MICHEL WEIL

Décomposition d'un temps terminal

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 342-346
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__342_0>

Université de Strasbourg

Séminaire de Probabilités 1969-70

DECOMPOSITION D'UN TEMPS TERMINAL

par Michel WEIL

Supposons, pour simplifier, que nous avons affaire avec la réalisation canonique $(\Omega , \mathfrak{F} , \mathfrak{F}_t , X_t , \theta_t , P^x , x \in E)$ d'un semi-groupe de HUNT sur un espace localement compact à base dénombrable E.

Soit T un temps d'arrêt pour la famille $(\mathfrak{F}_t)$. On vérifie alors que les temps

$$T_p = \begin{cases} T & \text{sur } \{X_{T-} = X_T\} \\ +\infty & \text{sur } \{X_{T-} \neq X_T\} \end{cases} \qquad T_i = \begin{cases} T & \text{sur } \{X_{T-} \neq X_T\} \\ +\infty & \text{sur } \{X_{T-} = X_T\} \end{cases}$$

sont respectivement prévisible et totalement inaccessible sur l'ensemble $\{0 < T < +\infty\}$. De plus on a $T = T_p \wedge T_i$.

Malheureusement si T est terminal, les temps T_p et T_i ne le sont pas. Le théorème suivant donne une autre décomposition de T résolvant cette question.

THÉORÈME. - <u>Soit</u> T <u>un temps terminal exact sans point régulier</u>. <u>Notons par</u> $A = \{X_{T-} = X_T , T < \infty\}$ <u>et</u> $I = \{X_{T-} \neq X_T , T < \infty\}$ <u>la décomposition de</u> $\{T < \infty\}$ <u>en partie prévisible et totalement inaccessible</u>. <u>Alors il existe deux temps d'arrêt terminaux</u> T_{pr} <u>et</u> T_{in}, <u>l'un prévisible, l'autre totalement inaccessible, respectivement égaux à</u> T <u>sur</u> A <u>et</u> I, <u>et tels que</u> $T = T_{ac} \wedge T_{pr}$.

Remarque. - La propriété ci-dessus en remplaçant le terme prévisible par accessible est encore valable lorsqu'on a un processus stochastique muni d'un opérateur de translation : $(\Omega , \mathfrak{F} , \mathfrak{F} , X_t , \theta_t , \underset{\sim}{P})$, mais alors la décomposition du théorème dépend de la mesure $\underset{\sim}{P}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. - Pour simplifier nous supposerons que le temps T est parfait (i.e. la relation $t + T \circ \theta_t = T$ a lieu identiquement sur $\{t < T\}$) .

Si a est un nombre rationnel positif nous poserons

$$T^a = a + T \circ \theta_a \quad .$$

C'est encore un temps d'arrêt pour la famille $(\mathcal{F}_t)$. Nous désignerons par A^a (resp. I^a) le sous-ensemble $\{X_{T^a} = X_{T^a_-}\}$ (resp. $\{X_{T^a} \neq X_{T^a_-}\}$) de $\{T < \infty\}$ où T^a est prévisible (resp. totalement inaccessible), et par T^a_p , T^a_i les temps suivants

$$T^a_p = \begin{cases} T^a & \text{sur } A^a \\ +\infty & \text{sur } I^a \end{cases}$$

$$T^a_i = \begin{cases} T^a & \text{sur } I^a \\ +\infty & \text{sur } A^a \end{cases} \quad .$$

Définissons alors les temps d'arrêt suivants :

$$T_{pr} = \inf_{a \in \mathbb{Q}_+} T^a_p \qquad T_{in} = \inf_{a \in \mathbb{Q}_+} T^a_i \quad .$$

Ils sont respectivement prévisible et totalement inaccessible.(*) Montrons que $T = T_{in}$ sur I : nous avons $I = I^a \cap \{a < T\}$ car sur $\{a<T\}$ on a $T^a = T$; par conséquent si $\omega \in I$ on a :

$$\begin{aligned} T_{in}(\omega) &= \inf_a T^a_i(\omega) \\ &= \inf_a T^a(\omega) && \text{car } \omega \in I^a \\ &= \inf_a T(\omega) && \text{car } \omega \in \{a < T\} \\ &= T(\omega) \quad . \end{aligned}$$

(*) Le temps terminal T étant sans point régulier, l'ensemble des valeurs $T^a(\omega)$ est isolé à droite, et les inf en question sont atteints.

