SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL WEIL

Conditionnement par rapport au passé strict

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 362-372

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__362_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1969-70

CONDITIONNEMENT PAR RAPPORT AU PASSÉ STRICT

par Michel WEIL

RÉSUMÉ. - Soit T un temps d'arrêt terminal d'un processus de HUNT ; nous calculons les opérateurs d'espérances conditionnelles par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{T-}$, au moyen du noyau de Lévy du processus et nous vérifions en passant, pour une certaine catégorie de temps d'arrêt, la propriété de Markof par rapport au passé strict.

NOTATIONS ET RAPPELS

Nous désignons par (P_t) un semi-groupe de HUNT, sur un espace localement compact à base dénombrable E, satisfaisant à l'hypothèse de continuité absolue, par $(\Omega , \mathcal{F} , \mathcal{F}_t , X_t , \theta_t , P^x , x \in E)$ la réalisation canonique de (P_t). Nous munirons E d'une distance d compatible avec sa topologie.

Soit Q un noyau sur E. Pour toute fonction borélienne positive Φ sur $E \times E$ on pose

$$Q\Phi (x) = \int_E Q(x , dy) \Phi(x , y) .$$

Nous dirons que le processus (X_t) admet un système de LEVY (A , N) s'il existe une fonctionnelle additive continue $A = (A_t)$ et un noyau N sur E vérifiant $N(x , \{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$, tels que, pour toute fonction borélienne positive Φ sur $E \times E$ les processus croissants :

$$B_t = \sum_{0<s\leq t} \Phi(X_{s-} , X_s) I_{\{X_{s-} \neq X_s\}}$$

$$\widetilde{B}_t = \int_0^t N\Phi \circ X_s \, dA_s$$

soient <u>associés</u>. Cela signifie que la différence de ces processus est une martingale locale (voir ci-dessous).

Shinzo WATANABE a montré (voir par exemple P.A. MEYER [5]) qu'avec les hypothèses faites, le processus (X_t) admet un système de LEVY (A , N). Le fait que les processus croissants ci-dessus sont <u>associés</u> est plus connu sous la forme de l'égalité suivante

$$(1) \qquad E^{\bullet}\Big[\sum_{0<s\le t} \Phi(X_{s-} , X_s)\, I_{\{X_{s-}\neq X_s\}}\Big] = E^{\bullet}\Big[\int_0^t N\Phi \circ X_s \, dA_s\Big] \quad .$$

Un processus stochastique (Z_t), adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)$ sera dit <u>prévisible</u>, si la fonction $(t , \omega) \mapsto Z_t(\omega)$ est mesurable par rapport à la tribu sur $R_+ \times \Omega$ engendrée par les processus adaptés à $(\mathcal{F}_t)$ dont les trajectoires sont continues à gauche.

Soit (Z_s) un processus positif prévisible ; dans [3] P.A. MEYER démontre que si deux processus croissants (B_t) et $(\widetilde{B}_t)$ sont associés, alors il en est de même pour les processus $Z \cdot B$ et $Z \cdot \widetilde{B}$ définis ainsi :

$$(Z \cdot B)_t = \int_0^t Z_s \, dB_s \qquad (Z \cdot \widetilde{B})_t = \int_0^t Z_s \, d\widetilde{B}_s \quad .$$

En prenant l'espérance de la martingale $Z \cdot B - Z \cdot \widetilde{B}$ et en utilisant le théorème d'arrêt de DOOB on obtient la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - <u>Soient</u> Z <u>un processus positif prévisible</u>, S <u>un temps d'arrêt pour la famille</u> $(\mathcal{F}_t)$, <u>et</u> Φ <u>une fonction borélienne positive sur</u> $E \times E$. <u>Alors on a</u>

$$(2) \qquad E^{\bullet}\Big[\sum_{0<s\le S} Z_s\, \Phi(X_{s-} , X_s)\, I_{\{X_{s-}\neq X_s\}}\Big] = E^{\bullet}\Big[\int_0^S Z_s \, N\Phi \circ X_s \, dA_s\Big] \quad .$$

