pour $1_{]s_1,s_2]\times]t_1,t_2]}(u,v)1_F(\omega)$ à la place de $Y^-_{u,v}(\omega)$ si F appartient à $\mathcal{F}_{s_1,t_1}$, donc c'est vrai pour tout processus continu à gauche). Cela montre que (10) est vérifiée, autrement dit que le processus $(A_{s,t})$ est un processus croissant naturel.

Voici maintenant un théorème analogue au théorème T49-VII [2] de Meyer.

Tous les temps d'arrêt que l'on va considérer sont finis et relatifs soit à $(\mathcal{F}^1_s)$, soit à $(\mathcal{F}^2_t)$ (ils sont donc définis ou bien sur Ω_1 ou bien sur Ω_2).

On utilisera les lettres S ou σ pour désigner un temps d'arrêt relatif à $(\mathcal{F}^1_s)$ et la lettre T pour désigner un temps d'arrêt relatif à $(\mathcal{F}^2_t)$. On écrira $\mathcal{F}_{S,T}$ au lieu de $\mathcal{F}^1_S \otimes \mathcal{F}^2_T$. Si a_s est une fonction réelle de s, on désignera par a_{s-} la limite à gauche (si elle existe) à l'instant s et si $a_{s,t}$ est une fonction réelle de (s,t), on désignera par $a_{s-,t}$ [resp. $a_{s,t-}$] la limite à gauche (si elle existe) à l'instant s [resp. t] pour t [resp. s] fixé.

<u>Théorème 5</u>. Pour que le processus croissant $(A_{s,t})$ soit naturel, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies:

(a) si les suites de temps d'arrêt S_n et T_n tendent en croissant respectivement vers S et T (finis), alors $A_{S,T}$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $\bigcup_n \mathcal{F}_{S_n,T_n}$;

(b) $(A_{s,t})$ ne charge aucun temps d'arrêt totalement inaccessible ([2], p. 168), autrement dit,

$$P\{A_{S,t} = A_{S-,t}\} = 1 \quad \text{et} \quad P\{A_{s,T} = A_{s,T-}\} = 1,$$

quels que soient s, t et les temps d'arrêt totalement inaccessibles S et T.

La nécessité de la condition (a) se démontre comme dans [4], p. 73 et de la condition (b) comme dans [2], p. 174.

Pour la suffisance, on note d'abord qu'il suffit de démontrer (10) pour toute martingale continue à droite et bornée $(Y_{u,v})$ (une telle martingale a automatiquement des limites à gauche). On remarque ensuite que si (10) est vraie pour les martingales de la forme $(Y^1_u \cdot Y^2_v)$, où (Y^1_u) et (Y^2_v) sont des martingales relatives respectivement à $(\mathcal{F}^1_u)$ et $(\mathcal{F}^2_v)$, continues à droite et bornées, alors (10) est vraie pour toute martingale continue à droite et bornée $(Y_{u,v})$ (utiliser l'inégalité maximale des martingales à indices doubles).

Il reste alors à démontrer (voir note (2)) que

$$E\{\int_{Q_{s,t}} (Y^1_u \cdot Y^2_v - Y^1_{u-} \cdot Y^2_{v-}) d_{u,v} A_{u,v}\} = 0.$$

Le membre de gauche s'écrit aussi de la manière suivante:

$$E\{\int_{Q_{s,t}} Y^2_{v-}(Y^1_u - Y^1_{u-})d_{u,v}A_{u,v}\} + E\{\int_{Q_{s,t}} Y^1_u(Y^2_v - Y^2_{v-})d_{u,v}A_{u,v}\},$$

et on voit alors que pour démontrer, par exemple, que le premier terme s'annule, il suffit de prouver que si F appartient à $\mathcal{F}_2$,

(16) $$E\{\int_{]0,s]}(Y^1_u - Y^1_{u-})d_uA_{u,t};\ \Omega_1 \times F\} = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Désignons par σ_n le n-ème saut de (Y^1_u) dont l'amplitude dépasse ε:

$$\sigma_o(\omega_1)=0,\ \sigma_n(\omega_1)=\begin{cases}\inf\{u\colon \sigma_{n-1}(\omega_1)<u\leqq s,\ |Y_u(\omega_1) - Y_{u-}(\omega_1)| > \varepsilon\},\\ s \quad \text{si l'ensemble } \{\ \} \text{ est vide.}\end{cases}$$

Les σ_n ainsi définis sont des temps d'arrêt relatifs à $(\mathcal{F}^1_u)$. Supposons d'avoir pu démontrer que $(A_{u,t})_u$ se décompose en une somme

$$B_u + C_u$$

de deux processus croissant à un paramètre (adaptés à $(\mathcal{F}_{u,t})_u$) tels que (B_u) ne présente pas de sauts aux instants σ_n et que (16) soit vérifiée par (C_u) à la place de $(A_{u,t})_u$. Alors le membre de gauche de (16) est majoré en valeur absolue par

$$E\{\int_{]0,s]}|Y^1_u - Y^1_{u-}|d_uB_u\} \leqq \varepsilon E\{A_{s,t}\}$$

et la démonstration est achevée, puisque ε est arbitraire.

Il ne reste donc plus qu'à produire une décomposition de $(A_{u,t})_u$ ayant les propriétés mentionnées ci-dessus. A cet effet, on peut admettre, en vertu de l'hypothèse (b), que tous les temps d'arrêt σ_n sont accessibles ([2], p. 169 et 170). On parvient alors au résultat en utilisant le procédé d'extractions successives de processus croissants employé par Meyer dans le cas des processus à un paramètre ([2], p. 175 et 176), l'hypothèse (a) et le fait (démontré par Meyer) que si un processus croissant à un paramètre (A'_u) possède les deux propriétés

(α) (A'_u) est adapté à $(\mathcal{F}_{u,t})_u$;

(β) si les temps d'arrêt S_n tendent en croissant vers S (fini), alors A'_S est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $\bigcup_n \mathcal{F}_{S_n,t}$,

alors, quelle que soit la suite croissante de temps d'arrêt S'_n convergeant vers S' (fini), en posant

$$C'_u(\omega_1,\omega_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < S'(\omega_1), \\ \lim_{n\to\infty} (A_{S'(\omega_1),t}(\omega_1,\omega_2) - A_{S'_n(\omega_1),t}(\omega_1,\omega_2)) & \text{si } u \geqq S'(\omega_1), \end{cases}$$

on définit un processus croissant à un paramètre (C'_u) tel que

(α') $E\{\int_{]0,s]} (Y_u - Y_{u-})d_u C'_u; \Omega_1 \times F\} = 0$;

(β') $(A'_u - C'_u)$ est un processus croissant à un paramètre vérifiant (α) et (β).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Cairoli, Une inégalité pour martingales à indices multiples et ses applications, Séminaire de Probabilités IV, Lecture Notes in Math., 124, Springer Verlag, Berlin, 1970, p. 1-27.

[2] P. A. Meyer, Probabilités et potentiel, Hermann, Paris, 1966.

[3] C. Doléans, Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de la classe (D), Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie, 9, 1968, p. 309-314.

[4] K. Murali Rao, On decomposition theorems of Meyer, Math. Scand., 24, 1969, p. 66-78.

Ecole Polytechnique Fédérale
Lausanne (Suisse)