Paul-André Meyer

Balayage pour les processus de Markov continus à droite, d'après C.T. Shih

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 270-274
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__270_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1969/70

BALAYAGE POUR LES PROCESSUS DE MARKOV CONTINUS À DROITE, D'APRES SHIH CHUNG TUO (*)

La théorie probabiliste du potentiel a été développée d'abord sous des hypothèses de régularité très fortes (hypothèses de HUNT) . Dans le livre [1] de BLUMENTHAL et GETOOR, elle est traitée pour des processus standard, au prix de difficultés techniques assez considérables. Ce sont BLUMENTHAL et GETOOR qui ont montré l'importance du résultat suivant :

THEOREME 1.- Soit (X_t) une réalisation standard d'un semi-groupe (P_t) sur un espace LCD E, et soit A une partie borélienne de E. Il existe alors, pour toute loi initiale μ qui ne charge pas $A \setminus \mathrm{reg}(A)$, une suite décroissante (G_n) d'ouverts fins presque boréliens contenant A , telle que le temps d'entrée T_{G_n} croisse P^μ-p.s. vers T_A.

Ce théorème entraîne le théorème du balayage de HUNT (la démonstration de BLUMENTHAL-GETOOR n'utilise que le th.1, la continuité à droite des trajectoires et la propriété de Markov forte ; voir aussi le chapitre 1 de [3]). Il est aussi fort utile dans la technique de la théorie des frontières (cf. [3], chap.III, T9). Malheureusement, la démonstration de BLUMENTHAL et GETOOR est difficile.

Depuis lors, les méthodes de compactification ont été utilisées de plus en plus souvent en théorie des processus de Markov, et SHIH CHUNG TUO a utilisé une telle méthode pour démontrer le théorème 1, sans supposer que le processus est standard . De ce fait, le théorème du balayage de HUNT se trouve étendu aussi aux processus non standard. Il faut noter que la méthode de SHIH est très simple. Nous exposons ici une variante de la démonstration de SHIH, qui utilise une compactification plus facile encore à décrire.

HYPOTHESES.- E est un espace topologique, homéomorphe à un sous-ensemble borélien d'un espace métrique compact J (+). Celui-ci n'interviendra dans nos raisonnements que par le choix d'une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur E, qui seront les restrictions à E de fonctions continues

(*) Exposé de P.A.Meyer (+) i.e., E est lusinien métrisable.

sur J, formant une suite dense dans la boule unité de $\underline{\underline{C}}(J)$.

(P_t) est un semi-groupe de Markov sur E, tel que $P_t 1=1$ pour tout t (cela n'entraîne aucune perte de généralité). Nous supposons qu'il admet une réalisation continue à droite, et nous désignons par (Ω, (X_t), $(\underline{\underline{F}}_t)$,...) sa réalisation continue à droite canonique. Soit (U_p) sa résolvante. Nous faisons l'hypothèse habituelle, qui entraîne la propriété de Markov forte :

<u>les fonctions p-excessives</u> $(p\geqq 0)$ <u>sont presque-boréliennes, et continues à droite p.s. sur les trajectoires du processus</u> (X_t).

Nous posons alors pour $m\in\mathbb{N}$ $g_{nm}=(m+1)U_{m+1}g_n$ (m+1 pour éviter 0!) Nous allons faire l'hypothèse auxiliaire que <u>la résolvante transforme les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes</u>, dont nous ne savons malheureusement pas nous passer . Les fonctions g_{nm} étant des différences de fonctions p-excessives, nous pouvons jeter hors de Ω les ω tels que les applications $t\longmapsto g_{nm}\circ X_t(\omega)$ ne soient pas continues à droite et pourvues de limites à gauche.

Soit $I=[-1,1]$, et soit ϕ l'application $x\longmapsto (g_{nm}(x))_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ de E dans l'espace compact $K=I^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$; cette application est borélienne d'après l'hypothèse auxiliaire, injective car les g_{nm} séparent les points de E (noter que $g_{nm}\rightarrow g_n$ lorsque $m\rightarrow\infty$). Nous <u>identifierons</u> E à un sous ensemble de K au moyen de ϕ. Des résultats classiques sur les espaces lusiniens entraînent que <u>E est borélien dans K</u>, et que <u>la tribu induite sur</u> E <u>par la tribu borélienne de</u> K <u>est la tribu borélienne de E</u>. (X_t) est un processus continu à droite et pourvu de limites à gauche à valeurs dans K, qui ne sort jamais de E. Pour toute partie A de K, nous posons comme d'habitude

$$D_A(\omega) = \inf \{ t\geqq 0 : X_t(\omega)\in A \} , \quad T_A(\omega) = \inf \{ t>0 : X_t(\omega)\in A \}$$

Nous choisissons une loi initiale μ sur E, et nous démontrons le résultat principal :

THEOREME 2.- <u>Sous les seules hypothèses faites sur</u> (X_t) :

a) <u>Si</u> A <u>est une partie borélienne de</u> E, <u>il existe une suite décroissante</u> (O_p) <u>d'ouverts fins presque-boréliens de</u> E <u>contenant</u> A, <u>telle que l'on ait</u> P^μ-<u>p.s.</u> $D_{O_p}\uparrow D_A$

b). Si μ ne charge pas $A \setminus reg(A)$, on peut construire une suite analogue telle que $T_{O_p} \uparrow T_A$ P^μ-p.s.