Si T est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F}_t)$, la tribu $\mathcal{F}_{T-}$ est par définition (CHUNG et DOOB [1]) la tribu engendrée par les ensembles $A \cap \{t < T\}$, avec $t \in R_+$ et $A \in \mathcal{F}_t$. On montre (voir par exemple P.A. MEYER [6]) alors les propriétés suivantes :

PROPOSITION 2. - 1) <u>Une variable aléatoire positive</u> Z <u>est</u> $\mathcal{F}_{T-}$<u>-mesurable si et seulement s'il existe un processus prévisible</u> (Z_t) <u>tel que</u> $Z = Z_T$.

2) <u>Les variables aléatoires</u> T <u>et</u> X_{T-} <u>sont</u> $\mathcal{F}_{T-}$<u>-mesurables</u>.

Un temps d'arrêt T est dit <u>prévisible</u> s'il existe une suite croissante (R_n) de temps d'arrêt qui converge vers T p.s., telle que $R_n < T$ p.s. sur $\{T > 0\}$ pour tout n . Un temps d'arrêt T est <u>totalement inaccessible</u> s'il n'est pas p.s. infini, et si, pour toute suite croissante (S_n) de temps d'arrêt majorés par T , on a

$$P^{*}\{\omega : \lim S_n(\omega) = T(\omega) < +\infty , S_n(\omega) < T(\omega) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\} = 0 \quad .$$

Soit T un temps d'arrêt. Nous définissons la partie prévisible T_p et la partie totalement inaccessible T_i de T de la manière suivante.:

$$T_p = \begin{cases} T & \text{sur } \{X_{T-} = X_T\} \\ +\infty & \text{sur } \{X_{T-} \neq X_T\} \end{cases} \qquad T_i = \begin{cases} T & \text{sur } \{X_{T-} \neq X_T\} \\ +\infty & \text{sur } \{X_{T-} \neq X_T\} \end{cases} .$$

Le processus, étant de HUNT, il est clair que T_p est un temps d'arrêt prévisible et T_i un temps d'arrêt totalement inaccessible.

Nous aurons besoin de la proposition suivante :

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> T <u>un temps d'arrêt pour la famille</u> $(\mathcal{F}_t)$. <u>Alors les événements</u> $\{X_{T-} \neq X_T , T < \infty\}$ <u>et</u> $\{X_{T-} = X_T , T < \infty\}$ <u>appartiennent à la tribu</u> $\mathcal{F}_{T-}$.

DÉMONSTRATION. - On sait (cf. DELLACHERIE [2]), de manière générale, que si R et S sont des temps d'arrêt, R étant prévisible, alors l'ensemble $\{R = S\}$

appartient à $\mathcal{F}_{T-}$. Il suffit par conséquent, avec les notations précédentes, de prendre $R = T_p$, $S = T$ et de se rappeler que T est $\mathcal{F}_{T-}$-mesurable.

PROPRIETE DE MARKOF PAR RAPPORT AU PASSE STRICT

Ce paragraphe montre de manière unifiée les résultats des notes [7] et [8] .

DÉFINITION 1. - Soit H une partie borélienne de $E \times E$. Posons

$$T = \inf(s > 0 : (X_{s-} , X_s) \in H) \quad .$$

Nous dirons que H est admissible si $(X_{T-} , X_T) \in H$ p.s. sur l'ensemble $\{0 < T < \infty\}$.

Exemple. - 1) Si A est un ensemble finement fermé de E , alors $E \times A$ est admissible.

2) Il en est de même de tout ensemble borélien H de $E \times E$, situé à une distance strictement positive de la diagonale.

DÉFINITION 2. - Pour toute partie admissible H de $E \times E$ nous noterons Q_H le noyau de E dans $E \times E$, suivant :

$$Q_H(x , \Phi) = \begin{cases} \Phi(x , x) & \text{si } (x , x) \in H \\ \dfrac{N(x , \Phi I_H)}{N(x , I_H)} & \text{si } (x , x) \notin H \text{ et } 0 < N(x , I_H) < +\infty \\ 0 & \text{si } (x , x) \notin H \text{ et } N(x , I_H) = 0 \text{ ou} +\infty \end{cases}$$

où Φ est une fonction borélienne positive sur $E \times E$.

