SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JOSÉ DE SAM LAZARO
PAUL-ANDRÉ MEYER

Une remarque sur le flot du mouvement brownien

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 278-282
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__278_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1969-70

UNE REMARQUE SUR LE FLOT DU MOUVEMENT BROWNIEN

par J. de SAM LAZARO et P.A.MEYER

La notion d'<u>hélice à accroissements orthogonaux</u> dans un flot a été introduite dans l'article [1] (et sera rappelée plus bas) ; pour abréger, on dira simplement <u>hélice</u> dans la suite. Nous avions posé à ce séminaire, il y a quelques années, le problème de la construction explicite d'une base d'hélices deux à deux orthogonales pour le flot du mouvement brownien, en suggérant que peut être chacun des"chaos de Wiener" contenait une seule hélice, ou un nombre fini d' hélices. On va montrer ci-dessous qu'il n'en est rien : pour tout $n>1$, l'espace des hélices contenues dans le n-ième chaos de Wiener est un espace de Hilbert facile à construire, mais de dimension infinie. Le problème de la construction explicite d'une base d'hélices n'est donc pas très intéressant.

On commence par quelques rappels sur les chaos de Wiener (dont la théorie n'a jamais été exposée au séminaire).

RAPPELS : MOUVEMENT BROWNIEN, HELICES

Nous désignerons par Ω l'ensemble de toutes les applications continues ω de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que $\omega(0)=0$. On pose $B_t(\omega)=\omega(t)$; pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\underline{\underline{F}}_a$ est la tribu engendrée par les différences B_t-B_s , pour $s<t\leq a$. De même, $\underline{\underline{F}}$ est engendrée par toutes les v.a. B_t , $t\in\mathbb{R}$. Il existe une loi P et une seule possédant la propriété suivante : pour tout s , et tout $t>s$, B_t-B_s est gaussienne centrée de variance t-s, indépendante de $\underline{\underline{F}}_s$.

Considérons l'application mesurable θ_t de Ω dans lui même, qui trans -forme ω en $\theta_t\omega$: $s \longmapsto X_{t+s}(\omega)-X_t(\omega)$. Ces applications θ_t ($t\in\mathbb{R}$) forment un groupe d'automorphismes de l'espace mesuré $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$; d'autre part si f est $\underline{\underline{F}}_a$-mesurable, $T_tf=f\circ\theta_t$ est $\underline{\underline{F}}_{a+t}$-mesurable . Le système $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,P)$ est un flot filtré, que l'on appelle le flot du mouvement brownien.

Une hélice est un processus $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur Ω, qui possède les propriétés suivantes :

a) $Z_0=0$; les trajectoires $Z_\cdot(\omega)$ sont continues à droite et pourvues de limites à gauche - en fait, dans le cas du mouvement brownien, elles seront p.s. continues.

b) pour tout h, tout couple (s,t), on a $(Z_t-Z_s)\circ\Theta_h = Z_{t+h}-Z_{s+h}$ p.s.

c) pour tout couple (s,t), Z_t-Z_s appartient à L^2, et $E[Z_t-Z_s|\underline{\underline{F}}_s]=0$.

On identifie deux hélices indistinguables. L'espace des hélices $\underline{\underline{H}}$ est alors un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$< Z,Z' > = E[Z_1Z_1']$$

On a $< Z,Z' > = 0$ si et seulement si les sous-espaces H_Z et $H_{Z'}$, engendrés respectivement par les différences Z_u-Z_v , $Z_u'-Z_v'$ sont orthogonaux. On dit dans ce cas que les hélices Z et Z' sont orthogonales.

Dans le cas du mouvement brownien, on a un exemple immédiat d'hélice : le processus (B_t) lui même.

CHAOS DE WIENER

On va décomposer l'espace $L^2(\Omega)$ en une somme directe hilbertienne de sous-espaces C_n ($n\geqq 0$), appelés chaos de Wiener.

L'espace C_0 est constitué par les fonctions constantes.

L'espace C_1 est engendré par les différences B_t-B_s ; on sait que l'application $f\longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)dB_s$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur C_1 .