DEMONSTRATION.- Nous ne prouverons que a), car b) s'en déduit par un procédé standard ([2], p. 132). Le lecteur se reportera à ce travail, ou au livre de BLUMENTHAL et GETOOR, ou à DYNKIN...

Nous commençons par le cas où A (contenu dans E) est compact dans K. Choisissons une suite décroissante (G_p) d'ouverts de K contenant A, telle que $A = \bigcap_p \overline{G}_p$. Nous allons prouver que $D_{G_p} \uparrow D_A$ P^μ-p.s.. Posons $D_{G_p} = S_p$, $\lim_p S_p = S$; tout revient à montrer que $X_S \in A$ P^μ-p.s. sur $\{S<\infty\}$.

La limite $Y = \lim_p X_{S_p}$ existe dans la topologie de K, sur $\{S<\infty\}$; d'après le choix des G_p, c'est une v.a. à valeurs dans A, donc dans E. Comme les g_{nm} sont continues sur K, nous avons

$$\lim_p g_{nm} \circ X_{S_p} = g_{nm} \circ Y \quad \text{sur } \{S<\infty\}$$

D'après le théorème XIII.29 de [2], p.52, le premier membre est égal sur $\{S<\infty\}$ à $E[g_{nm} \circ X_S \, I_{\{S<\infty\}} | \bigvee_p \underline{\underline{F}}_{S_p}]$. Nous en déduisons que

$$E[g_{nm} \circ X_S \,.\, f \circ Y . I_{\{S<\infty\}}] = E[g_{nm} \circ Y . f \circ Y . I_{\{S<\infty\}}]$$

quelle que soit la fonction f sur K : en effet, $f \circ Y . I_{\{S<\infty\}}$ est mesurable par rapport à la tribu $\bigvee_p \underline{\underline{F}}_{S_p}$. Faisons tendre m vers $+\infty$: comme $X_S \in E$, $g_{nm} \circ X_S \rightarrow g_n \circ X_S$. Comme Y est à valeurs dans E , $g_{nm} \circ Y$ tend vers $g_n \circ Y$. Prenant $f = g_{n'}$ (prolongée arbitrairement hors de E), il vient

$$E[g_n \circ X_S . g_{n'} \circ Y . I_{\{S<\infty\}}] = E[g_n \circ Y . g_{n'} \circ Y . I_{\{S<\infty\}}]$$

d'où l'on déduit, en vertu du choix des g_n , que $Y = X_S$ p.s. . On a donc bien $X_S \in A$ p.s..

Pour toute partie borélienne H de K, posons $I(H) = E^\mu[e^{-D_H}]$: c'est une fonction d'ensemble croissante, fortement sous-additive, qui passe à la limite suivant les suites croissantes. Pour toute partie J de K, posons $I^*(J) = \inf I(H)$, pour H ouvert dans K contenant J ; I^* est une capacité de CHOQUET sur K (cf. [3], p.78). Pour toute partie borélienne A de E, il existe donc une suite croissante (F_p) de compacts de K contenus dans A, une suite décroissante (G_p) d'ouverts de K contenant A, telles que

$$\lim_p I^*(F_p) = \lim_p I^*(G_p)$$

Mais on a $I^*(G_p)=I(G_p)$ de manière évidente, et $I^*(F_p)=I(F_p)$ d'après la première partie de la démonstration. Il en résulte aussitôt que $D_{G_p} \uparrow D_A$ P^μ-p.s. ; or on a $D_{G_p} = D_{O_p}$, où $O_p=E\cap O_p$. Il ne reste plus qu'à remarquer que si G est ouvert dans K, $G\cap E$ est ouvert fin (borélien) dans E . En effet, l'indicatrice de G est enveloppe supérieure d'une suite de fonctions continues sur K ; tout revient donc à montrer que si g est une fonction continue sur K, alors sa restriction $g|_E$ à E est finement continue. Or c'est vrai pour les g_{nm} , qui séparent K, et pour les autres cela résulte du théorème de Stone-Weierstrass. Le théorème est établi.