On a alors le théorème.

THÉORÈME 1. - Soit H une partie admissible de $E \times E$ et T le temps d'arrêt : $\inf(s > 0 : (X_{s-}, X_s) \in H)$. Alors pour toute fonction borélienne positive Φ sur $E \times E$ on a

$$E^{\bullet}[\Phi(X_{T-}, X_T)\, I_{\{0<T<+\infty\}} \mid \mathcal{F}_{T-}] = Q_H(X_{T-}, \Phi)\, I_{\{0<T<+\infty\}} \quad \text{p.s.}$$

(l'indicatrice $I_{\{0<T<\infty\}}$ sera sous-entendue désormais).

DÉMONSTRATION. - Soit (Z_s) un processus prévisible, tel que $Z_0 = Z_\infty = 0$, et positif. D'après la proposition 1 tout revient à montrer que

$$E^{\bullet}[Z_T\, \Phi(X_{T-}, X_T)] = E^{\bullet}[Z_T\, Q_H(X_{T-}, \Phi)] \quad .$$

Or, H étant admissible, on a sur l'ensemble $\{X_{T-} = X_T, 0 < T < \infty\}$:

$$Q_H(X_{T-}, \Phi) = \Phi(X_{T-}, X_{T-}) = \Phi(X_{T-}, X_T) \quad .$$

On est donc ramené à montrer que

$$E^{\bullet}[Z_T\, \Phi(X_{T-}, X_T)\, I_{\{X_{T-} \neq X_T\}}] = E^{\bullet}[Z_T\, Q_H(X_{T-}, \Phi)\, I_{\{X_{T-} \neq X_T\}}] \quad . \tag{3}$$

Le premier membre vaut

$$E^{\bullet}[\sum_{0<s<T} Z_s\, \Phi(X_{s-}, X_s)\, I_H(X_{s-}, X_s)\, I_{\{X_{s-} \neq X_s\}}]$$

qui, d'après la formule (2) proposition 1, est égal à

$$E^{\bullet}[\int_0^T Z_s\, N(X_{s-}, \Phi I_H)\, dA_s] \quad . \tag{4}$$

De même le second membre de (3) vaut

$$E^{\bullet}[\sum_{0<s<T} Z_s\, Q_H(X_{s-}, \Phi)\, I_H(X_{s-}, X_s)\, I_{\{X_{s-} \neq X_s\}}] \quad ,$$

et ceci, par la formule (2) et le fait que (A_t) est une fonctionnelle continue, est égal à

(5) $$E^{\cdot}[\int_0^T Z_s\, Q_H(X_s\ ,\ \Phi)\ N(X_s\ ,\ I_H)dA_s]\ .$$

Pour que les expressions (4) et (5) soient égales, il suffit, vu la définition 2, de montrer que pour presque tout ω , l'ensemble des $s \in \,]0\ ,\ T[$ tels que $N(X_s(\omega)\ ,\ I_H) = +\infty$ est négligeable pour la mesure $dA_{\bullet}(\omega)$. Cela résulte aussitôt de

$$P^{\cdot}\{X_{T-} \neq X_T\} = E^{\cdot}[\sum_{0<s<T} I_H(X_{s-}\ ,\ X_s)\ I_{\{X_{s-}\neq X_s\}}]$$
$$= E^{\cdot}[\int_0^T N(X_s\ ,\ I_H)dA_s]$$

Q.E.F.

COROLLAIRE. - Soient g une fonction mesurable positive sur Ω , H une partie admissible de $E \times E$ et $T = \inf(s > 0 : (X_{s-}\ ,\ X_s) \in H)$. Alors on a

(6) $$E^{\cdot}[g \circ X_T \mid \mathcal{F}_{T-}] = E^{\cdot}[g \circ \theta_T \mid X_{T-}] \quad \text{p.s.}$$

d'où la définition

DÉFINITION 3. - Nous dirons qu'un temps d'arrêt T possédant la propriété (6) est un temps de Markov pour le passé strict.