Pour $n\geqq 2$, on procède de la manière suivante. On désigne par Δ_n (*) l'ensemble des $(t_1,t_2,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que $t_1<t_2\dots<t_n$. Soit f_n une fonction borélienne bornée à support compact sur $\mathbb{R}^n$, nulle hors de Δ_n. Construisons les variables aléatoires

$$\phi_1(t_2,t_3,\dots,t_n,\omega)= \int_{-\infty}^{\infty} f(s,t_2,\dots,t_n)dB_s(\omega)$$

Du fait que f est nulle hors de Δ_n , le processus à trajectoires continues $\phi_1(\cdot,t_3,\dots,t_n,\cdot)$ est adapté, donc prévisible, lorsque $t_3,\dots,t_n$ sont fixés. On peut donc définir l'intégrale stochastique

$$\phi_2(t_3,\dots t_n,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(s,t_3,\dots,t_n,\omega)dB_s(\omega)$$

$\phi_2(t,t_4,\dots t_n,\cdot)$ est à nouveau adapté. On continue ainsi jusqu'à la variable aléatoire

$$I_n(f,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{n-1}(s,\omega)dB_s(\omega)$$

*) On conviendra que $\Delta_1=\mathbb{R}$.

Supposons en particulier que f soit l'indicatrice d'un rectangle $A_1 \times A_2 \ldots \times A_n$ contenu dans Δ_n - ce qui signifie que, si l'on pose $A_i =]s_i, t_i[$, on a $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 \ldots < s_n < t_n$. On a alors

$$I_n(f) = (B_{t_1} - B_{s_1}) \ldots (B_{t_n} - B_{s_n}) \quad .$$

Le calcul habituel de la variance d'une intégrale stochastique donne

$$\int I_n^2(f,\omega) dP(\omega) = \int f^2(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n$$

Il en résulte :

PROPOSITION. <u>L'application</u> I_n <u>se prolonge en une isométrie</u> (<u>encore notée</u> I_n) <u>de</u> $L^2(\Delta_n)$ <u>sur un sous-espace fermé</u> C_n <u>de</u> $L^2(\Omega)$.

C_n est appelé le n-ième chaos de Wiener. On écrit d'habitude

$$I_n(f) = \int f(t_1, \ldots, t_n) dB_{t_1} \ldots dB_{t_n}$$

(intégrale de Wiener multiple). La propriété fondamentale des chaos de Wiener est donnée dans l'énoncé suivant :

THEOREME 1. <u>L'espace</u> $L^2(\Omega)$ <u>est somme directe hilbertienne des espaces</u> C_n.

DEMONSTRATION (sommaire). a) Pour montrer que $I_n(f)$ et $I_m(g)$ sont orthogonales si $n \neq m$, il suffit de traiter le cas où f est l'indicatrice d'un rectangle $A_1 \times \ldots \times A_n$ contenu dans Δ_n, g celle d'un rectangle $B_1 \times \ldots \times B_m$ contenu dans Δ_m. On se ramène aisément, par subdivision, au cas où pour tout couple (i,j), ou bien $A_i = B_j$, ou bien $A_i \cap B_j = \emptyset$. Supposons alors, par exemple, que $n > m$: l'un des $A_i =]s_i, t_i[$ au moins n'est égal à aucun B_j ; dans $I_n(f) I_m(g)$ le terme $(B_{t_i} - B_{s_i})$ apparaît avec l'exposant 1, multiplié par des termes qui en sont indépendants. Il en résulte $E[I_n(f) I_m(g)] = 0$.

b) Pour montrer que la somme directe hilbertienne des C_n est $L^2(\Omega)$ tout entier, on part de la formule

$$\int_0^t dB_u = B_t \quad ; \quad \int_0^t dB_{u_2} \int_0^{u_2} dB_{u_1} = \tfrac{1}{2}(B_t^2 - t) \quad \ldots .$$

$$\int_0^t dB_{u_n} \int^{u_n} dB_{u_{n-1}} \ldots \int_0^{u_2} dB_{u_1} = H_n(B_t)$$

où H_n est un polynôme de degré n. Il en résulte que pour tout n on a une représentation au moyen d'intégrales multiples

$$B_t^n = \sum_{k=0}^{k=n} I_k(f_k)$$

où pour chaque k f_k est nulle hors de l'ensemble $\{x_1<x_2\dots<x_k<t\}$ de $\mathbb{R}^k$. Par translation, on a un résultat analogue pour $(B_t-B_s)^n$, les f_k étant nulles chacune hors de $\{s<x_1\dots<x_n<t\}$. On en déduit que si $s_1<t_1\leqq s_2<t_2\dots\leqq s_m<t_m$, le produit

(1) $$(B_{t_1}-B_{s_1})^{n_1}\dots\ (B_{t_m}-B_{s_m})^{n_m}$$

est une somme de produits de la forme

$$I_{k_1}(f_{k_1})\dots\ I_{k_m}(f_{k_m})$$

avec pour tout i $k_i\leqq n_i$, f_{k_i} étant nulle hors de $\{s_i<x_1\dots<x_{k_i}<t_i\}$.
Ce produit est tout simplement l'intégrale stochastique

$$I_{k_1+k_2+\dots k_m}(f_{k_1}\otimes f_{k_2}\otimes\dots f_{k_m})$$

et il ne reste plus qu'à vérifier que les produits (1) forment un ensemble total dans $L^2(\Omega)$, ce qui n'est pas difficile.