De même on montre que $T = T_p$ sur A et tout ceci entraine que $T = T_{in} \wedge T_{pr}$.

Il reste à montrer que T_{in} et T_p sont des temps terminaux. Prouvons le par exemple pour T_{in} , c'est-à-dire que pour $t < T_{in}$ on a $T_{in} \circ \theta_t = T_{in} - t$.

Montrons d'abord le lemme

LEMME. - <u>Pour tous nombres positifs</u>, a , t <u>on a les relations</u>

(1) $$\{X_{T^a_-} \circ \theta_t \neq X_{T^a} \circ \theta_t\} = \{X_{T^{a+t}_-} \neq X_{T^{a+t}}\}$$

(2) $$(T_i)^a = T^a_i \quad .$$

<u>Si, de plus</u> S <u>est un temps d'arrêt de la famille</u> $(\mathcal{F}_s)$ <u>et</u> $S^a = a + S \circ \theta_a$, $a \in \mathbb{R}_+$, <u>alors d'une part</u>

(3) $$S^a = S^t \quad \text{sur} \quad \{a \leq t < S^a\} \quad ,$$

<u>d'autre part</u>

(4) $$S^a \leq S^t \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq a \leq t \quad .$$

DÉMONSTRATION. - On voit sans peine que

$$T^{a+t} = a + t + T \circ \theta_{a+t} = t + T^a \circ \theta_t$$

et par suite $X_{T^a} \circ \theta_t = X_{T^{a+t}}$, d'où le relation (1) . On en déduit (2) .

Pour la relation (3) on procède ainsi : on a $\{t < T^a\} = \{t - a < T \circ \theta_a\}$. Donc, car T est un temps terminal :

$$t - a + T \circ \theta_a \circ \theta_{t-a} = T \circ \theta_a \qquad \text{sur} \quad \{a \leq t < T^a\}$$

ou encore

$$t - a + T \circ \theta_a = T \circ \theta_a \qquad \text{sur} \quad \{a \leq t < T^a\}$$

c'est-à-dire

$$T^t = T^a \qquad \text{sur} \quad \{a \leq t < T^a\} \ .$$

Montrons la relation (4) : comme $T \leq T^\varepsilon$ pour tout $\varepsilon \geq 0$ on aura

$$T \circ \theta_a \leq T^\varepsilon \circ \theta_a \ ,$$

donc

$$a + T \circ \theta_a \leq a + T^\varepsilon \circ \theta_a \ ,$$

c'est-à-dire

$$T^a \leq T^{a+\varepsilon} \ .$$

SUITE DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. - De la première partie du lemme précédant il résulte que

$$T_i^a \circ \theta_t = T_i^{a+t} - t$$

et par conséquent

$$T_{in} \circ \theta_t = \inf_{a \in \mathbb{Q}_+} T_i^a \circ \theta_t = \inf_{a \in \mathbb{Q}_+} T_i^{a+t} - t \ .$$

Or sur $\{t < T_{in}\}$ nous avons toujours $T_i^a \geq T_i^t$ pour tout $a \geq 0$. En effet : ou bien $a \geq t$ et cela résulte de la relation (4) avec $S = T_i$; ou bien $a < t$, mais nous sommes sur $\{t < T_{in}\}$ donc nous avons

$$a \leq t < T_i^a$$

ou encore

$$a \leq t < (T_i)^a$$

d'après (2) ; par suite

$$(T_i)^a = (T_i)^t$$

d'après (3) ;

donc

$$T_i^a = T_i^t$$

d'après (2) .

De la relation $T_i^a \geq T_i^t$, pour tout $a \in \mathbb{Q}_+$, on conclut vu (4) que

$$\inf_{a\in\mathbb{Q}_+} T_i^{a+t} = \inf_{a\in\mathbb{Q}_+} T_i^a$$

ce qui achève cette démonstration.