APPLICATION AUX TEMPS TERMINAUX

THÉORÈME 2. - Soit T un temps terminal exact. Alors il existe un noyau Q sur E tel que pour toute fonction borélienne positive Φ sur $E \times E$ on ait

$$E^{\cdot}[\Phi(X_{T-}\ ,\ X_T)\ I_{\{0<T<\infty\}} \mid \mathcal{F}_{T-}]$$
$$= \Phi(X_{T-}\ ,\ X_{T-})\ I_{\{0<T<\infty\ ,X_{T-}=X_T\}} + Q(X_{T-}\ ,\ \Phi)\ I_{\{0<T<\infty\ ,X_{T-}\neq X_T\}} \quad \text{p.s.}$$

COROLLAIRE. - <u>Si, en outre,</u> T <u>est totalement inaccessible sur</u> $\{0 < T < \infty\}$ <u>alors</u> T <u>est un temps de Markof pour le passé strict.</u>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. - Décomposons d'abord T en sa partie prévisible T_p et sa partie totalement inaccessible T_i. D'après la proposition 3 les événements $\{X_{T-} = X_T \, , \, 0 < T < \infty\}$ et $\{X_{T-} \neq X_T \, , \, 0 < T < \infty\}$ appartiennent à la tribu $\mathcal{F}_{T-}$. Par conséquent on peut écrire

$$E^{\bullet}[\Phi(X_{T-}, X_T) \, I_{\{0<T<\infty\}} \mid \mathcal{F}_{T-}]$$

$$= \Phi(X_{T-}, X_{T-}) \, I_{\{0<T<\infty, X_{T-}=X_T\}} + E^{\bullet}[\Phi(X_{T-}, X_T) \, I_{\{0<T<\infty, X_{T-}\neq X_T\}} \mid \mathcal{F}_{T-}] \, .$$

C'est donc seulement cette seconde espérance qu'il faut calculer.

Notons par L l'ensemble des nombres de la forme $a + T \circ \theta_a$ où a est un nombre rationnel positif et posons

$$R_\epsilon = \inf(s : s \in L \, , \, X_{s-} \neq X_s \, , \, d(X_{s-}, X_s) \geq \epsilon) \qquad \epsilon \geq 0 \, .$$

On vérifie facilement que les temps d'arrêt R_ϵ ont les propriétés suivantes

PROPOSITION 4. - 1) <u>On a</u> $R_\epsilon \geq T$ <u>pour tout</u> $\epsilon \geq 0$.

2) R_ϵ <u>décroit lorsque</u> $\epsilon \downarrow 0$.

3) <u>Le temps</u> R_ϵ <u>est un temps terminal sans point régulier et pour</u> ϵ <u>assez petit on a</u> $R_\epsilon = T$ <u>sur</u> $\{0 < T < \infty\}$.

(Le fait que R_ϵ est terminal est une conséquence de ce que

$$X_{a+T\circ\theta_a} \circ \theta_t = X_{t+(a+T\circ\theta_a)\circ\theta_t} = X_{a+t+T\circ\theta_{a+t}}$$

car alors si $s \in L$, il existe $s' \in L$ tel que

$$\{d(X_{s-} \circ \theta_t \, , \, X_s \circ \theta_t) \geq \epsilon\} = \{d(X_{s'-} \, , \, X_{s'}) \geq \epsilon\} \;) \, .$$

Désignons alors par R_ϵ^k , $k \in \mathbb{N}$, les itérés du temps R_ϵ , et par (C_t^ϵ) le processus croissant associé à R_ϵ :