HELICES DANS C_2

Considérons une variable aléatoire $Z\in C_2$: elle se représente comme une intégrale stochastique

$$Z(\omega)=\int f(x,y)dB_x(\omega)dB_y(\omega)$$

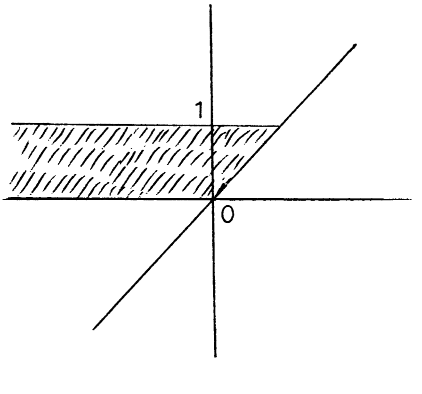
où $f\in L^2(\mathbb{R}^2)$ est nulle hors de Δ_2 . On vérifie très facilement que

1) Z est $\underline{\underline{F}}_a$-mesurable si et seulement si f est nulle (p.p.) hors du demi-plan $\{(x,y): y\leqq a\}$.

2) On a $Z\circ\Theta_t=\int f(x-t,y-t)dB_xdB_y$.

3) Z est orthogonale à $\underline{\underline{F}}_a$ si et seulement si f est nulle (p.p.) dans le demi-plan $\{(x,y) : y\leq a\}$.

En particulier, considérons une hélice (Z_t) : la variable aléatoire Z_1 $=Z_1-Z_0$ admet une représentation du type ci-dessus, où f est nulle pour y>1 (puisque Z_1 est $\underline{\underline{F}}_1$-mesurable), et pour y<0 (puisque Z_1-Z_0 est orthogonale à $\underline{\underline{F}}_0$) :



De plus, on a $Z_1=Z_{1/2}+Z_{1/2}\circ\Theta_{1/2}$, puis $Z_{1/2}=Z_{1/4}+Z_{1/4}\circ\Theta_{1/4}$, etc. Si l'on examine ce que cela signifie pour f, on voit que

(1) $\qquad f(x,y) = \phi(y-x) \quad \text{pour } 0<x<y,\ x<1$

où ϕ est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}_+$. On a dans ces conditions

$$E[Z_1^2] = \int f^2(x,y)dB_x dB_y = \int_0^\infty \phi^2(u)du < \infty$$

Inversement, on vérifie aussitôt que si $\phi\in L^2(\mathbb{R}_+)$, on définit une hélice Z en posant

$$Z_t = \int_{\substack{0<y<t\\x<y}} \phi(y-x)dB_x dB_y \quad \text{si } t\geqq 0$$

$$Z_t = -\int_{\substack{-t<y<0\\x<y}} \phi(y-x)dB_x dB_y \quad \text{si } t\leqq 0$$

Il en résulte que l'espace de Hilbert des hélices contenues dans C_2 est isomorphe à $L^2(\mathbb{R}_+)$. Plus généralement, on montre de même que l'espace des hélices contenues dans C_n $(n>2)$ est isomorphe à $L^2(\Delta_{n-1})$. Ces espaces n'ont donc pas de base finie.

BIBLIOGRAPHIE

La notion d'hélice est étudiée en détails dans l'article :

J.de SAM LAZARO et P.A.MEYER, Méthodes de martingales et théorie des flots , exposé à Strasbourg en Avril 1968, à paraître sans doute en 1971 dans le Zeitschrift für W-theorie.

Au sujet des intégrales stochastiques multiples et des chaos de Wiener, consulter les excellents articles de K.ITO :

Multiple Wiener integral, J. Math.Soc. Japan , 3 , 1951, p.157-169.

Complex multiple Wiener integral, Jap.J. of M., 22, 1952, p.63-86.

Spectral type of the shift transformation of differential processes with independent increments, Trans. Amer.M.Soc., 81, 1956, p.253-263.

La formule sur les intégrales stochastiques multiples, qui a servi dans la démonstration du théorème 1, est classique. On en trouvera une démonstration "moderne" dans

B.MAISONNEUVE. Quelques martingales remarquables associées à une martingale continue, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, 1970.