Daniel Revuz

Remarque sur les potentiels de mesure

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 275-277

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__275_0>

REMARQUE SUR LES POTENTIELS DE MESURE

par

Daniel REVUZ(*)

Soient X et $\hat{X}$ deux processus standards en dualité ([1] Chap. VI) . On note comme d'habitude $U^\alpha(x,y)$ $(\alpha \geqq 0)$ le noyau fonction associé et

$$U^\alpha \mu(x) = \int_E U^\alpha(x,y)\mu(dy)$$

le potentiel d'ordre α de la mesure μ .

Dans [2] , BLUMENTHAL et GETOOR démontrent l'équivalence de l'hypothèse (H) de Hunt :

(H) Les ensembles semi-polaires sont polaires, et du "principe du maximum borné" suivant :

(M^*_α) si μ est à support compact K et si $U^\alpha \mu$ est borné

$$||U^\alpha \mu|| = \sup\{U^\alpha \mu(x) : x \in K\} .$$

La démonstration est faite sous l'hypothèse que les fonctions α-excessives sont SCI ce qui entraîne en particulier que X est standard spécial. Pour $\alpha = 0$ il faut évidemment faire de plus une hypothèse de transience sur le processus.

Dans [2] l'hypothèse de semi-continuité inférieure sert essentiellement dans la proposition suivante d'un intérêt intrinsèque évident.

Proposition : Si $U^\alpha \mu$ est borné, la mesure μ ne charge pas les ensembles polaires .

(*) Equipe de recherche n°1 "Processus stochastiques et applications" dépendant de la Section n°2 "Théories Physiques et probabilités" associée au C.N.R.S..

Nous allons montrer ici (en n'écrivant que le cas $\alpha = 0$) que cette proposition peut se démontrer sous des hypothèses différentes : X est standard spécial, le temps de mort ζ est fini p.s. (hypothèse de transience), il existe un $\alpha > 0$ tel que la fonction $U^{\alpha}(.,E)$ soit SCI . Il suffirait en fait que cette fonction soit co-finement SCI.

Démonstration : Posons $f = U\mu$; la surmartingale $f(X_t)$ est bornée. Pour tout $x \in E$, presque toute trajectoire est sans discontinuité de 2ème espèce et l'on pose :

$$Z(\omega) = f(X_{\zeta}(\omega))_- = \lim_{t \uparrow \zeta(\omega)} f(X_t(\omega)) .$$

Soit maintenant $\{T_n\}$ une suite de temps d'arrêt croissant vers $T \geqq \zeta$. Presque-sûrement $f(X_{T_n})$ tend vers Z sur $\Gamma = \{T_n < \zeta$ pour tout $n\}$ et vers zéro sur Γ^c. On a donc :

$$P_{T_n} f(x) = E_x\left(f(X_{T_n})\, 1_{\{T_n<\zeta\}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} E_x(Z.1_{\Gamma})$$

puisque f est bornée et si l'on appelle ζ_A la partie accessible de ζ ([3] p.102) :

$$\lim_n P_{T_n} f(x) \leqq E_x\left(Z.1_{\{\zeta=\zeta_A\}}\right) .$$

Posons maintenant $D_n = \{x : \alpha\, U^{\alpha}(x,E) \leqq 1/n\}$ pour la valeur de α visée dans l'hypothèse ; d'après MEYER ([3]) la suite T_{D_n} tend en croissant vers ζ et l'on a $T_{D_n} < \zeta$ pour tout n sur l'ensemble $\{\zeta = \zeta_A\}$. On a donc :

$$\lim_n P_{D_n} f(x) = E_x\left(Z.1_{\{\zeta=\zeta_A\}}\right) .$$

Mais par ailleurs les ensembles D_n sont fermés, donc $\hat{X}_{T_{D_n}} \in D_n$ presque-sûrement, donc $\alpha\, U^{\alpha}(\hat{X}_{T_{D_n}}, E) \leqq 1/n$ et donc si $T = \lim \hat{T}_{D_n}$ $\alpha\, U^{\alpha}(\hat{X}_T,E) = 0$ sur $\{T < \zeta\}$, ce qui est impossible. Les temps $\hat{T}_{D_n}$ croissent donc vers $\hat{\zeta}$ presque-sûrement.

On peut maintenant répéter le raisonnement de [1] p.269-270. Soit h une fonction intégrable ; on a :

$$\infty > \langle h, P_{D_n} U\mu \rangle = \langle h, U \hat{P}_{D_n} \mu \rangle$$
$$= \hat{E}_\mu \int_{T_{D_n}}^{\zeta} h(X_t)\, dt$$

D'où il résulte que $P_{D_n} U\mu$ tend vers zéro presque-partout, puis partout puisque $U\mu$ est borné. Il en résulte que :

$$E_x\left(Z . 1_{\{\zeta = \zeta_A\}}\right) = 0$$

pour tout $x \in E$ et donc que $U\mu$ est un potentiel naturel. Il résulte alors de (4) V.6 que μ ne charge pas les ensembles polaires.

Remarque : Cette démonstration est beaucoup moins élémentaire que celle de Blumenthal et Getoor. Il serait souhaitable de trouver une démonstration élémentaire et valable sous la seule hypothèse que X soit standard spécial et transient.

BIBLIOGRAPHIE

(1) BLUMENTHAL R.M. et GETOOR R.K. : Markov processes and Potential Theory. Academic Press 1968.

(2) BLUMENTHAL R.M. et GETOOR R.K. : Dual processes and Potential Theory. A paraître.

(3) MEYER P.A. : Processus de Markov. Lecture Notes in Mathematics 1967.

(4) REVUZ D. : Mesures associées aux fonctionnelles additives de Markov. I. T.A.M.S. Vol. 148 (1970) p.501-531.

D. REVUZ
20, rue de Rome

78-LES ESSARTS LE ROI