(7) $$C_t^\epsilon = \sum_k I_{\{t \geq R_\epsilon^k\}} \quad .$$

C'est une fonctionnelle additive positive car R_ϵ est un temps terminal (prop. 2 p. 144 de P.A. MEYER [4]), de plus elle est purement discontinue et quasi-continue à gauche. Il existe donc d'après MOTOO -WATANABE (voir par exemple P.A. MEYER [5]) une fonction borélienne positive f_ϵ sur $E \times E$, telle que (C_t^ϵ) soit indistinguable de la fonctionnelle additive

(8) $$D_t^\epsilon = \sum_{s \leq t} f_\epsilon(X_{s-} , X_s) \, I_{\{X_{s-} \neq X_s\}} \quad , \quad t \in R_+ \quad .$$

Posons

$$H_\epsilon = \{f_\epsilon > 0\} \quad .$$

D'après les expressions (7) et (8) on peut évidemment supposer que les H_ϵ croissent lorsque $\epsilon \downarrow 0$, que H_ϵ est contenu dans $\{(x , y) : d(x , y) \leq \epsilon\}$ et que si $\epsilon' < \epsilon$ alors H_ϵ est l'intersection de $H_{\epsilon'}$ avec cette bande.

Soit alors Λ un élément de $\mathcal{F}_{T-}$. On a vu que $\Lambda \cap \{X_{T-} \neq X_T , 0 < T < \infty\}$ appartient à $\mathcal{F}_{T-}$, donc $\mathcal{F}_{R_\epsilon -}$ et par suite, puisque H_ϵ est admissible, on a d'après le théorème 1 :

(9) $$\int dP^\bullet I_{\Lambda \cap \{X_{T-} \neq X_T, 0<T<\infty\}} \, \Phi(X_{R_\epsilon^-} , X_{R_\epsilon}) = \int dP^\bullet I_{\Lambda \cap \{X_{T-} \neq X_T, 0<T<\infty\}} \, Q_\epsilon(X_{R_\epsilon^-} , \Phi)$$

où l'on a posé, avec les notations du théorème 1 , $Q_\epsilon \equiv Q_{H_\epsilon}$. Lorsque $\epsilon \downarrow 0$ le terme de gauche de (9) tend vers $\int dP^\bullet I_{\Lambda \cap \{X_{T-} \neq X_T, 0<T<\infty\}} \, \Phi(X_{T-} , X_T)$. Pour le terme de droite nous procèderons de la manière suivante : on a vu que H_ϵ croit si $\epsilon \downarrow 0$, nous poserons

$$H = \bigcup_{\epsilon} H_{\epsilon}$$

et
$$Q(x\ ,\ \Phi) = \begin{cases} 0 & \text{si } N(x\ ,\ I_H) = 0 \text{ ou } +\infty \\ \dfrac{N(x\ ,\ \Phi I_H)}{N(x\ ,\ I_H)} & \text{si } 0 < N(x\ ,\ I_H) < +\infty \end{cases}$$

(c'est la même définition qu'au théorème 1 plus haut, car H ne rencontre pas la diagonale de $E \times E$) ; lorsque Φ est nulle dans $\{(x\ ,\ y) : d(x\ ,\ y) < \epsilon\}$ le numérateur $N(x\ ,\ \Phi I_{H_\epsilon})$ de Q_ϵ reste stationnaire pour ϵ assez petit, donc le passage à la limite est légitime et nous donne

$$\int dP^{\bullet} I_{\Lambda \cap \{X_{T-} \neq X_T, 0<T<\infty\}}\ \Phi(X_{T-}\ ,\ X_T) = \int dP^{\bullet} I_{\Lambda \cap \{X_{T-} \neq X_T, 0<T<\infty\}}\ Q(X_{T-}\ ,\ \Phi)$$

On passe aussitôt de là au cas général en Φ .