REMARQUE SUR L'HYPOTHESE AUXILIAIRE. Si l'on ne fait pas cette hypothèse, les fonctions g_{nm} sont seulement presque-boréliennes . Chacune d'elles peut être encadrée entre deux fonctions $\underline{g}_{nm}$ et $\overline{g}_{nm}$, boréliennes, telles que le processus (X_t) ne rencontre pas $(P^\mu$-p.s.) l'ensemble $\{ \underline{g}_{nm} < \overline{g}_{nm} \}$. On a donc pour presque tout $\omega\in\Omega$ $\underline{g}_{nm}\circ X_t(\omega)=g_{nm}\circ X_t(\omega)=\overline{g}_{nm}\circ X_t(\omega)$ pour tout couple (n,m) et tout t. En particulier , les fonctions $\underline{g}_{nm},\overline{g}_{nm}$ sont continues à droite sur les trajectoires de (X_t). Noter que les fonctions $\underline{g}_{nm},\overline{g}_{nm}$ séparent E : si par exemple $g_{nm}(x)< g_{nm}(y)$, on a aussi $\underline{g}_{nm}(x)< \overline{g}_{nm}(y)$. Au lieu de compactifier E au moyen des fonctions g_{nm} , compactifions le au moyen de toutes les fonctions $\underline{g}_{nm}$, $\overline{g}_{nm}$, et raisonnons comme plus haut. Les ensembles G_p sont ouverts dans K, mais les ensembles O_p ne sont plus finement ouverts : ils sont seulement " μ-finement ouverts" , car les fonctions continues sur K sont continues à droite sur P^μ-presque toute trajectoire du processus, mais cela n'a pas nécessairement lieu pour toute mesure initiale.
Si l'on réduit les ensembles O_p à leur intérieur fin $\overset{\circ}{O}_p$, on obtient bien des ensembles presque-boréliens finement ouverts, mais qui ne contiennent plus A qu'à un ensemble " μ-polaire" près. Si l'hypothèse de continuité absolue est satisfaite, les ensembles $\{\underline{g}_{nm}<\overline{g}_{nm}\}$ peuvent être supposés polaires, et les ensembles $\overset{\circ}{O}_p$ contiennent A à un ensemble polaire près. La situation n'est tout de même pas pleinement satisfaisante.

APPROXIMATION PAR L'INTERIEUR

Nous avons établi, d'après SHIH, un théorème d'approximation des temps d'entrée " par l'extérieur". Il est naturel de se poser la question de la validité, pour les processus de Markov considérés, du théorème d'approximation des temps d'entrée " par l'intérieur" . Il s'agit en fait d'un résultat entièrement général pour les processus bien-mesurables ! Ce fait a été établi par DELLACHERIE, et je reproduis ici sa démonstration.

NOTATIONS.- $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est un espace probabilisé complet, muni d'une famille croissante de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$ satisfaisant aux conditions habituelles, ($t\geqq 0$) .

E est un espace topologique lusinien ; (X_t) est un processus bien-mesurable par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, à valeurs dans E - un processus continu à droite, par exemple. Pour tout borélien B de E, on pose

$$D_B(\omega) = \inf \{ t\geqq 0 : X_t(\omega) \in B \}$$

THEOREME 3- <u>Il existe une suite croissante</u> (K_n) <u>de compacts de E contenus dans</u> B, <u>tels que</u> $D_{K_n} \downarrow D_B$ <u>p.s.</u>

DEMONSTRATION.- Soit $D=D_B$, soit $\varepsilon>0$. L'ensemble $A = \{(t,\omega) : X_t(\omega)\in B, D(\omega)\leqq t\leqq D(\omega)+\varepsilon \}$ est bien-mesurable. D'après le théorème de section, il existe un temps d'arrêt T dont le graphe passe dans A, tel que $P\{T<\infty\} \geqq P($ projection de A $) - \varepsilon$. Autrement dit

$$X_T\in B \text{ sur } \{T<\infty\} , \; D\leqq T\leqq D+\varepsilon \text{ sur } \{T<\infty\}$$
$$P\{D<\infty , \; T=\infty\} < \varepsilon$$

Soit μ la loi de la variable aléatoire X_T : toute loi sur E étant régulière, et μ étant portée par B, il existe un compact $K\subset B$ tel que K porte μ à ε près. Autrement dit, comme $D\leqq D_K\leqq T$, on a

$$D_B \leqq D_K , \; P\{D_K > D_B+\varepsilon\} \leqq 2\varepsilon$$

Le théorème en résulte par un raisonnement bien connu.

[1] BLUMENTHAL et GETOOR, Mkv processes and potential theory, Academic Press, 1968 .
[2] MEYER, Processus de Markov, Lecture Notes n°26, Springer 1967
[3] MEYER, La frontière de Martin, Lecture Notes n°77, Springer 1968.
[4] SHIH, On extending potential theory to all strong Markov processes, Ann. Inst. Fourier, t.20 fasc.1, 1970, 303-316.