DEUX APPLICATIONS DE LA FORMULE DE LEVY

PROPOSITION 5. - *Soient* A *et* B *deux ensembles boréliens de* E *et* T *le temps d'arrêt suivant*

$$T = \inf(s > 0\ ,\ (X_{s-}\ ,\ X_s) \in A \times B)\ .$$

Alors pour tout $x \in E$ *on a*

$$P^x\{X_{T-} \in A \cap B\ ,\ X_{T-} \neq X_T\} = 0 \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Considérons les deux processus croissants

$$C_t = \sum_{s \leq t} I_{(A \cap B)\times E}(X_{s-}\ ,\ X_s)\ I_{\{X_{s-} \neq X_s\}}$$

$$\widetilde{C}_t = \int_0^t N(X_{s-}\ ,\ I_{(A\cap B)\times E})d\Lambda_s = \int_0^t I_{A\cap B} \circ X_{s-} N(X_{s-}\ ,\ E)d\Lambda_s \quad .$$

Par la proposition 1 nous avons $E^{\bullet}[C_T] = E^{\bullet}[\tilde{C}_T]$. Or

$$E^{\bullet}[\tilde{C}_T] = \int_0^T I_{A\cap B} \circ X_{s-}\, N(X_{s-}, E)dA_s$$
$$= \int_0^T I_A \circ X_{s-}\, I_B \circ X_{s-}\, N(X_{s-}, E)dA_s$$
$$= \int_0^T I_A \circ X_{s-}\, I_B \circ X_s\, N(X_{s-}, E)dA_s$$

car la fonctionnelle (A_s) est continue. D'autre part nous avons $I_A \circ X_{s-}\, I_B \circ X_s = I_{A\times B}(X_{s-}, X_s) = 0$ pour $s < T$. Nous en déduisons que $C_T = 0$ p.s. . Or $C_T \geq I_{(A\cap B)\times E}(X_{T-}, X_T)\, I_{\{X_{T-}\neq X_T\}}$; d'où la proposition.

Cette proposition est surtout intéressante lorsque $A = E$.

Le théorème suivant n'est pas nouveau. Il a été montré par P.A. MEYER pour les processus standards. Pour les processus admettant un système de LEVY (A, N) on peut le déduire de la proposition 1.

PROPOSITION 6. - <u>Soit</u> u <u>une fonction excessive pour le semi-groupe</u> (P_t) . <u>Alors pour toute mesure initiale, presque tout</u> $\omega \in \Omega$ <u>possède la propriété</u>

$$(u \circ X_t)_-(\omega) = u \circ X_{t-}(\omega) \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad X_{t-}(\omega) \neq X_t(\omega) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Posons $Z_s \equiv (u \circ X_s)_- - u \circ X_{s-}$ et $\Phi = 1$. Le processus (Z_s) est d'une part prévisible, d'autre part positif car la fonction u est excessive. Par conséquent la proposition 1 entraîne que

$$E^{\bullet}[\sum_{s\leq t} ((u\circ X_s)_- - u\circ X_{s-})I_{\{X_{s-}\neq X_s\}}] = E^{\bullet}[\int_0^t ((u\circ X_s)_- - u\circ X_{s-})N(X_{s-}, E)dA_s]$$
$$= E^{\bullet}[\int_0^t (u\circ X_s - u\circ X_s)N(X_{s-}, E)dA_s$$
$$= 0$$

(nous avons utilisé le fait que la fonctionnelle (A_s) est continue. Le processus (Z_s) , étant positif, on en déduit la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHUNG and DOOB — Fields et optionality, Am. J. Math. 1965, p. 337-424.

[2] C. DELLACHERIE — Lecture Notes in Mathematics, n° 124, Séminaire de Probabilités IV de Strasbourg, Springer, 1970.

[3] P.A. MEYER — Intégrales stochastiques I, Lecture Notes in Mathematics, n° 39, Séminaire de Probabilité I de Strasbourg, Springer, 1967.

[4] P.A. MEYER — Intégrales stochastiques II, même référence que [3] .

[5] P.A. MEYER — Intégrales stochastiques IV, même référence que [3] .

[6] P.A. MEYER — Guide détaillé de la théorie des processus, Lecture Notes in Mathematics, n° 51, Séminaire de Probabilité II de Strasbourg, Springer, 1968.

[7] M. WEIL — Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, 1969, p. 1032-1035.

[8] M. WEIL — Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, 1970, p.